Lección 4 Otras funciones reales

4.1 Función $f(x) = x^3$

Problema inicial

Sea $y = x^3$:

$x^3 = (x)(x)(x)$

1. Completa la siguiente tabla (aproxima hasta las centésimas):

x	–1	–0.8	–0.6	–0.4	–0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	–1										

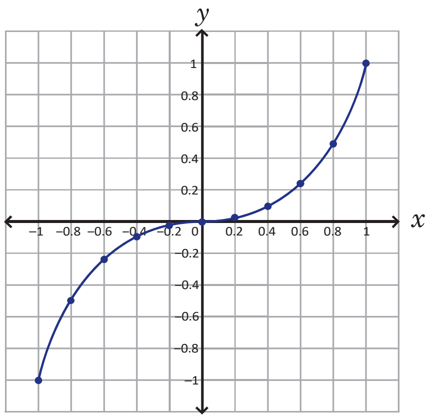
2. Ubica los pares ordenados (x, y) encontrados en el literal anterior. ¿Cómo es la línea que se forma?

Solución

1. Cada valor de y es igual a multiplicar el correspondiente valor de x por sí mismo tres veces. Debe cuidarse el signo, por ejemplo: $(–1)^3 = (–1)(–1)(–1) = –1$. De acuerdo con esto, la tabla queda de la siguiente manera:

x	–1	–0.8	–0.6	–0.4	–0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	–1	–0.51	–0.22	–0.06	–0.01	0	0.01	0.06	0.22	0.51	1

2. Los puntos del numeral anterior quedan situados como se muestra en la figura de la derecha. La línea que se forma no es recta y tampoco es una parábola.



x^3 es la potencia cúbica del número x; también se lee "x elevado al cubo".

Conclusión

La ecuación $y = x^3$ corresponde a una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que asigna a cada número real x su valor elevado al cubo. Para la función $f(x) = x^3$: el dominio y rango son el conjunto de los números reales, su gráfica pasa por el origen y es creciente en todo su dominio.

Una función x de A en B significa que a cada elemento x del conjunto A le corresponde un único elemento y del conjunto B. Si la función es de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ entonces los valores para x son números reales y su correspondiente $f(x)$ también es un número real.

Problemas

1. Sea $f(x) = x^3$; completa la siguiente tabla y ubica los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano (aproxima hasta las centésimas). Utiliza los puntos encontrados en el problema 1 del Problema inicial para continuar la gráfica de f:

x	–2	–1.8	–1.6	–1.4	–1.2	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$										

2. ¿Qué relación hay entre los valores de $f(x) = x^3$ cuando $x = –1$ y $x = 1$? ¿Y si $x = –2$ y $x = 2$?

3. En general, ¿qué relación hay entre los valores de $f(x) = x^3$ cuando $x = –m$ y $x = m$?

Indicador de logro

4.1 Elabora la gráfica de la función de la forma $f(x) = x^3$ ubicando puntos en el plano cartesiano que satisfacen la ecuación de la función.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el numeral 2 del Problema inicial.

Secuencia

La forma de introducir la función $y = x^3$ es similar a cuando se presentaron las funciones $y = x$ y $y = x^2$, es decir, usando tablas para calcular valores particulares y ubicando los pares (x, y) en el plano cartesiano.

Propósito

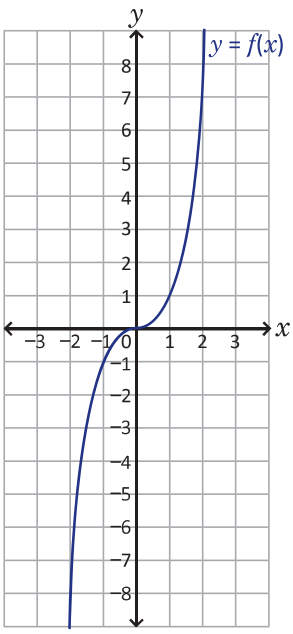
Si bien en el Problema inicial se utiliza la forma $y = x^3$, luego de definir la función en la Conclusión, para el bloque de Problemas los estudiantes deben utilizar la notación $f(x) = x^3$.

Solución de problemas:

1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–2	–1.8	–1.6	–1.4	–1.2	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$	–8	–5.83	–4.10	–2.74	–1.73	1.73	2.74	4.10	5.83	8

Si se toman valores menores que –2 para x, su correspondiente $f(x)$ será cada vez menor; mientras que si se toman valores mayores que 2 para x, su correspondiente $f(x)$ será cada vez mayor, tal como lo muestra la gráfica:



2. Sea $f(x) = x^3$; se calculan $f(-1)$ y $f(1)$: $f(-1) = -1$ y $f(1) = 1$, es decir, $f(-1) = -f(1)$. De forma similar, $f(-2) = -8$ y $f(2) = 8$; luego, $f(-2) = -f(2)$.

3. Para $x = -m$ y $x = m$: $f(-m) = (-m)^3 = -m^3$, y $f(m) = m^3$. Entonces se verifica que $f(-m) = -f(m)$.

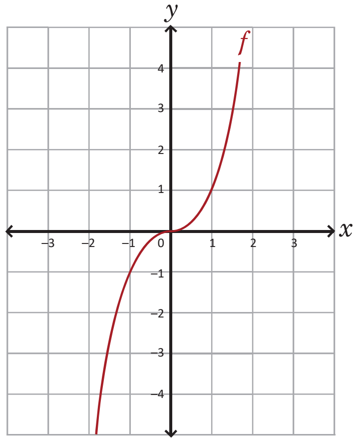
Con los problemas 2 y 3 se puede concluir que la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Lección 4

4.2 Función $f(x) = ax^3$, $a > 0$

Problema inicial

Con la gráfica de $f(x) = x^3$, realiza lo siguiente:



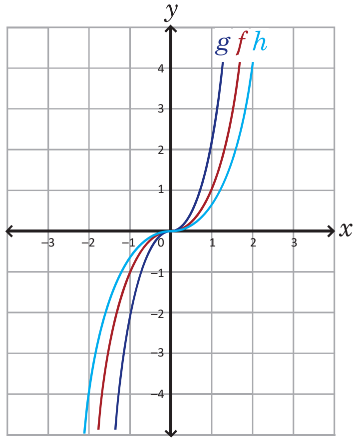
1. Utiliza los valores de $f(x)$ para completar la tabla y grafica las funciones $g(x) = 2x^3$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^3$:

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$									
$h(x)$									

2. ¿Cuáles son las similitudes y diferencias de las funciones g y h con respecto a la función f?

Solución

1. Los valores de $g(x)$ son el resultado de multiplicar por 2 los de $f(x)$; mientras que los de $h(x)$ son el resultado de multiplicar por $\frac{1}{2}$ los de $f(x)$. La tabla queda de la siguiente manera:



x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	−16	−6.76	−2	−0.26	0	0.26	2	6.76	16
$h(x)$	−4	−1.69	−0.5	−0.07	0	0.07	0.5	1.69	4

Las gráficas de g y h se muestran en la figura de la derecha.

2. Similitudes entre las funciones:
   a) el dominio y el rango de las tres es $\mathbb{R}$;
   b) las gráficas de las tres funciones tienen la misma forma y pasan por el origen.

   Diferencias entre las funciones:
   a) todos los puntos, excepto el origen, no coinciden;
   b) si $x < 0$ entonces $g(x)$ está debajo de $f(x)$ y $h(x)$ está arriba de $f(x)$;
   c) si $x > 0$ entonces $g(x)$ está arriba de $f(x)$ y $h(x)$ está debajo de $f(x)$.

En resumen

La función $g(x) = ax^3$, con $a > 0$, tiene como dominio y rango el conjunto de los números reales y es creciente en todo su dominio; su gráfica pasa por el origen, tiene la misma forma que la gráfica de $f(x) = x^3$ y resulta de multiplicar por a los valores de $f(x)$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x) = x^3$ grafica las funciones $g(x) = 3x^3$ y $h(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Elabora una tabla similar a la del Problema inicial.

Indicador de logro

4.2 Grafica funciones de la forma $g(x) = ax^3$ para $a > 0$ usando la gráfica de $f(x) = x^3$.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el numeral 2 del Problema inicial (también puede utilizarse para la solución del bloque de Problemas).

Secuencia

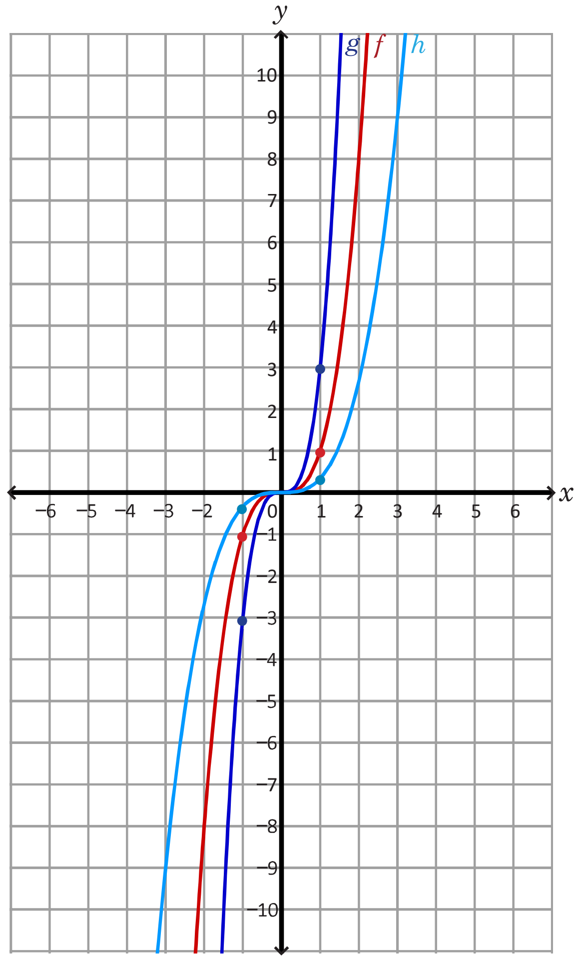
En esta clase se analizan las características de las funciones de la forma $g(x) = ax^3$, para $a > 0$, a partir de $f(x) = x^3$.

Solución de problemas:

Sean $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x^3$ y $h(x) = \frac{1}{3}x^3$. Los valores de $g(x)$ resultan de multiplicar por 3 los de $f(x)$; mientras que los de $h(x)$ resultan de multiplicar por $\frac{1}{3}$ los de $f(x)$:

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	$\times 3$ −24	−10.14	−3	−0.39	0	0.39	3	10.14	24
$h(x)$	$\times \frac{1}{3}$ −2.67	−1.13	−0.33	−0.04	0	0.04	0.33	1.13	2.67

Las gráficas de ambas funciones se presentan a continuación:



Lección 4

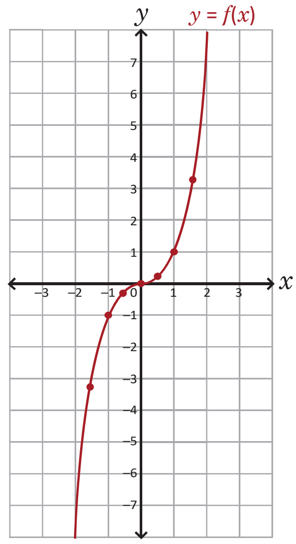
4.3 Función $f(x) = -ax^3$, $a > 0$

Problema inicial

Con la gráfica de $f(x) = x^3$, realiza lo siguiente:

1. Utiliza los valores de $f(x)$ para completar la tabla y grafica la función $g(x) = -x^3$:

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	-8	-3.38	-1	-0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$									



2. ¿Cuáles son las similitudes y diferencias entre las funciones f y g?

La función de la forma:
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$
donde a es un número real diferente de cero, se llama **función cúbica**; $f(x) = ax^3$ es un caso particular de la función cúbica.

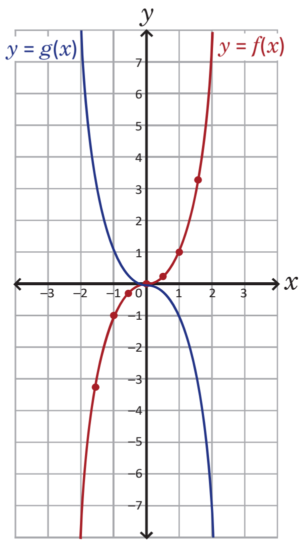
Solución

1. Los valores de $g(x)$ son el resultado de multiplicar por -1 los de $f(x)$; la tabla queda de la siguiente manera:

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	-8	-3.38	-1	-0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	8	3.38	1	0.13	0	-0.13	-1	-3.38	-8

$\times(-1)$

Las gráficas de f y g se muestran en la figura de la derecha.



2. Similitudes entre las funciones:
   a) el dominio y el rango de ambas es $\mathbb{R}$;
   b) las gráficas tienen la misma forma, y pasan por el origen.

   Diferencias entre las funciones:
   a) todos los puntos, excepto el origen, no coinciden;
   b) si $x < 0$ entonces $g(x)$ está sobre el eje x mientras que $f(x)$ está debajo del eje;
   c) si $x > 0$ entonces $g(x)$ está debajo del eje x mientras que $f(x)$ está sobre el eje.

En resumen

Si $f(x) = ax^3$ y $a > 0$ entonces la gráfica de la función $g(x) = -f(x) = -ax^3$ es una **reflexión con respecto al eje x** de la gráfica de la función f; tiene como dominio y rango el conjunto de los números reales y es decreciente en todo su dominio; su gráfica pasa por el origen, tiene la misma forma que la gráfica de f y resulta de multiplicar por -1 los valores de $f(x)$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$ grafica la función $g(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = -2x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$

c) $f(x) = 3x^3$, $g(x) = -3x^3$

Indicador de logro

4.3 Grafica funciones de la forma $g(x) = -ax^3$ para $a > 0$ usando la gráfica de $f(x) = x^3$.

Materiales

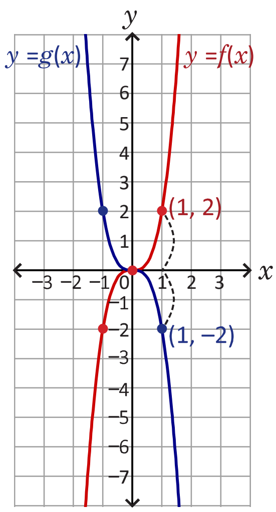
Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el numeral 2 del Problema inicial (también puede utilizarse para la solución del bloque de Problemas).

Secuencia

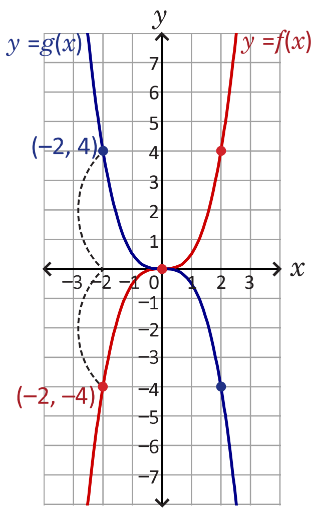
En esta clase se analizan las características de las funciones de la forma $g(x) = -ax^3$, para $a > 0$, a partir de $f(x) = x^3$. Observar que las funciones $f(x)$ del bloque de Problemas fueron graficadas en la clase 4.2, por lo que pueden ser utilizadas para resolver estos problemas.

Solución de problemas:

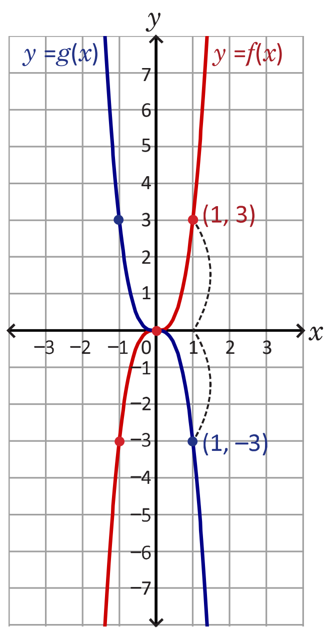
a) Sean $f(x) = 2x^3$ y $g(x) = -2x^3$, la gráfica de g es una reflexión con respecto al eje x de la gráfica de f:



b) Sean $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ y $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$, la gráfica de g es una reflexión con respecto al eje x de la gráfica de f:



c) Sean $f(x) = 3x^3$ y $g(x) = -3x^3$, la gráfica de g es una reflexión con respecto al eje x de la gráfica de f, tal como lo muestra la figura de la derecha:



4.4 Función $f(x) = \frac{k}{x}$ y sus desplazamientos

Problema inicial

Sean $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{2}{x}$:

1. Encuentra los valores de $f(x)$ y $g(x)$ correspondientes a cada valor de x en la siguiente tabla:

x	–8	–4	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$												
$g(x)$												

2. Determina otros valores para f y g que no estén en 1, luego ubica los puntos $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$ y traza las gráficas de ambas funciones.

3. Encuentra las ecuaciones de las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de f y g una unidad horizontalmente hacia la derecha y tres unidades verticalmente hacia arriba.

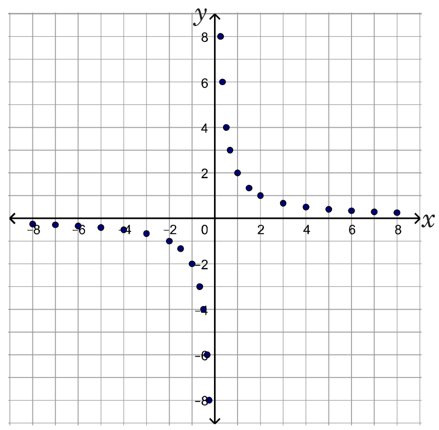
Solución

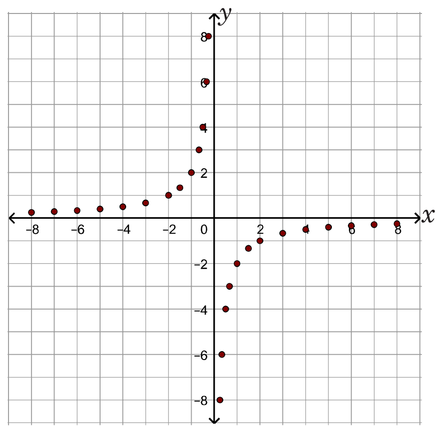
1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–8	–4	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	–0.25	–0.5	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1	0.5	0.25
$g(x)$	0.25	0.5	1	2	4	8	–8	–4	–2	–1	–0.5	–0.25

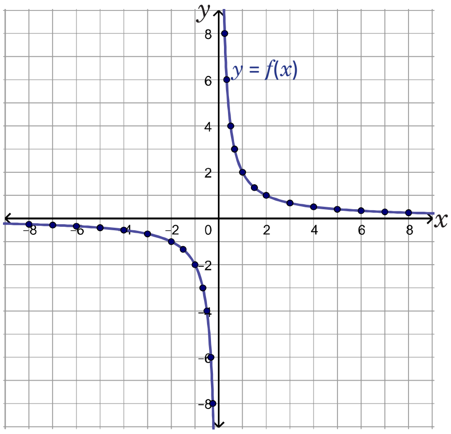
2. Se encuentran otros valores de f y g, por ejemplo para $x = -7, -6, -5, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, 5, 6, 7$ y se ubican los puntos $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$ en el plano cartesiano:

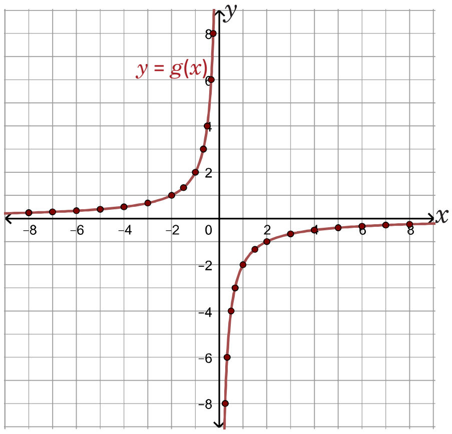
x	–7	–6	–5	–3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	3	5	6	7
$f(x)$	–0.29	–0.33	–0.4	–0.67	–1.33	–3	–6	6	3	1.33	0.67	0.4	0.33	0.29
$g(x)$	0.29	0.33	0.4	0.67	1.33	3	6	–6	–3	–1.33	–0.67	–0.4	–0.33	–0.29





Esto permite visualizar mejor la forma de cada gráfica, como se muestra a continuación:





3. Sea $h(x)$ la función cuya gráfica resulta de desplazar la de f una unidad horizontalmente hacia la derecha y tres unidades verticalmente hacia arriba. Si (a, b) es un punto sobre la gráfica de h entonces $(a - 1, b - 3)$ es un punto sobre la gráfica de f, es decir:

$$f(a - 1) = b - 3$$
$$b = f(a - 1) + 3$$

luego, la ecuación de $h(x)$ es $f(x - 1) + 3$, o sea, $h(x) = \frac{2}{x-1} + 3$.

De forma similar, si $l(x)$ es la función cuya gráfica resulta de desplazar la de g una unidad horizontalmente a la derecha y tres unidades verticalmente hacia arriba entonces:

$$l(x) = g(x - 1) + 3 = -\frac{2}{x-1} + 3.$$

Conclusión

Sea $f(x) = \frac{k}{x}$, con k un número real diferente de cero. A f se le llama **función de proporcionalidad inversa**; cuando el valor absoluto de x, o sea $|x|$, aumenta sin límites entonces la gráfica de f se acerca al eje x sin llegar a cortarlo; además, si $|x|$ se acerca a cero entonces la gráfica de $f(x)$ se acerca al eje y sin llegar a cortarlo.

En general, la gráfica de la función de proporcionalidad inversa tiene la misma forma que las del problema inicial según sea el caso ($k > 0$ o $k < 0$).

Lo anterior indica que la función de proporcionalidad inversa no posee intersecciones con los ejes de coordenadas; al **eje x** y al **eje y** se les llama **asíntota horizontal** y **asíntota vertical**, respectivamente, de la gráfica de $f(x) = \frac{k}{x}$.

Si $g(x)$ es la función cuya gráfica resulta de desplazar la de $f(x) = \frac{k}{x}$, p unidades horizontalmente y q unidades verticalmente entonces:

$$g(x) = \frac{k}{x-p} + q.$$

Si $p > 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, y si $p < 0$, entonces es hacia la izquierda. Por otra parte, si $q > 0$, el desplazamiento es hacia arriba, y si $q < 0$, entonces es hacia abajo.

Problemas

Usando las funciones f y g del Problema inicial, encuentra las ecuaciones de las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de f y g, p unidades horizontalmente y q unidades verticalmente:

a) $p = 2, q = 1$ b) $p = -2, q = 1$ c) $p = 2, q = -1$ d) $p = -2, q = -1$

Indicador de logro

4.4 Encuentra las ecuaciones de las funciones que resultan de desplazar horizontal y verticalmente la gráfica de la función $f(x) = \frac{k}{x}$.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el numeral 2 del Problema inicial.

Secuencia

Se repasa la gráfica de la función de proporcionalidad inversa estudiada en séptimo grado. Se agregan además sus características (dominio, rango y asíntotas) así como los desplazamientos horizontales o verticales.

Propósito

En esta clase solo se recuerda cómo graficar la función de proporcionalidad inversa; se encuentra también la ecuación de la función que resulta de desplazar horizontal o verticalmente la gráfica de la proporcionalidad inversa; la gráfica de las funciones de la forma $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$ se realizará hasta la clase 4.5. Se ha utilizado k, p y q para hacer una distinción entre la función cuadrática general. Sin embargo, con el fin de generalizar los desplazamientos puede sustituir dichas letras por a, h y k, respectivamente.

Solución de problemas:

a) Sean $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{2}{x}$; sean f_1 y g_1 las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de f y g (respectivamente) 2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente. Entonces:

$$f_1(x) = \frac{2}{x-2} + 1,$$

$$g_1(x) = -\frac{2}{x-2} + 1.$$

b) Similar al literal a), si $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{2}{x}$, y f_1 y g_1 son las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de f y g (respectivamente) –2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente entonces:

$$f_1(x) = \frac{2}{x-(-2)} + 1,$$
$$= \frac{2}{x+2} + 1.$$

$$g_1(x) = -\frac{2}{x-(-2)} + 1,$$
$$= -\frac{2}{x+2} + 1.$$

Recuerde que si $p > 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, y si $p < 0$ entonces es hacia la izquierda. Por otra parte, si $q > 0$, el desplazamiento es hacia arriba y si $q < 0$ entonces es hacia abajo.

c) Si f_1 y g_1 son las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{2}{x}$ (respectivamente), 2 unidades horizontalmente y –1 unidad verticalmente entonces:

$$f_1(x) = \frac{2}{x-2} + (-1) = \frac{2}{x-2} - 1,$$

$$g_1(x) = -\frac{2}{x-2} + (-1) = -\frac{2}{x-2} - 1.$$

d) Si f_1 y g_1 son las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{2}{x}$ (respectivamente), –2 unidades horizontalmente y –1 unidad verticalmente entonces:

$$f_1(x) = \frac{2}{x-(-2)} + (-1) = \frac{2}{x+2} - 1,$$

$$g_1(x) = -\frac{2}{x-(-2)} + (-1) = -\frac{2}{x+2} - 1.$$

4.5 Gráfica de la función $h(x) = \frac{k}{x-p} + q$*

Problema inicial

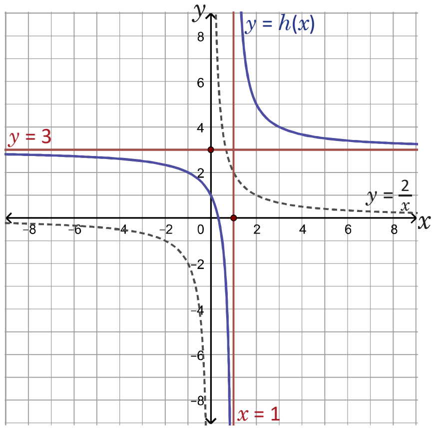
Sea $h(x) = \frac{2}{x-1} + 3$

1. Encuentra las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de h.
2. Traza las asíntotas del literal anterior, y luego la gráfica de h.
3. Encuentra el dominio y el rango de la función h.

Solución

1. De la clase anterior se sabe que la gráfica de $h(x)$ corresponde a un desplazamiento de una unidad horizontalmente y tres unidades verticalmente de la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$. Las asíntotas se trasladan de la misma manera, es decir, si $y = 0$ (eje x) y $x = 0$ (eje y) son las asíntotas de f entonces $y = 3$ y $x = 1$ son las asíntotas de la gráfica de h.

2. La gráfica de $y = 3$ es una línea recta horizontal que pasa por (0, 3); mientras que $x = 1$ es una línea recta vertical que pasa por (1, 0). Luego de trazar las asíntotas se traza la gráfica de h, cuya forma es similar a la de $f(x) = \frac{2}{x}$:



3. En la ecuación de la función h, el denominador no puede ser igual a cero; esto se cumple si x es diferente de 1 y, por tanto, el dominio de h es $]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$. De la gráfica de $h(x)$ se deduce que su rango es $]-\infty, 3[\cup]3, \infty[$.

Conclusión

Sean k, p y q números reales, con k diferente de cero. Las asíntotas horizontal y vertical de la función $h(x) = \frac{k}{x-p} + q$ son $y = q$ y $x = p$, respectivamente. El dominio de la función h es $D_h =]-\infty, p[\cup]p, \infty[$, y su rango es $R_h =]-\infty, q[\cup]q, \infty[$.

Al momento de trazar la gráfica de h se recomienda primero trazar las asíntotas y luego la gráfica.

Problemas

Traza las asíntotas y la gráfica de la función $h(x)$ en cada caso; luego encuentra su dominio y su rango:

a) $h(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ b) $h(x) = \frac{1}{x+2} + 1$ c) $h(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ d) $h(x) = -\frac{1}{x-2} + 1$

Unidad 4

Indicador de logro

4.5 Encuentra las ecuaciones y grafica las asíntotas de la función $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$ para trazar la gráfica de f.

Materiales

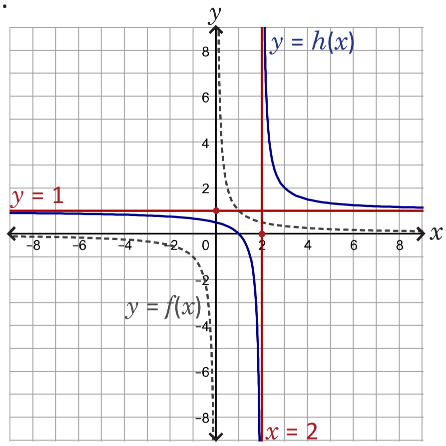
Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el Problema inicial (también puede utilizarse para la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

En esta clase se traza la gráfica de funciones de la forma $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$. Si los estudiantes tienen muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente debe desarrollar e ir explicando paso a paso la Solución.

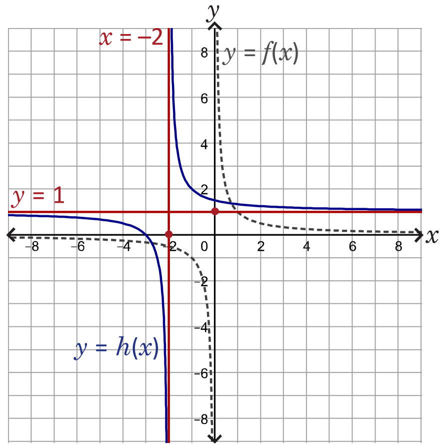
Solución de problemas:

a) Las asíntotas de $h(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ son $y = 1$ y $x = 2$, y su gráfica resulta de desplazar la de $f(x) = \frac{1}{x}$, 2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente:



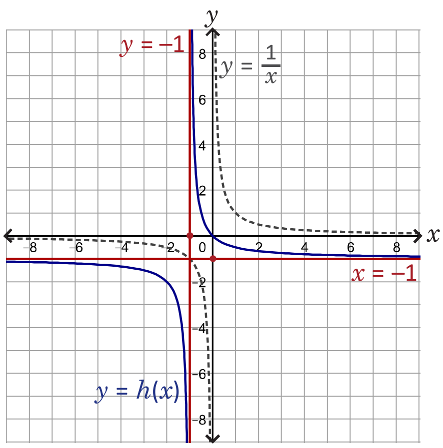
$D_h =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$, $R_h =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$.

b) Las asíntotas de $h(x) = \frac{1}{x+2} + 1$ son $y = 1$ y $x = -2$, y su gráfica resulta de desplazar la de $f(x) = \frac{1}{x}$, -2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente:



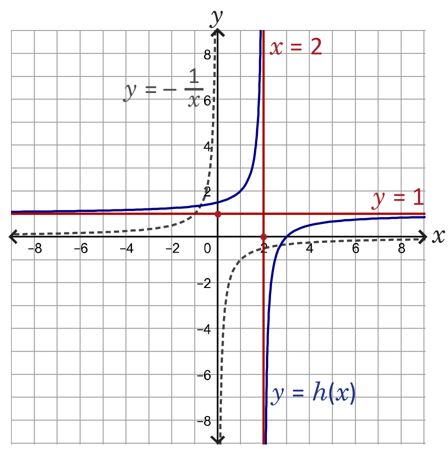
$D_h =]-\infty, -2[\cup]-2, \infty[$, $R_h =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$.

c) Las asíntotas de $h(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ son $y = -1$ y $x = -1$:



$D_h =]-\infty, -1[\cup]-1, \infty[$, $R_h =]-\infty, -1[\cup]-1, \infty[$.

d) Las asíntotas de $h(x) = -\frac{1}{x-2} + 1$ son $y = 1$ y $x = 2$:



$D_h =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$, $R_h =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$.

Lección 4

4.6 Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Problema inicial

Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$:

1. Efectúa la división $(x + 1) \div (x - 2)$; escribe $\dfrac{x+1}{x-2}$ en la forma $\dfrac{k}{x-p} + q$.
2. Traza la gráfica de $f(x)$.

Solución

1. Utilizando la división sintética se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 1 \\ 2 & \downarrow & 2 \\ \hline & 1 & 3 \end{array}$$

En la división sintética se colocan los coeficientes de los polinomios del dividendo y divisor en la siguiente forma:

$$\begin{array}{c|l|l} & \text{Dividendo} & \\ a & & \\ \hline & \text{Cociente} & \text{Residuo} \end{array}$$

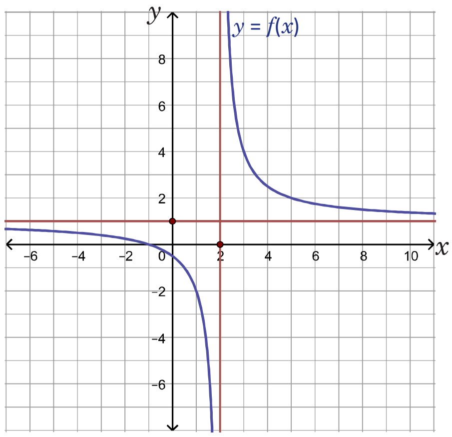
Luego, $x + 1 = 1(x - 2) + 3$. Se dividen ambos miembros de esta ecuación por $x - 2$:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{1\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1.$$

Por lo tanto, $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3}{x-2} + 1$.

2. Del numeral anterior, $f(x) = \dfrac{3}{x-2} + 1$; entonces la gráfica de f se obtiene desplazando dos unidades horizontalmente y una unidad verticalmente la gráfica de $y = \dfrac{3}{x}$.

Las asíntotas de f son $y = 1$ y $x = 2$.



Conclusión

Sean a, b y d números reales no todos iguales a cero y $c \neq 0$; se le llama **función racional** a la función de la forma $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. La ecuación de f puede llevarse a la forma $\dfrac{k}{x-p} + q$ efectuando la división del polinomio del numerador entre el polinomio del denominador.

En general, una función racional es de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios cualesquiera, no solamente polinomios lineales.

Problemas

Para cada caso, escribe la ecuación de la función f en la forma $\dfrac{k}{x-p} + q$, luego traza las asíntotas y la gráfica de la función:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{-x+3}{x-2}$

Indicador de logro

4.6 Escribe la función $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ en la forma $f(x) = \frac{k}{x - p} + q$ para encontrar sus asíntotas y trazar su gráfica.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el Problema inicial (también puede utilizarse para la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

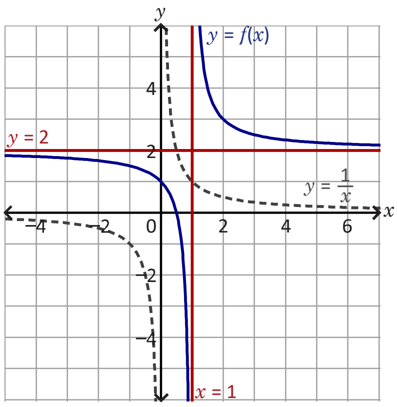
Se transforma la ecuación de una función racional cuyo numerador y denominador es un polinomio lineal en la forma $f(x) = \frac{k}{x - p} + q$, para utilizar lo visto en la clase 4.5 y trazar la gráfica de la misma.

Solución de problemas:

a) Al efectuar la división $(2x - 1) \div (x - 1)$ se obtiene: $2x - 1 = 2(x - 1) + 1$.
Luego:

$$\frac{2x-1}{x-1} = \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 2$$

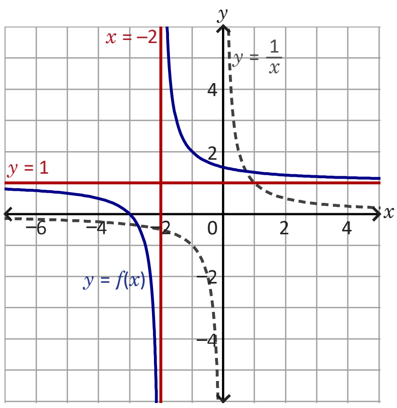
Así, $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$, sus asíntotas son $y = 2$ y $x = 1$, y su gráfica resulta de desplazar la de $y = \frac{1}{x}$, 1 unidad horizontalmente y 2 unidades verticalmente, tal como lo muestra la figura de la derecha.



b) Al efectuar la división $(x + 3) \div (x + 2)$ se obtiene: $x + 3 = (x + 2) + 1$.
Luego:

$$\frac{x+3}{x+2} = \cancel{\frac{x+2}{x+2}} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+2} + 1$$

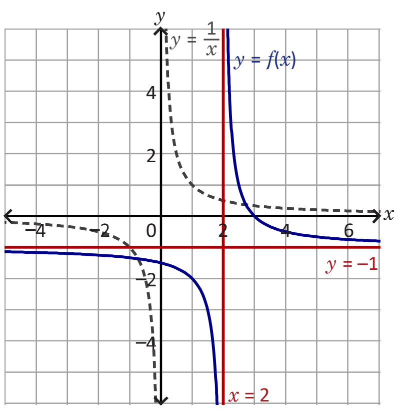
$f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$; sus asíntotas son $y = 1$ y $x = -2$, y su gráfica resulta de desplazar la de $y = \frac{1}{x}$, -2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente.



c) Al efectuar la división $(-x + 3) \div (x - 2)$ se obtiene: $-x + 3 = -(x - 2) + 1$.
Luego:

$$\frac{-x+3}{x-2} = \frac{-(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1$$

$f(x) = \frac{1}{x-2} - 1$; sus asíntotas son $y = -1$ y $x = 2$, y su gráfica resulta de desplazar la de $y = \frac{1}{x}$, 2 unidades horizontalmente y -1 unidad verticalmente.



4.7 Función irracional $f(x) = a\sqrt{x}$

Problema inicial

Sea $y = \sqrt{x}$:

1. Completa la siguiente tabla (aproxima hasta las centésimas):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0									

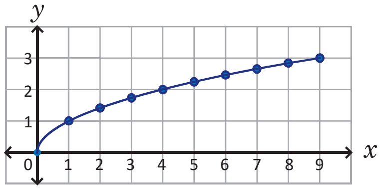
2. Coloca los puntos (x, y) en el plano cartesiano y únelos con una línea, ¿es similar a alguna gráfica de las funciones estudiadas anteriormente?
3. ¿Para cuáles valores de x se encuentra definido el valor de y?

Solución

1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3

2. La línea que se forma al unir los puntos aparece en la figura de la derecha. La línea se asemeja a la mitad de una parábola, solo que esta vez se abre hacia la derecha.



3. El valor de y se encuentra definido para todo x positivo o igual a cero, es decir, $x \in [0, \infty[$.

Conclusión

La ecuación $y = \sqrt{x}$ es la ecuación de una función de $[0, \infty[$ a $\mathbb{R}$, cuya gráfica pasa por el origen y es similar a la mitad de una parábola que se abre hacia la derecha. En general, $f(x) = a\sqrt{x}$, con $a \neq 0$, es una función cuyo dominio es $[0, \infty[$ y:

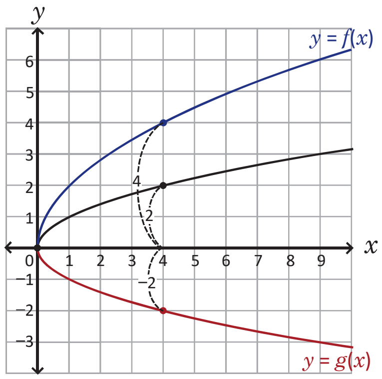
1. Si $a > 0$ entonces el rango de f es $[0, \infty[$ y su gráfica queda arriba del eje x.
2. Si $a < 0$ entonces el rango de f es $]-\infty, 0]$ y su gráfica queda debajo del eje x.

Ejemplo

Grafica las funciones $f(x) = 2\sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x}$, encuentra el dominio y el rango en cada una.

La gráfica de f queda arriba del eje x y resulta de multiplicar por 2 los valores de $\sqrt{x}$; mientras que la gráfica de g queda debajo del eje x y resulta de multiplicar por –1 los valores de $\sqrt{x}$.

Ambas gráficas se muestran en la figura de la derecha, su dominio es $[0, \infty[$ y los rangos son $R_f = [0, \infty[$, $R_g =]-\infty, 0]$.



Problemas

Para cada caso, grafica la función f, encuentra el dominio y el rango:

a) $f(x) = 3\sqrt{x}$ b) $f(x) = -2\sqrt{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

Indicador de logro

4.7 Grafica y encuentra el dominio y el rango de funciones irracionales de la forma $f(x) = a\sqrt{x}$.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el Problema inicial (también puede utilizarse para la resolución del bloque de Problemas).

Secuencia

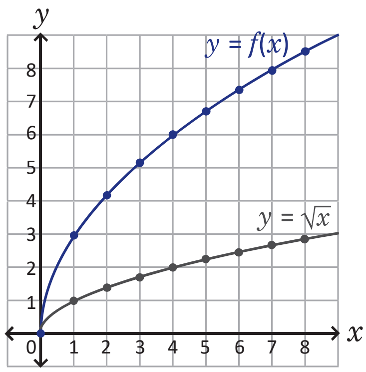
Utilizando valores particulares para x, se grafica la función $f(x) = \sqrt{x}$. A partir de ella se generalizan las características de la función $f(x) = a\sqrt{x}$: su gráfica, dominio y rango.

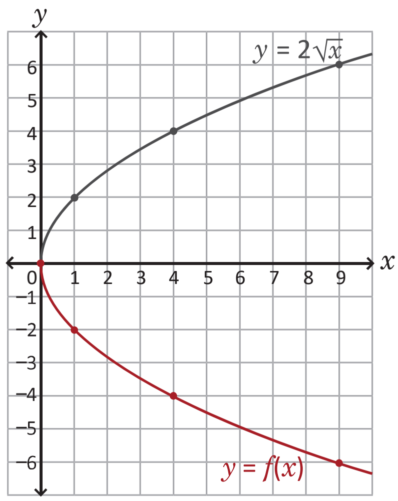
Solución de problemas:

a) En la función $f(x) = 3\sqrt{x}$, el valor de $a = 3$ es positivo, por tanto su gráfica queda arriba del eje x. Usando la tabla del Problema inicial, se multiplica por 3 los valores de $y = \sqrt{x}$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3
$f(x)$	0	3	4.23	5.19	6	6.72	7.35	7.95	8.49	9

Luego, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

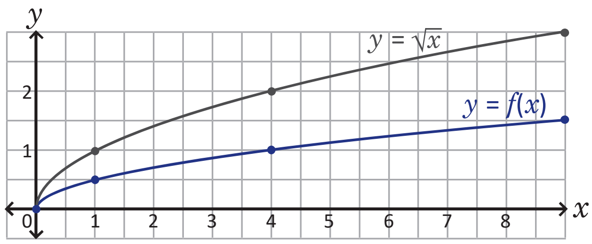




b) En la función $f(x) = -2\sqrt{x}$, el valor de $a = -2$ es negativo, por tanto, su gráfica queda debajo del eje x. En el Ejemplo de la clase se trazó la gráfica de $f(x) = 2\sqrt{x}$, basta con reflejarla con respecto al eje x para obtener la de $f(x) = -2\sqrt{x}$. Luego, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f =]-\infty, 0]$.

c) En la función $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, el valor de $a = \frac{1}{2}$ es positivo, por tanto su gráfica queda arriba del eje x. Usando la tabla del Problema inicial, se multiplica por $\frac{1}{2}$ los valores de $y = \sqrt{x}$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3
$f(x)$	0	0.5	0.71	0.86	1	1.12	1.23	1.33	1.42	1.5



Luego, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

Lección 4

4.8 Función irracional $f(x) = \sqrt{ax}$

Problema inicial

Sea $f(x) = \sqrt{-x}$:

1. ¿Cuál es el dominio de la función f?
2. Calcula los valores de $f(x)$ en la siguiente tabla, luego traza la gráfica de la función (aproxima hasta las centésimas):

x	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
$f(x)$										

3. ¿Cuál es el rango de la función?

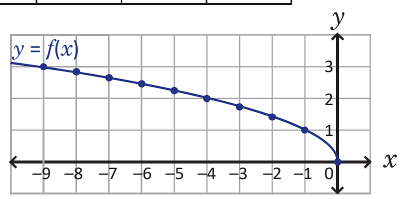
Solución

1. Los números dentro de la raíz deben ser mayores o iguales a cero; entonces el dominio de la función deben ser los números reales para los cuales $-x \geq 0$, es decir, $x \leq 0$. Por lo tanto $D_f =]-\infty, 0]$.

2. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
$f(x)$	3	2.83	2.65	2.45	2.24	2	1.73	1.41	1	0

La gráfica de f se muestra en la figura de la derecha:



3. El valor de $f(x) = \sqrt{-x}$ siempre será un número positivo o igual a cero, por lo tanto $R_f = [0, \infty[$.

En resumen

Las funciones de la forma $f(x) = a\sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{ax}$, donde a es un número real diferente de cero, son casos particulares de las llamadas **funciones irracionales**. Las gráficas de f y g pasan por el origen y se asemejan a la mitad de una parábola que se abre a lo largo del eje x. En el caso de la función g, su rango son los números reales positivos y el cero, o sea $[0, \infty[$, y:

1. Si $a > 0$ entonces el dominio de f es $[0, \infty[$ y su gráfica queda a la derecha del eje y.
2. Si $a < 0$ entonces el dominio de f es $]-\infty, 0]$ y su gráfica queda a la izquierda del eje y.

Ejemplo

Grafica la función $f(x) = \sqrt{2x}$, encuentra su dominio y su rango.

La gráfica de f queda a la derecha del eje y como se muestra en la figura de la derecha; $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

La gráfica de $f(x) = \sqrt{2x}$ no es igual a la de $g(x) = 2\sqrt{x}$, sino a la de $h(x) = \sqrt{2}\sqrt{x}$.

Problemas

Para cada caso, grafica la función f, encuentra el dominio y el rango:

a) $f(x) = \sqrt{3x}$ b) $f(x) = \sqrt{-2x}$ c) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$

Indicador de logro

4.8 Grafica y encuentra el dominio y el rango de funciones irracionales de la forma $f(x) = \sqrt{ax}$.

Materiales

Plano cartesiano dibujado en un pliego de papel bond para colocarlo en la pizarra y resolver el Problema inicial (también puede utilizarse para la resolución del bloque de Problemas).

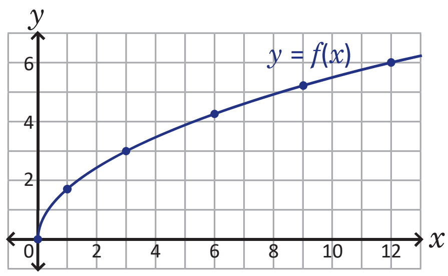
Secuencia

Utilizando valores particulares para x, se grafica la función $f(x) = \sqrt{-x}$. Luego, se generalizan las características de la función $f(x) = \sqrt{ax}$: su gráfica, dominio y rango.

Solución de problemas:

a) La forma de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{3x}$ se asemeja a la mitad de una parábola; como $a = 3$ es positivo entonces esta queda sobre el eje x positivo. Pueden calcularse algunos valores particulares de $f(x)$ para trazar la gráfica de la función:

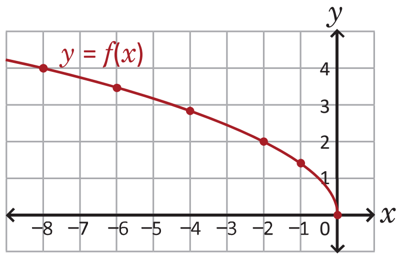
x	0	1	3	6	9	12
$f(x)$	0	1.73	3	4.24	5.20	6



Así, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

b) Similar al literal anterior, la forma de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{-2x}$ se asemeja a la mitad de una parábola, esta vez queda sobre el eje x negativo pues $a < 0$. Se calculan algunos valores particulares de $f(x)$ para trazar la gráfica de la función:

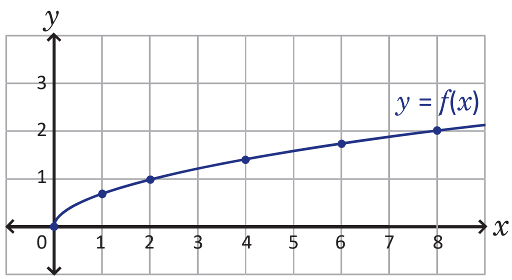
x	0	–1	–2	–4	–6	–8
$f(x)$	0	1.41	2	2.83	3.46	4



Luego, $D_f =]-\infty, 0]$ y $R_f = [0, \infty[$.

c) Como $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$, su gráfica queda sobre el eje x positivo. Calculando algunos valores particulares de $f(x)$:

x	0	1	2	4	6	8
$f(x)$	0	0.71	1	1.41	1.73	2

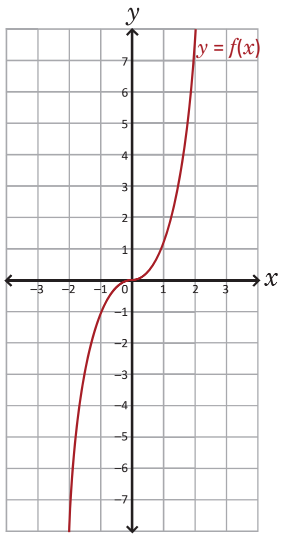


Luego, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

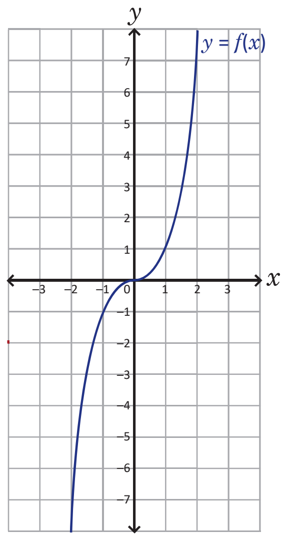
4.9 Practica lo aprendido

1. Utilizando la gráfica de $f(x) = x^3$, grafica la función g y encuentra su dominio y su rango:

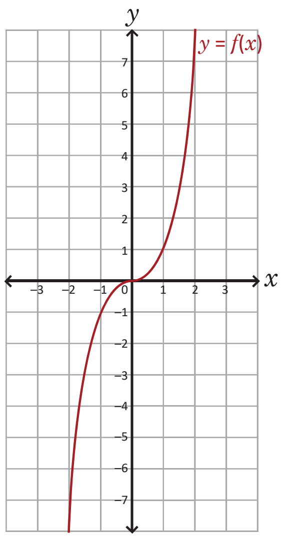
a) $g(x) = 4x^3$



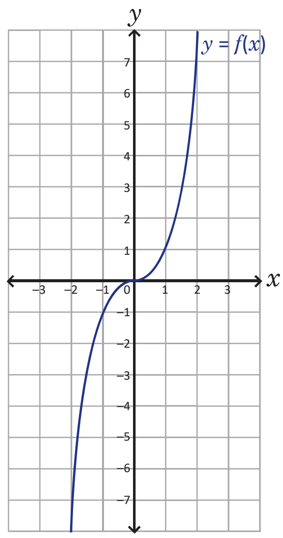
b) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$



c) $g(x) = -4x^3$



d) $g(x) = -\frac{1}{4}x^3$



2. Para cada caso, grafica la función y encuentra su dominio y su rango.

a) $f(x) = \frac{-2x}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

3. Para cada caso, grafica la función y encuentra su dominio y su rango.

a) $f(x) = -3\sqrt{x}$

b) $f(x) = 4\sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt{-3x}$

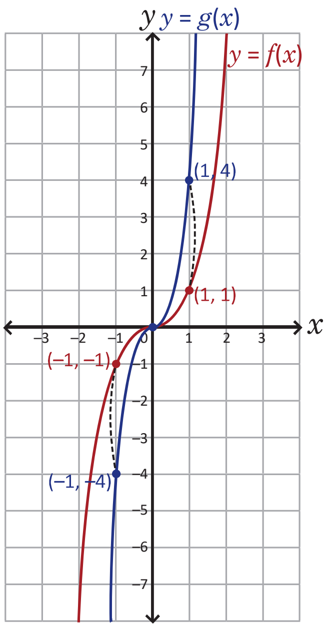
d) $f(x) = \sqrt{4x}$

Indicador de logro

4.9 Resuelve problemas correspondientes a funciones cúbicas, racionales o irracionales.

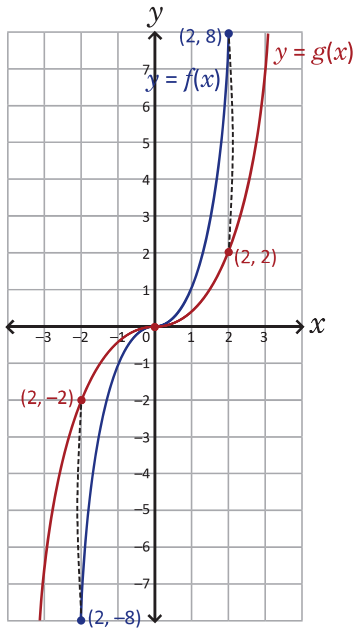
Solución de problemas:

1a) La gráfica de $g(x) = 4x^3$ queda como sigue:



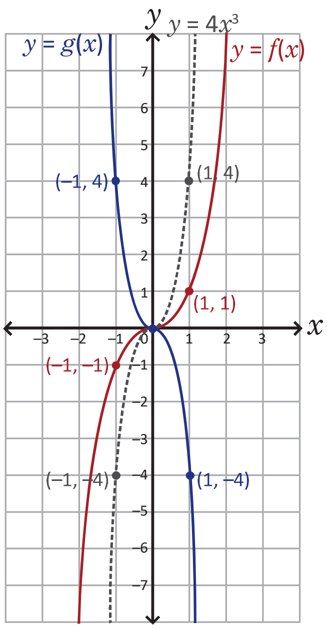
$D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

1b) La gráfica de $g(x) = \frac{1}{4}x^3$ queda como sigue:



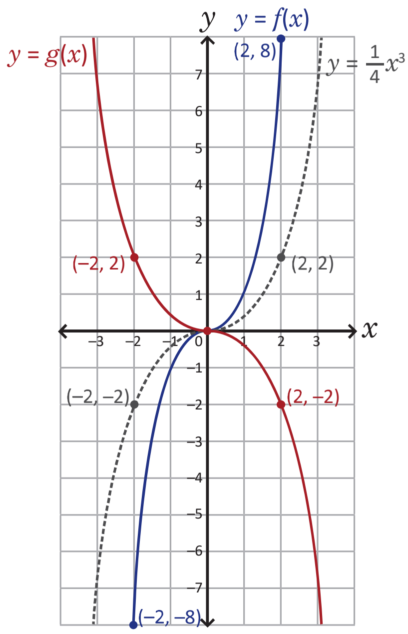
$D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

1c) Puede reflejarse la gráfica de $y = 4x^3$ con respecto al eje x para obtener la de $g(x) = -4x^3$:



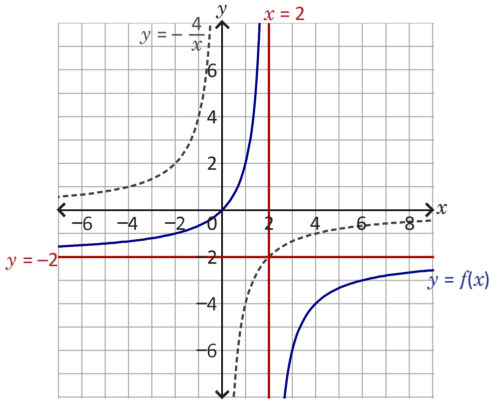
$D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

1d) Puede reflejarse la gráfica de $y = \frac{1}{4}x^3$ con respecto al eje x para obtener la de $g(x) = -\frac{1}{4}x^3$:



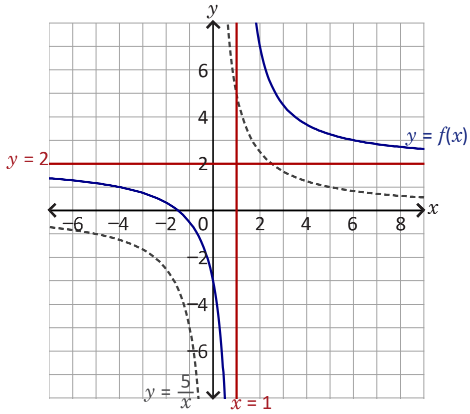
$D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = \mathbb{R}$.

2a) La ecuación de la función puede reescribirse como $f(x) = -\frac{4}{x-2} - 2$; sus asíntotas son $y = -2$ y $x = 2$, y su gráfica se obtiene desplazándola de $y = -\frac{4}{x}$, 2 unidades horizontalmente y −2 unidades verticalmente:



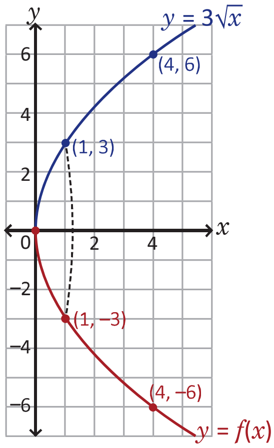
$D_f =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$, $R_f =]-\infty, -2[\cup]-2, \infty[$.

2b) La ecuación de la función puede reescribirse como $f(x) = \frac{5}{x-1} + 2$; sus asíntotas son $y = 2$ y $x = 1$, y su gráfica se obtiene desplazando la de $y = \frac{5}{x}$, 1 unidad horizontalmente y 2 unidades verticalmente:

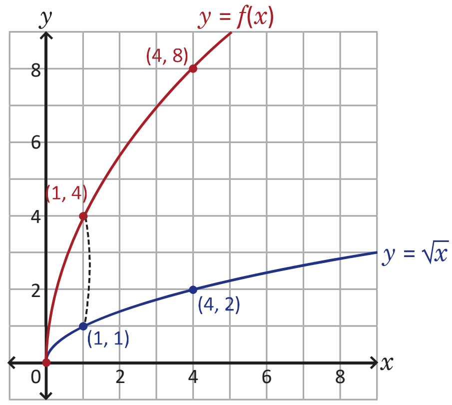


$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$, $R_f =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$.

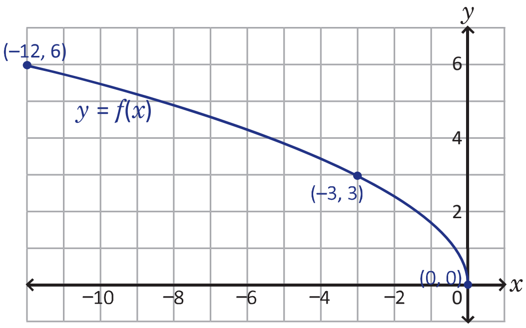
3a) Para $f(x) = -3\sqrt{x}$, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f =]-\infty, 0]$. La gráfica de $y = 3\sqrt{x}$ se trazó en la clase 4.7, entonces la de $f(x) = -3\sqrt{x}$ se obtiene reflejando con respecto al eje x la de $y = 3\sqrt{x}$:



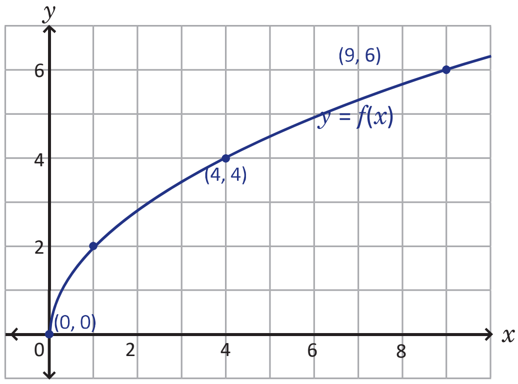
3b) Para $f(x) = 4\sqrt{x}$, $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$. La gráfica de f queda arriba del eje x y resulta de multiplicar por 4 los valores de $\sqrt{x}$:



3c) La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{-3x}$ se queda sobre el eje x negativo; $D_f = [0, \infty[$ y $R_f =]-\infty, 0]$.



3d) La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{4x}$ se queda sobre el eje x positivo; $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.



4.10 Problemas de la unidad

1. Para cada caso, traza la gráfica de f, encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 1$

c) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$

2. Encuentra la ecuación de la función cuadrática g si la gráfica pasa por los puntos $(-12, 0)$, $(-9, 3)$ y $(-7, -5)$.

3. El sector de sol general del Estadio Nacional Jorge "Mágico" González tiene capacidad para 10 000 aficionados. En un determinado partido el precio del boleto para ese sector fue de $10.00 y en promedio asistieron 3 000 aficionados. Un estudio de mercado indicó que por cada dólar que se hubiera bajado al precio del boleto, el promedio de asistencia hubiese aumentado en 1 000. ¿Cuál debió haber sido el precio para obtener la máxima ganancia en la venta de boletos para el sector de sol general?

4. Resuelve las siguientes desigualdades:

a) $12x^2 - 5x - 2 \leq 0$

b) $4x > -4x^2 + 15$

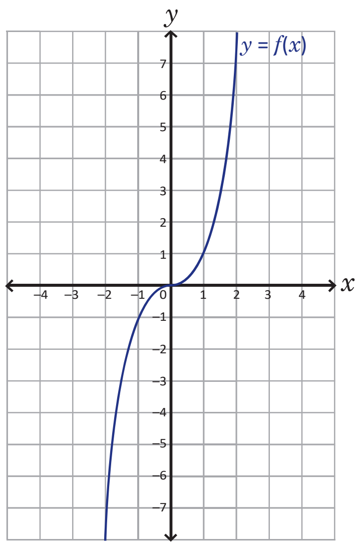
c) $2x^2 - x \leq 1$

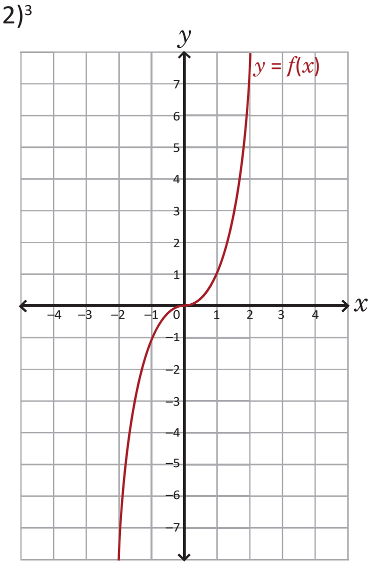
d) $x^2 - 4x - 1 \geq 0$

5. Utilizando la gráfica de $f(x) = x^3$ traza la gráfica de la función g y encuentra el dominio y el rango:

a) $g(x) = x^3 + 1$

b) $g(x) = (x - 2)^3$





6. Para cada caso, grafica la función f y encuentra el dominio y el rango:

a) $f(x) = -\sqrt{-x}$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

c) $f(x) = \sqrt{-x} - 3$

d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

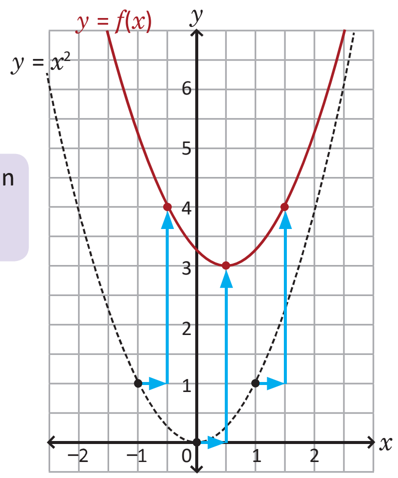
Indicador de logro

4.10 Resuelve problemas correspondientes a funciones reales.

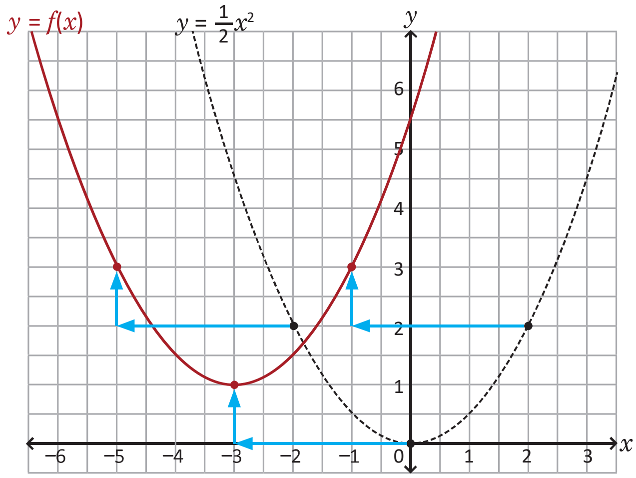
Solución de problemas:

1a) La gráfica de $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$ se obtiene desplazando la de $y = x^2$, $\frac{1}{2}$ unidades horizontalmente y 3 unidades verticalmente. Su vértice está en el punto $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = [3, \infty[$.

La escala utiliza da en la cuadrícula es de 0.5 cm × 0.5 cm.

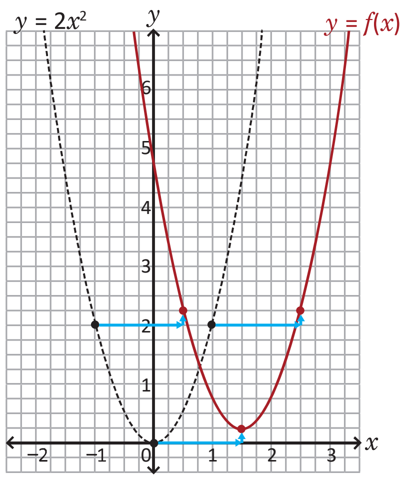


1b) La gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 1$ se obtiene desplazando la de $y = \frac{1}{2}x^2$, –3 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente. Su vértice está en el punto (–3, 1) , $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = [1, \infty[$.

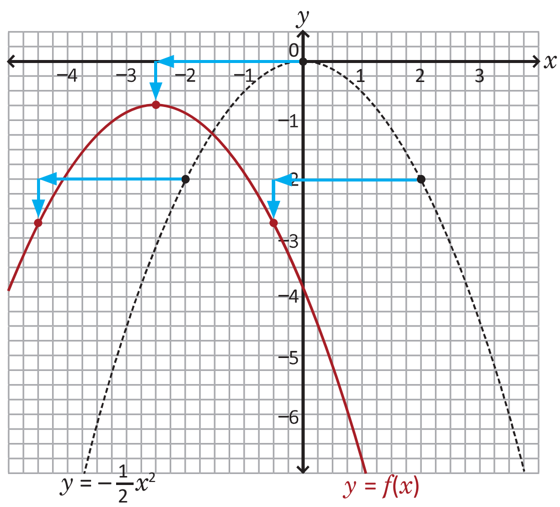


1c) La gráfica de $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ se obtiene desplazando la de $y = 2x^2$, $\frac{3}{2}$ unidades horizontalmente y $\frac{1}{4}$ unidades verticalmente. Su vértice está en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$.

La escala utilizada en la cuadrícula es de 0.25 cm × 0.25 cm.



1d) La gráfica de $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$ se obtiene desplazando la de $y = -\frac{1}{2}x^2$, $-\frac{5}{2}$ unidades horizontalmente y $-\frac{3}{4}$ unidades verticalmente. Su vértice es $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \left]-\infty, -\frac{3}{4}\right]$.



2. Sea $g(x) = ax^2 + bx + c$; entonces $g(-12) = 0$, $g(-9) = 3$ y $g(-7) = -5$. Se sustituyen estos valores en la ecuación de la función y se utiliza el método de sustitución, es decir, se despeja una de las variables en una ecuación para sustituirla en la siguiente:

$$g(-12) = 0 \Rightarrow a(-12)^2 + b(-12) + c = 0 \Rightarrow 144a - 12b + c = 0 \Rightarrow c = -144a + 12b$$

$$g(-9) = 3 \Rightarrow a(-9)^2 + b(-9) + c = 3 \Rightarrow 81a - 9b - 144a + 12b = 3 \Rightarrow b = 21a + 1$$

$$g(-7) = -5 \Rightarrow a(-7)^2 + b(-7) + c = -5 \Rightarrow 49a - 7(21a + 1) - 144a + 12(21a + 1) = -5 \Rightarrow a = -1$$

Luego, $a = -1$, $b = -20$ y $c = -96$ (los valores de b y c se encuentran sustituyendo en las ecuaciones anteriores). Por lo tanto, $g(x) = -x^2 - 20x - 96$.

3. Sea x el precio que debe tener el boleto para el sector de sol general del estadio; si inicialmente costaba \$10.00 entonces la cantidad que bajó con respecto al precio original es $10 - x$ dólares. Según el estudio de mercado, por cada dólar que se reduce al precio original del boleto el promedio de asistencia aumenta 1 000, es decir, se tendrían $1\,000(10 - x)$ aficionados más, a parte de los 3 000 que asistieron. Luego, la cantidad de aficionados hubiese sido $3\,000 + 1\,000(10 - x)$, o sea, $-1\,000x + 13\,000$ personas. Sea f la función que calcula la ganancia (en dólares) de la venta de boletos para el sector de sol general; para obtenerla debe multiplicarse la cantidad de personas que asistieron al partido por el precio del boleto, es decir:

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1\,000x + 13\,000)x \\ &= -1\,000x^2 + 13\,000x \end{aligned}$$

Esta función tiene un valor máximo en el vértice, se completa cuadrados para encontrarlo:

$$\begin{aligned} f(x) &= -1\,000[x^2 - 13x + (6.5)^2 - (6.5)^2] \\ &= -1\,000[x^2 - 13x + (6.5)^2] + 1\,000\,(6.5)^2 \\ &= -1\,000(x - 6.5)^2 + 42\,250 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el precio del boleto para el sector sol general debió ser de \$6.50 para obtener la máxima ganancia.

4a) $12x^2 - 5x - 2 = (4x + 1)(3x - 2)$; de esto se obtienen las raíces $x = -\frac{1}{4}$ y $x = \frac{2}{3}$. Usando el cuadro de variación resulta: $12x^2 - 5x - 2 \leq 0$ se cumple para $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$.

4b) La desigualdad es equivalente a $4x^2 + 4x - 15 > 0$; además, $4x^2 + 4x - 15 = (2x + 5)(2x - 3)$, obteniéndose las raíces $x = -\frac{5}{2}$ y $x = \frac{3}{2}$. Usando el cuadro de variación resulta: $4x > -4x^2 + 15$ se cumple para $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$.

4c) La desigualdad es equivalente a $2x^2 - x - 1 \leq 0$; además, $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$, obteniéndose las raíces $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$. Usando el cuadro de variación:

	$-\infty$ a $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ a 1	1	1 a ∞
$2x + 1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - 1$	$-$		$-$	0	$+$
$(2x + 1)(x - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Luego, $2x^2 - x \leq 1$ se cumple si $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

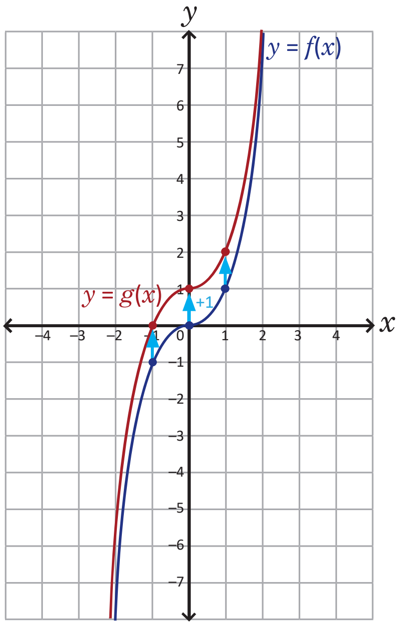
4d) $x^2 - 4x - 1 = [x - (2 - \sqrt{5})][x - (2 + \sqrt{5})]$, obteniéndose las raíces $x = 2 - \sqrt{5}$ y $x = 2 + \sqrt{5}$. Usando el cuadro de variación:

	$-\infty$ a $2-\sqrt{5}$	$2-\sqrt{5}$	$2-\sqrt{5}$ a $2+\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$ a ∞
$x - (2 - \sqrt{5})$	$-$	0	$+$		$+$
$x - (2 + \sqrt{5})$	$-$		$-$	0	$+$
$[x - (2 - \sqrt{5})][x - (2 + \sqrt{5})]$	$+$	0	$-$	0	$+$

Por lo tanto, la desigualdad $x^2 - 4x - 1 \geq 0$ se cumple si $x \in \left]-\infty, 2 - \sqrt{5}\right] \cup \left[2 + \sqrt{5}, \infty\right[$.

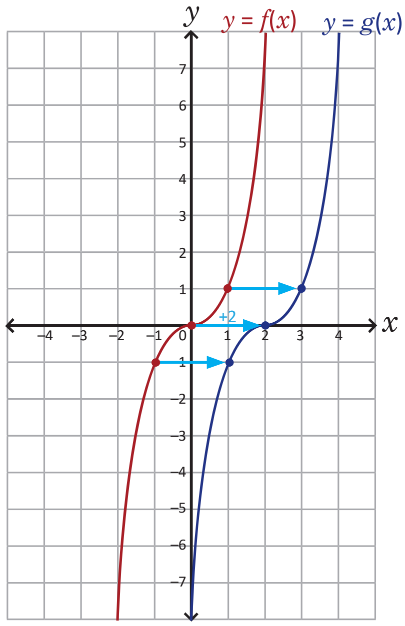
5a) Con base en la conclusión de la clase 2.1, $g(x) = f(x) + 1 = x^3 + 1$ y por tanto, la gráfica de $f(x) = x^3$ se desplaza verticalmente una unidad para obtener la gráfica de g:

$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = \mathbb{R}$

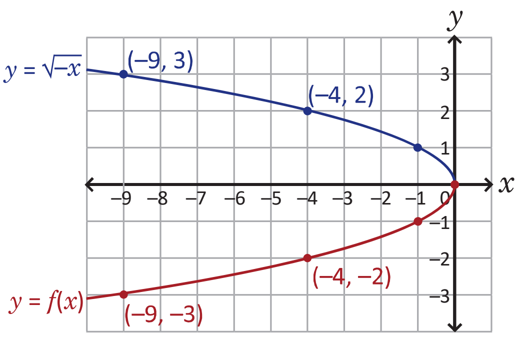


5b) Similar a lo desarrollado en la clase 2.2, la gráfica de $g(x) = f(x - 2) = (x - 2)^3$ se obtiene desplazando horizontalmente la de $f(x) = x^3$, 2 unidades horizontalmente:

$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = \mathbb{R}$

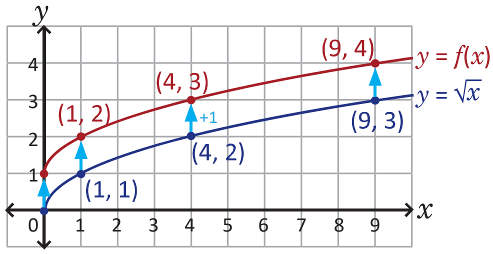


6a) La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ se trazó en la clase 4.8; para graficar $f(x) = -\sqrt{-x}$ deben multiplicarse por –1 los valores de $y = \sqrt{-x}$:



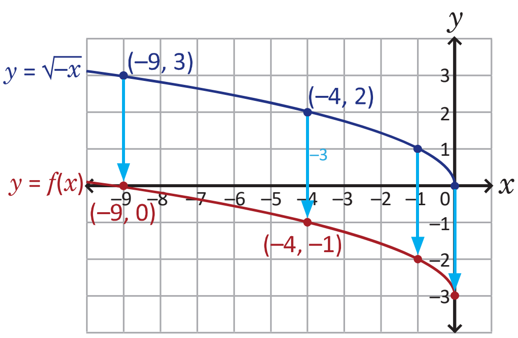
$D_f =]-\infty, 0]$ y $R_f =]-\infty, 0]$.

6b) Como en 5a), la gráfica de $f(x) = \sqrt{x} + 1$ se obtiene desplazando la de $y = \sqrt{x}$, una unidad verticalmente (la gráfica de $y = \sqrt{x}$ se trazó en la clase 4.7):



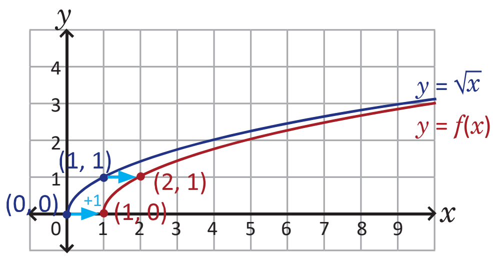
$D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [1, \infty[$.

6c) La gráfica de $f(x) = \sqrt{-x} - 3$ se obtiene desplazando –3 unidades verticalmente la gráfica de $y = \sqrt{-x}$:



$D_f =]-\infty, 0]$ y $R_f = [-3, \infty[$.

6d) La gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ se obtiene desplazando 1 unidad horizontalmente la gráfica de $y = \sqrt{x}$:



$D_f = [1, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

5.1 Práctica en GeoGebra: generalidades

GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos; en él pueden trabajarse contenidos relacionados con geometría, álgebra, estadística y cálculo, pues cuenta con numerosas herramientas fáciles de usar.

En esta clase explorarás la interfaz para conocer sobre sus generalidades y el uso de algunos comandos. Busca en tu computadora el ícono de GeoGebra (es el que aparece en la esquina superior derecha de esta página); si la PC no cuenta con el software puedes descargarlo de manera gratuita en el siguiente enlace:

GeoGebra https://goo.gl/jRmmdc

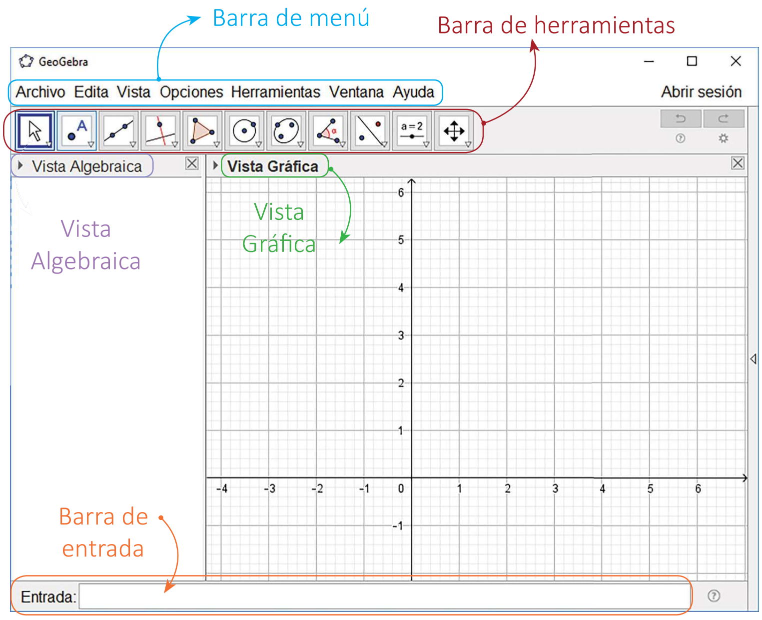
Asegúrate de descargar (instalar) "GeoGebra Clásico 5". También puedes descargar la app para el celular o trabajar "GeoGebra en línea" en los siguientes enlaces:

App → https://goo.gl/wf5mHx **En línea** → https://goo.gl/ThXbeB

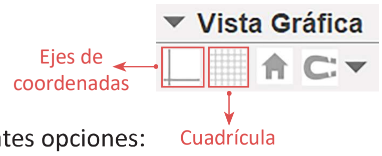
Práctica

Realiza lo siguiente:

1. Abre un nuevo archivo de GeoGebra dando clic al ícono del software. En la ventana puedes identificar las siguientes partes: la Barra de menú, la Barra de herramientas, la Vista Algebraica, la Vista Gráfica y la Barra de entrada.



2. Da clic sobre el triángulo que se encuentra a la izquierda de Vista Gráfica. Puedes ocultar o aparecer los ejes de coordenadas y la cuadrícula.

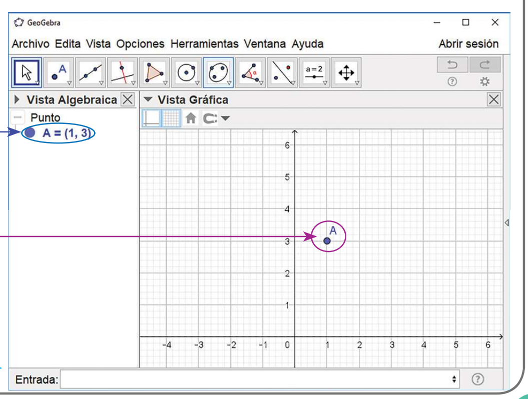


3. Para ubicar puntos en el plano puedes realizar una de las siguientes opciones:
   a) En la barra de entrada escribir las coordenadas del punto en la forma (x, y). Por ejemplo, al escribir (1,3) y presionar Enter, automáticamente aparecerá en la Vista Algebraica el punto A = (1,3) y en la Vista Gráfica el punto sobre el plano cartesiano:

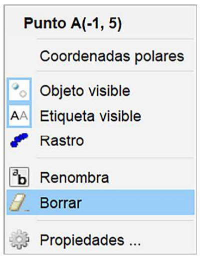
   Entrada: **(1,3)**

   GeoGebra designa los puntos con letras mayúsculas. Para denotar un punto con una letra específica, por ejemplo P(–2,5), se escribe en la barra de entrada:

   Entrada: **P=(–2,5)**

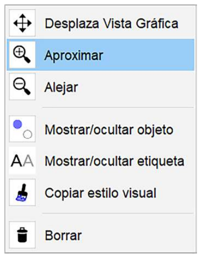


b) Selecciona la herramienta Punto. En la Vista Gráfica ubica el cursor en la posición donde quieras colocar el punto y luego da clic. Cuando las coordenadas del punto son números enteros es fácil utilizar esta herramienta y auxiliarse de la cuadrícula; caso contrario es mejor ingresar las coordenadas en la barra de entrada como en el literal anterior.



4. Para borrar objetos da clic derecho sobre ellos (ya sea en la Vista Algebraica o en la Vista Gráfica) y selecciona Borrar. Si lo que quieres es ocultar el objeto y no borrarlo, en el cuadro selecciona Objeto visible, desaparecerá de la Vista Gráfica pero permanecerá en la Vista Algebraica.

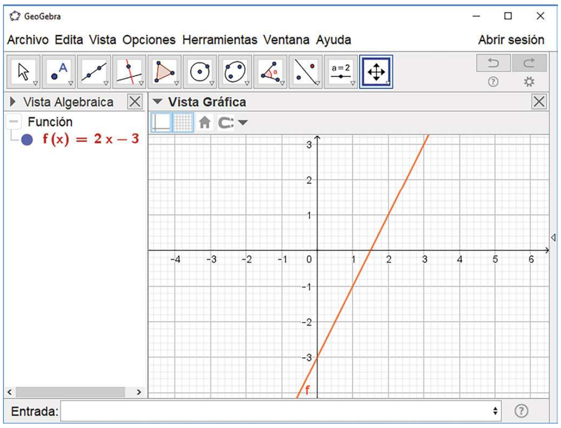
5. Para desplazar el plano cartesiano selecciona la herramienta Desplaza Vista Gráfica. Luego sobre la Vista Gráfica mantén presionado clic izquierdo y arrastra al lugar donde quieres colocar el plano.



6. Para acercar o alejar el plano cartesiano selecciona la esquina inferior derecha del ícono Desplaza Vista Gráfica y elige Aproximar o Alejar, luego da clic sobre la Vista Gráfica.

7. Para graficar funciones se utiliza la notación $f(x)$. Por ejemplo, para graficar la función $f(x) = 2x - 3$ se escribe f(x)=2x-3 en la barra de entrada seguido de Enter. En la Vista Algebraica aparecerá la ecuación de la función y en la Vista Gráfica su gráfica:

Entrada: **f(x)=2x-3**



Puedes usar también g(x), h(x), etc.; la variable x siempre debe estar en minúscula, de esa forma GeoGebra la reconocerá como una variable.

8. En GeoGebra, para graficar funciones cuadráticas, la potencia x^2 se escribe x^2. Por ejemplo, para graficar $f(x) = 3x^2$ se escribe en la barra de entrada f(x)=3x^2.

Actividades

1. Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano, utilizando la barra de entrada y la herramienta "Punto" en aquellos casos que sea posible:

a) A(–3, 4) b) B(2, 7) c) P(–6, 0) d) Q$\left(4, -\frac{1}{2}\right)$

En GeoGebra la fracción $\frac{m}{n}$ se escribe m/n.

2. Grafica las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x + 3$ b) $g(x) = \frac{2}{3}x - 5$ c) $h(x) = 4x^2$ d) $p(x) = -x^2$ e) $q(x) = \frac{x^2}{2}$

Indicador de logro

5.1 Explora las herramientas de un software matemático para ubicar puntos en el plano cartesiano y trazar las gráficas de funciones lineales y cuadráticas.

Secuencia

En esta clase se exploran las herramientas básicas del software GeoGebra. Se utiliza también para trazar las gráficas de funciones lineales o cuadráticas.

Propósito

Las funciones cuadráticas del numeral 2 de la parte Actividades son de la forma $f(x) = ax^2$, para que en la siguiente clase los estudiantes puedan visualizar los desplazamientos horizontales y verticales.

Solución de problemas:

1a) Usando la barra de entrada, se escribe:

Entrada: **A=(–3,4)**

Como las coordenadas del punto son números enteros, también puede utilizarse la herramienta Punto.

1b) Usando la barra de entrada, se escribe:

Entrada: **B=(2,7)**

Como las coordenadas del punto son números enteros, también puede utilizarse la herramienta Punto.

1c) Usando la barra de entrada, se escribe:

Entrada: **P=(–6,0)**

Como las coordenadas del punto son números enteros, también puede utilizarse la herramienta Punto.

1d) Usando la barra de entrada, se escribe:

Entrada: **Q=(4,-1/2)**

Observe que, en la Vista Algebraica aparece Q = (4, -0.5).

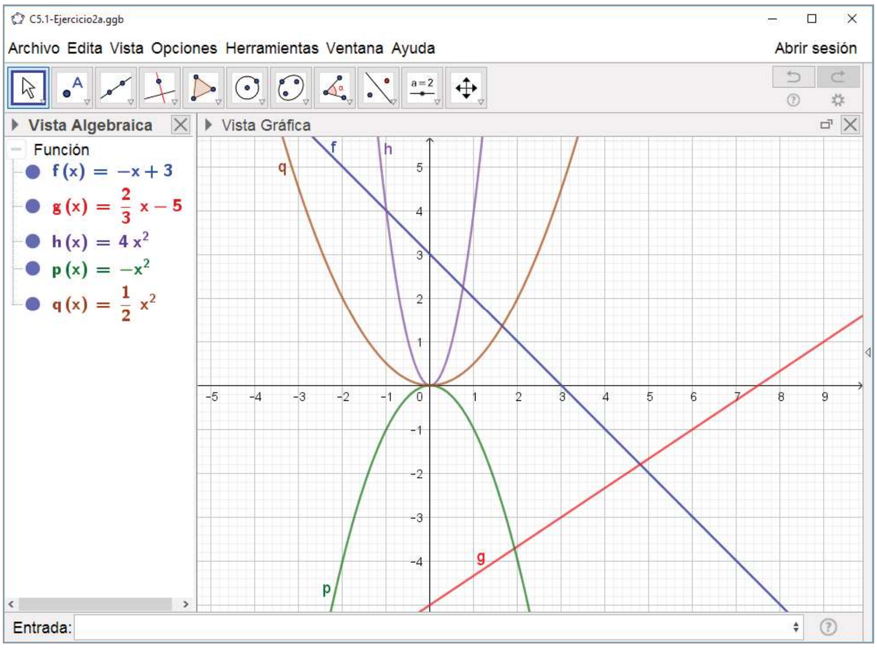
2a) En la barra de entrada se escribe f(x)=-x+3.

2b) En la barra de entrada se escribe g(x)=2/3x-5.

2c) En la barra de entrada se escribe h(x)=4x^2.

2d) En la barra de entrada se escribe p(x)=-x^2.

2e) En la barra de entrada se escribe q(x)=1/2x^2. La gráficas de las funciones de los literales, desde 2a) hasta 2e) se presentan a continuación:

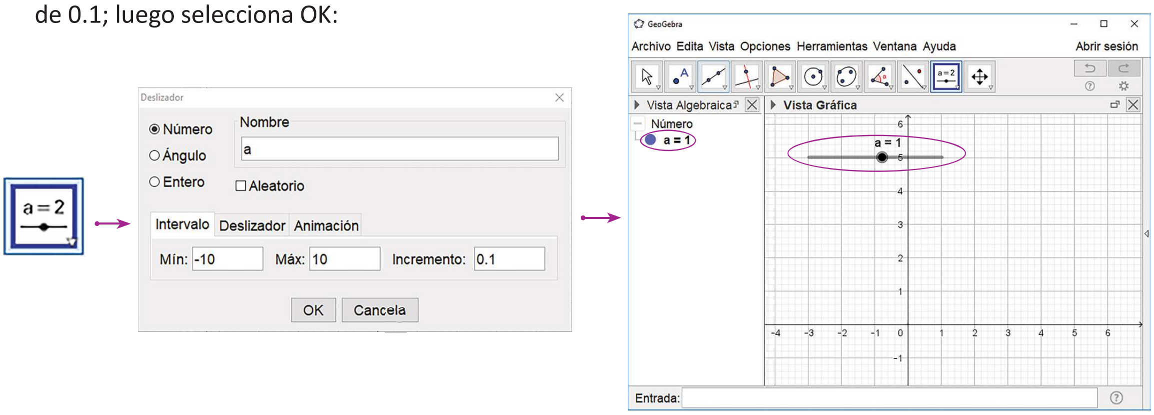


5.2 Práctica en GeoGebra: desplazamientos verticales

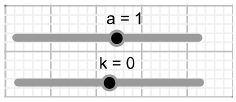
Esta práctica te ayudará a visualizar los desplazamientos verticales de funciones cuadráticas utilizando la herramienta Deslizador; un deslizador es una variable que toma valores determinados dentro de un intervalo indicado.

Práctica

1. Selecciona la herramienta Deslizador. Da clic sobre la Vista Gráfica, te aparecerá un cuadro de diálogo para especificar el nombre del deslizador, el tipo (número, ángulo o entero), el intervalo y el incremento. Nombra al deslizador **a**, en el intervalo coloca el valor mínimo –10 y el valor máximo 10, con un incremento de 0.1; luego selecciona OK:



2. De forma similar crea otro deslizador, nómbralo **k** y asígnale las mismas características de **a** (intervalo e incremento). Coloca el cursor sobre el punto que aparece en el deslizador, muévelo hasta que **k** tenga el valor de cero.



3. Escribe en la barra de entrada f(x)=ax^2; en la Vista Algebraica aparecerá la función $f(x) = 1x^2$ y en la Vista Gráfica la parábola correspondiente. Mueve el deslizador **a**, primero para valores positivos y luego negativos; ¿qué ocurre con la gráfica de f? Anota lo que observas en tu cuaderno.

4. Escribe en la barra de entrada g(x)=f(x)+k.

5. Para determinar el vértice de la gráfica de g escribe en la barra de entrada extremo. Selecciona la opción Extremo(<Polinomio>); luego, en lugar de <Polinomio> escribe “y=g(x)”, aparecerá en la Vista Algebraica las coordenadas del vértice y en la Vista Gráfica el punto.

6. Mueve el deslizador **k**, primero para valores positivos y luego para negativos. ¿Qué ocurre con la gráfica y el vértice de la función si **k** es positivo o si es negativo? Anota lo que observas en tu cuaderno.

Actividades

Ahora utilizarás otra herramienta para construir la gráfica de la función $f(x) = x^2$ como se hizo en noveno grado, es decir, a partir de puntos:

1. Abre una nueva ventana. Crea un deslizador y nómbralo “**n**”, con intervalo de –5 a 5 e incremento de 0.001. Mueve el deslizador hasta que **n** tenga el valor de –5, aleja la Vista Gráfica.
2. En la barra de entrada ingresa el punto “P=(n,n^2)”. Luego da clic derecho sobre P y selecciona la opción “Rastro”.
3. Da clic derecho sobre “**n**” y selecciona “Animación”. Anota lo que observas en tu cuaderno.

Indicador de logro

5.2 Utiliza las herramientas de un software para visualizar los desplazamientos verticales de funciones cuadráticas y la elaboración de la parábola de $f(x) = x^2$ a partir de puntos.

Secuencia

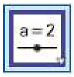
En esta clase se utiliza la herramienta Deslizador del software GeoGebra para verificar la relación entre la gráfica de $f(x) = ax^2$ y la de $g(x) = f(x) + k$.

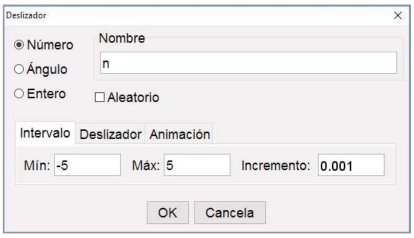
Propósito

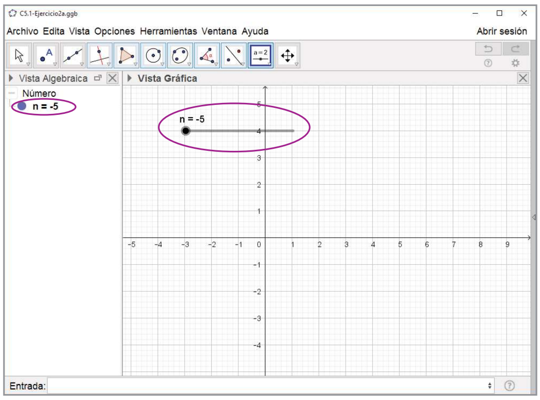
Observe que, en la parte Actividades, la construcción de la gráfica de $f(x) = x^2$ se realiza utilizando la herramienta Deslizador y la opción Animación.

Solución de problemas:

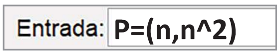
1. Se selecciona la herramienta Deslizador, luego clic sobre cualquier parte de la Vista Gráfica:



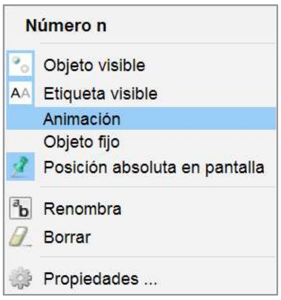


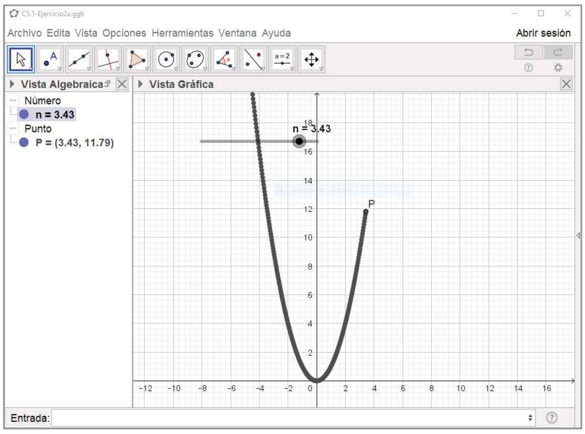


2. En la barra se escriben las coordenadas de P(n, n^2). Luego, clic derecho sobre el punto P en la Vista Algebraica, y se selecciona la opción Rastro.



3. Clic derecho sobre el número **n** en la Vista Algebraica, y se selecciona la opción Animación (para detenerla se da nuevamente clic derecho sobre el número **n** y se desmarca la opción Animación).





5.3 Práctica en GeoGebra: desplazamientos horizontales

Con esta práctica visualizarás los desplazamientos horizontales, combinaciones de desplazamientos horizontales, verticales y las gráficas de otras funciones que no son cuadráticas.

Práctica

Desplazamientos horizontales:

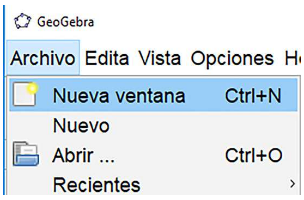
1. Crea dos deslizadores, al primero nómbralo **a** con intervalo de –10 a 10 e incremento 0.1, y al segundo nómbralo **h** y con las mismas características de **a** (intervalo e incremento). Mueve el deslizador **h** hasta que su valor sea igual a cero.

2. Crea las funciones “f(x)=ax^2” y “g(x)=f(x-h)” y encuentra el vértice de la gráfica de g.

3. Mueve el deslizador **a** de tal forma que sea diferente de 1. Luego activa la animación para el deslizador **h**, ¿qué ocurre con la gráfica y el vértice de g para valores positivos de **h**? ¿Y para valores negativos? Anota los resultados en tu cuaderno.

Combinaciones de desplazamientos horizontales y verticales:

1. Abre una nueva ventana en GeoGebra, ve al menú “Archivo” y selecciona “Nueva ventana”.



2. Crea tres deslizadores, nómbralos **a**, **h** y **k**, y asígnales las siguientes características: intervalo de –10 a 10 e incremento de 0.1. Mueve los deslizadores **h** y **k** para que su valor sea cero.

3. Crea las funciones “f(x)=ax^2” y “g(x)=f(x-h)+k”. Encuentra además el vértice de la gráfica de g.

4. Mueve el deslizador **a** de tal forma que sea diferente de 1. Luego mueve los deslizadores **h** y **k** en ese orden y sin activar la animación. Anota lo que le ocurre a la gráfica y el vértice de g con respecto a f.

Gráficas de otras funciones que no son cuadráticas:

1. Abre una nueva ventana en GeoGebra.

2. Crea el deslizador **m** y asígnale las siguientes características: intervalo de –4 a 4 e incremento de 0.001; mueve el deslizador para que su valor sea –4.

3. Crea el punto “P=(m,m^3)” y actívale el rastro. Luego activa la animación del deslizador **m**, ¿cuál es la función cuya gráfica se asemeja a la que se está elaborando?

4. Crea el deslizador **n** con intervalo de 0 a 30 e incremento 0.001; muévelo para que su valor sea 0.

5. Crea el punto “Q=(n, sqrt(n))” y actívale el rastro. Luego activa la animación del deslizador **n**, ¿cuál es la función cuya gráfica se asemeja a la que se está elaborando? ¿Para qué sirve el comando “sqrt”?

Actividades

1. Utiliza GeoGebra para comprobar si has elaborado correctamente las gráficas de las funciones de los problemas, desde la clase 2.1 hasta la clase 2.8.

2. Comprueba los resultados de las gráficas de la clase 4.9, y los problemas 5 y 6 de la clase 4.10.

Indicador de logro

5.3 Utiliza las herramientas de un software para visualizar los desplazamientos horizontales de funciones cuadráticas y la elaboración de otras funciones a partir de puntos.

Secuencia

En esta clase se utiliza la herramienta Deslizador del software GeoGebra para verificar la relación entre la gráfica de $f(x) = ax^2$ y las de $g(x) = f(x - h)$ y $h(x) = f(x - h) + k$.

Propósito

En la parte Actividades, los estudiantes deben utilizar lo visto en las prácticas para verificar las soluciones de algunos problemas de la unidad.

Solución de problemas:

1. En la barra de entrada, las funciones se escriben de la siguiente forma:

Clase 2.1 (se colocarán diferentes letras para las funciones en cada literal):
a) f(x)=x+1 b) g(x)=-2x-3 c) h(x)=x^2+2 d) p(x)=-x^2-3

Clase 2.2:
a) f(x)=(x-2)^2 b) g(x)=-(x-1)^2 c) h(x)=2(x-2)^2 d) p(x)=-2(x-3)^2

Clase 2.3:
a) f(x)=(x+2)^2 b) g(x)=-(x+1)^2 c) h(x)=2(x+2)^2 d) p(x)=-2(x+3)^2

Clase 2.4:
a) f(x)=(x-2)^2+3 b) g(x)=-(x-1)^2+2 c) h(x)=2(x+2)^2-1 d) p(x)=-2(x+3)^2-4

Clase 2.5:
a) f(x)=(x+1)^2+2 b) g(x)=-(x+3)^2-3 c) h(x)=3(x-2)^2+1 d) p(x)=-3(x-4)^2-2

Clase 2.6 (se puede escribir la ecuación de la función tal cual aparece en cada literal):
a) f(x)=x^2-4x b) g(x)=-x^2+2x c) h(x)=3x^2+6x

Clase 2.7:
a) f(x)=x^2+2x-2 b) g(x)=x^2+4x+5 c) h(x)=x^2-6x+7 d) p(x)=x^2-8x+18

Clase 2.8:
a) f(x)=-x^2+8x-13 b) g(x)=3x^2+12x+11 c) h(x)=2x^2-20x+44 d) p(x)=-1/2x^2+x+3/2

2. En la barra de entrada, las funciones se escriben de la siguiente forma:

Clase 4.9 (se colocarán diferentes letras para las funciones en cada literal):
1a) f(x)=4x^3 1b) g(x)=1/4x^3 1c) h(x)=-4x^3 1d) p(x)=-1/4x^3

2a) f(x)=(-2x)/(x-2) 2b) g(x)=(2x+3)/(x-1)

3a) f(x)=-3sqrt(x) 3b) g(x)=4sqrt(x) 3c) h(x)=sqrt(-3x) 3d) p(x)=sqrt(4x)

Clase 4.10 (se colocarán diferentes letras para las funciones en cada literal):
5a) f(x)=x^3+1 5b) g(x)=(x-2)^3

6a) f(x)=-sqrt(-x) 6b) g(x)=sqrt(x)+1 6c) h(x)=sqrt(-x)-3 6d) p(x)=sqrt(x-1)