Unidad 5. Resolución de triángulos oblicuángulos

Competencia de la unidad

Resolver triángulos utilizando las herramientas de la trigonometría y aplicarlo a diferentes situaciones del entorno.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo	Primer año de bachillerato	Segundo año de bachillerato
Unidad 5: Figuras semejantes (9°) • Semejanza • Semejanza de triángulos • Semejanza y paralelismo • Aplicaciones de semejanza y triángulos semejantes	**Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos** • Razones trigonométricas de ángulos agudos • Razones trigonométricas de ángulos no agudos • Resolución de triángulos oblicuángulos	**Unidad 5: Funciones trascendentales II** • Función biyectiva e inversa • Función logarítmica • Funciones trigonométricas • Práctica en GeoGebra
Unidad 6: Teorema de Pitágoras (9°) • Teorema de Pitágoras • Aplicación del teorema de Pitágoras	**Unidad 6: Identidades y ecuaciones trigonométricas** • Identidades trigonométricas • Ecuaciones trigonométricas	
	Unidad 7: Vectores • Vectores • Producto escalar de vectores • Números complejos • Práctica en GeoGebra	

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Razones trigonométricas de ángulos agudos	1	1. Razón trigonométrica
	1	2. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo
	1	3. Triángulos rectángulos notables
	1	4. Razones trigonométricas de triángulos rectángulos notables
	1	5. Triángulo rectángulo conocidos un lado y un ángulo
	1	6. Triángulo rectángulo conocidos dos lados
	1	7. Practica lo aprendido
	1	8. Aplicación de las razones trigonométricas
	1	9. Ángulo de depresión
	1	10. Ángulo de elevación
	1	11. Actividad. Construcción de un clinómetro
	1	12. Aplicaciones de las razones trigonométricas
	1	Prueba de la lección 1
2. Razones trigonométricas de ángulos no agudos	1	1. Distancia entre dos puntos
	1	2. Simetrías en el plano cartesiano
	1	3. Ángulos
	1	4. Ángulos mayores a 360° y menores a –360°
	1	5. Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 1
	1	6. Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 2
	1	7. Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 3
	1	8. Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 4
	1	9. La identidad pitagórica

Lección	Horas	Clases
	1	10. Practica lo aprendido
3. Resolución de triángulos oblicuángulos	1	1. Área de un triángulo
	1	2. Ley de los senos
	1	3. Cálculo del ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo, parte 1
	1	4. Cálculo del ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo, parte 2
	1	5. Ley del coseno
	1	6. Cálculo de los ángulos de un triángulo conocidos sus tres lados
	1	7. Practica lo aprendido
	1	8. Aplicaciones de la ley de los senos y la ley del coseno
	1	9. Practica lo aprendido
	1	10. Problemas de la unidad
	1	11. Problemas de la unidad
	1	Prueba de las lecciones 2 y 3

33 horas clase + prueba de la lección 1 + prueba de las lecciones 2 y 3

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Razones trigonométricas de ángulos agudos
El desarrollo de la unidad inicia con la justificación de que las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo y no de la longitud de los lados del triángulo rectángulo. Se establecen las razones trigonométricas de los ángulos de los triángulos notables, y se calculan razones trigonométricas de cualquier ángulo agudo y ángulos conocidas algunas medidas de lados de triángulos rectángulos. Finalmente, se resuelven problemas que requieran el uso de razones trigonométricas.

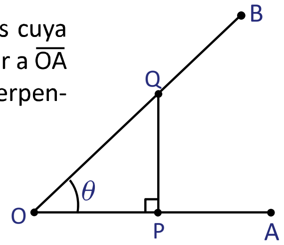
Lección 2: Razones trigonométricas de ángulos no agudos
Se calculan razones trigonométricas de ángulos no agudos utilizando el plano cartesiano, y el contenido de la lección anterior (razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°) para el cálculo de razones trigonométricas de ángulos especiales (todos aquellos que pueden calcularse con los ángulos mencionados previamente). Se calculan ángulos que no necesariamente resulten en ángulos especiales.

Lección 3: Resolución de triángulos oblicuángulos
Se establecen la ley de los senos y del coseno para la resolución de triángulos oblicuángulos y de problemas aplicados al entorno.

1.1 Razón trigonométrica*

Problema inicial

Se consideran los segmentos de recta $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ y el ángulo formado entre ellos cuya medida es θ. Sobre $\overline{OB}$ se toma un punto Q y se traza un segmento perpendicular a $\overline{OA}$ y que pase por Q. Se define por P el punto de intersección entre este segmento perpendicular y $\overline{OA}$, como muestra la figura.



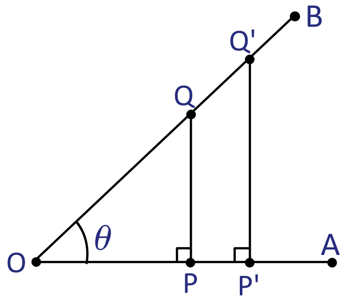
Del triángulo rectángulo OPQ se definen las razones: $\frac{PQ}{OQ}$, $\frac{OP}{OQ}$ y $\frac{PQ}{OP}$.

Justifica que las razones definidas no dependen de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo OPQ.

Solución

Se toma un punto cualquiera Q' sobre $\overline{OB}$ distinto de Q. Se traza un segmento perpendicular a $\overline{OA}$ que pase por Q' y sea P' la intersección de esta perpendicular y $\overline{OA}$, como muestra la figura. Luego, los triángulos OPQ y OP'Q' son semejantes por el criterio AA (denotado $\Delta OPQ \sim \Delta OP'Q'$), por lo tanto

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}.$$



De $\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OQ}{OQ'}$ se deduce que $\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}$.

De $\frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'}$ se deduce que $\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$.

De $\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{OP}{OP'}$ se deduce que $\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$.

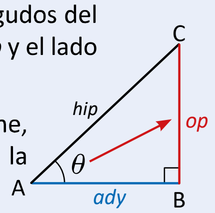
En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se cumple que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Entonces, $\frac{PQ}{OQ} = \frac{P'Q'}{OQ'}$, $\frac{OP}{OQ} = \frac{OP'}{OQ'}$ y $\frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$.

Por lo tanto, las razones $\frac{PQ}{OQ}$, $\frac{OP}{OQ}$ y $\frac{PQ}{OP}$ no dependen de las longitudes de los lados del triángulo.

Definición

Sea ABC un triángulo rectángulo, recto en B y sea θ la medida de uno de los ángulos agudos del ΔABC. Se define a la hipotenusa del triángulo por *hip*, el lado opuesto al ángulo como *op* y el lado adyacente al ángulo como *ady*.



Nótese que el opuesto y adyacente en un triángulo dependerá de cuál ángulo se tome, y se debe tener especial cuidado cuando el triángulo está ubicado en otra posición a la mostrada en la figura.

Se definen las razones sen θ, cos θ y tan θ, como sen $\theta = \frac{op}{hip}$, cos $\theta = \frac{ady}{hip}$, tan $\theta = \frac{op}{ady}$, y se leen "seno de theta", "coseno de theta" y "tangente de theta", respectivamente.

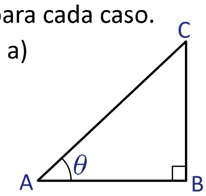
A las razones sen θ, cos θ y tan θ, se les llama **razones trigonométricas** del ángulo θ.

En un triángulo rectángulo, el lado que se opone al ángulo de 90° se conoce como **hipotenusa** y los dos lados que forman dicho ángulo se conocen como **catetos**. Además, la hipotenusa es el lado de mayor longitud.

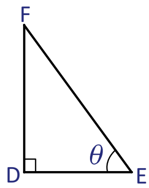
Problemas

Identifica la hipotenusa, el lado opuesto y adyacente del ángulo θ y expresa las razones trigonométricas para cada caso.

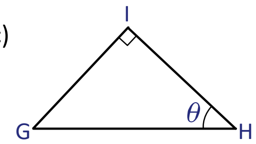
a)



b)



c)



Indicador de logro:

1.1 Establece las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo en términos de la hipotenusa, el lado opuesto y adyacente a dicho ángulo.

Secuencia:

Esta unidad es el inicio del estudio de la trigonometría. La teoría de ángulos, los triángulos rectángulos y la semejanza de triángulos son la principal base para el desarrollo de la unidad. Además se requiere del conocimiento de segmentos perpendiculares, de las proporciones y de sus propiedades.
Esta clase debe ser desarrollada con mayor apoyo por parte del docente.

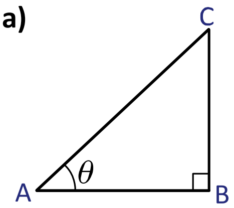
Propósito:

El objetivo principal de esta clase es justificar el hecho de que las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo y no de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo en cuestión.

La sección de Problemas busca afianzar en el estudiante el hecho de identificar correctamente la hipotenusa de un triángulo rectángulo, el lado opuesto y adyacente de un ángulo dado.

Solución de problemas:

a)



La hipotenusa es *hip* = AC, el lado opuesto es *op* = BC, el lado adyacente es *ady* = AB.

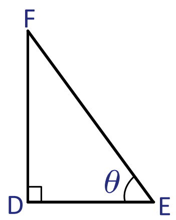
Las razones trigonométricas del triángulo ABC son:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip} = \frac{BC}{AC},$$

$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{AB}{AC},$$

$$\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{BC}{AB}.$$

b)



La hipotenusa es *hip* = EF, el lado opuesto es *op* = DF, el lado adyacente es *ady* = DE.

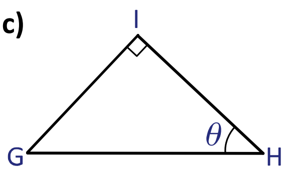
Las razones trigonométricas del triángulo DEF son:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip} = \frac{DF}{EF},$$

$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{DE}{EF},$$

$$\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{DF}{DE}.$$

c)



La hipotenusa es *hip* = GH, el lado opuesto es *op* = GI, el lado adyacente es *ady* = HI.

Las razones trigonométricas del triángulo GHI son:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip} = \frac{GI}{GH},$$

$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{HI}{GH},$$

$$\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{GI}{HI}.$$

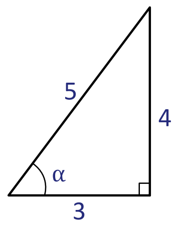
Lección 1

1.2 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

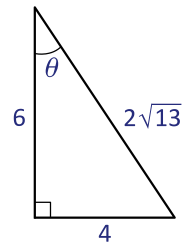
Problema inicial

Determina las tres razones trigonométricas para el ángulo α y θ.

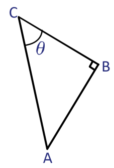
a)



b)



Hay que tener cuidado al elegir el lado opuesto y adyacente al ángulo. Por ejemplo, en el triángulo ABC, el opuesto de θ es $\overline{AB}$ y el lado adyacente θ a es $\overline{BC}$.



Solución

a) Se identifica la hipotenusa, el lado opuesto y el lado adyacente del ángulo α. En este caso, *hip* = 5, *op* = 4 y *ady* = 3, entonces,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{op}{hip} = \frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{ady}{hip} = \frac{3}{5}, \quad \tan\alpha = \frac{op}{ady} = \frac{4}{3}.$$

b) Se identifica la hipotenusa, el lado opuesto y el lado adyacente del ángulo θ. En este caso, *hip* = $2\sqrt{13}$, *op* = 4 y *ady* = 6, entonces,

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, racionalizando el denominador.

- $\cos\theta = \frac{ady}{hip} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, racionalizando el denominador.

- $\tan\theta = \frac{op}{ady} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Recuerda que para racionalizar una fracción, se multiplica y divide por el radical que aparece en el denominador de la fracción.

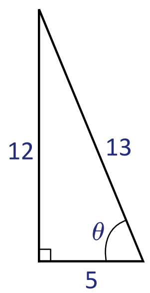
Definición

Si se conocen las medidas de los lados de un triángulo rectángulo pueden calcularse las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de uno de sus ángulos agudos, identificando la medida de la hipotenusa, del lado opuesto y adyacente de dicho ángulo y luego calculando las razones como se definieron en la clase 1.1.

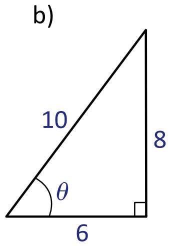
Problemas

1. Para cada uno de los siguientes triángulos, calcula las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ. Simplifica o racionaliza cuando sea posible.

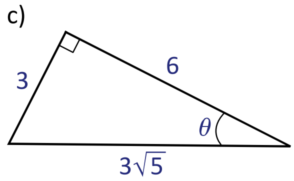
a)



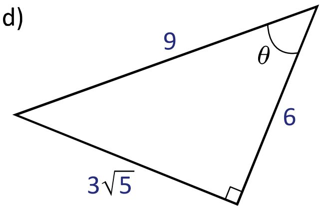
b)



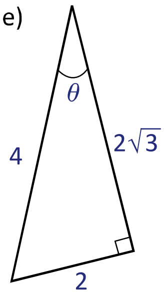
c)



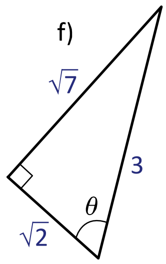
d)



e)



f)

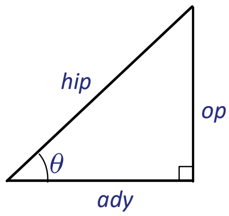


2. Se definen las razones trigonométricas cosecante, secante y cotangente de un ángulo agudo θ, denotadas por csc θ, sec θ y cot θ, respectivamente:

$$\csc\theta = \frac{hip}{op},$$

$$\sec\theta = \frac{hip}{ady},$$

$$\cot\theta = \frac{ady}{op}.$$



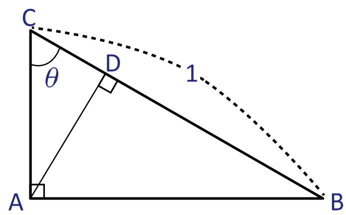
Encuentra las razones trigonométricas csc θ, sec θ y cot θ para los triángulos del Problema 1.

3. Con base a la definición en el Problema 2, demuestra que $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$.

4. Con base a la definición en el Problema 2, demuestra que $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$.

5. Con base a la definición en el Problema 2, demuestra que $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.

6. En la siguiente figura, ABC es un triángulo rectángulo, ∢CAB = 90°, ∢BCA = θ y BC = 1. Escribe los valores de las longitudes de los segmentos AC, AB, AD, BD y CD en términos del ángulo θ.



El nombre **trigonometría** deriva de palabras griegas que significan "*triángulo*" y "*medir*". Se llama así porque sus inicios tienen que ver principalmente con el problema de "*resolver un triángulo*" (calcular las medidas de los tres lados y tres ángulos, conocidos algunos de ellos).

Si bien la trigonometría nace por la necesidad de resolver triángulos, en la actualidad es utilizada para muchos ámbitos como por ejemplo, en la física (medición del movimiento de un péndulo), la astronomía (medir distancias entre estrellas) o cartografía (medir distancias entre dos puntos).

Alrededor del siglo II a.C., el matemático Hiparco (180-125 a.C.), nacido en Nicea, Asia Menor, es considerado el más destacado de los astrónomos griegos, inicia el uso de una tabla de cuerdas de la circunferencia que en cierto modo equivalía a una tabla rudimentaria de valores del seno.

Abbott , B.A. (1967). *Teach Yourself Trigonometry.*

Indicador de logro:

1.2 Calcula las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo.

Secuencia:

Luego de haber aprendido a identificar la hipotenusa, el lado adyacente y opuesto de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, en esta clase se establecen las razones trigonométricas de un ángulo agudo a partir de un triángulo rectángulo cuyas medidas de los lados son conocidas.

Propósito:

Identificar la medida de la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo para establecer las razones trigonométricas de uno de los ángulos agudos de dicho triángulo.

Solución de problemas:

1a) Como hip = 13, op = 12 y ady = 5, entonces,

$$\text{sen } \theta = \frac{op}{hip} = \frac{12}{13}, \cos \theta = \frac{ady}{hip} = \frac{5}{13}, \tan \theta = \frac{op}{ady} = \frac{12}{5}.$$

1b) Como hip = 10, op = 8 y ady = 6, entonces,

$$\text{sen } \theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

1c) Como $hip = 3\sqrt{5}$, op = 3 y ady = 6, entonces,

$$\text{sen } \theta = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \tan \theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

1d) Como hip = 9, $op = 3\sqrt{5}$ y ady = 6, entonces,

$$\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos \theta = \frac{2}{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

1e) Como hip = 4, op = 2 y $ady = 2\sqrt{3}$, entonces,

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1f) Como hip = 3, $op = \sqrt{7}$ y $ady = \sqrt{2}$, entonces,

$$\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

2a) $\csc \theta = \frac{hip}{op} = \frac{13}{12}, \sec \theta = \frac{hip}{ady} = \frac{13}{5}, \cot \theta = \frac{ady}{op} = \frac{5}{12}.$

2b) $\csc \theta = \frac{5}{4}, \sec \theta = \frac{5}{3}, \cot \theta = \frac{3}{4}.$

2c) $\csc \theta = \sqrt{5}, \sec \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}, \cot \theta = 2.$

2d) $\csc \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \sec \theta = \frac{3}{2}, \cot \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

2e) $\csc \theta = 2, \sec \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \cot \theta = \sqrt{3}.$

2f) $\csc \theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}, \sec \theta = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \cot \theta = \frac{\sqrt{14}}{7}.$

3. $\frac{1}{\text{sen } \theta} = 1 \div \frac{op}{hip} = 1 \times \frac{hip}{op} = \frac{hip}{op} = \csc \theta$

4. $\frac{1}{\cos \theta} = 1 \div \frac{ady}{hip} = 1 \times \frac{hip}{ady} = \frac{hip}{ady} = \sec \theta$

5. $\frac{1}{\tan \theta} = 1 \div \frac{op}{ady} = 1 \times \frac{ady}{op} = \frac{ady}{op} = \cot \theta$

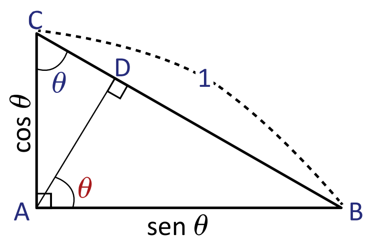
6. Del ΔABC se tiene que

$$\cos \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{1} \Rightarrow AC = \cos \theta \text{ y } \text{sen } \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{1} \Rightarrow AB = \text{sen } \theta.$$

Del ΔADC puede deducirse que $\sphericalangle DAC = 90° - \theta$ y por tanto, $\sphericalangle DAB = \theta$.

Ahora, en el ΔABD se tiene:

$$\cos \theta = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{\text{sen } \theta} \Rightarrow AD = \cos \theta \text{ sen } \theta \text{ y } \text{sen } \theta = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{\text{sen } \theta} \Rightarrow BD = \text{sen}^2\theta.$$



Luego, CD = BC – BD = 1 – $\text{sen}^2\theta$.

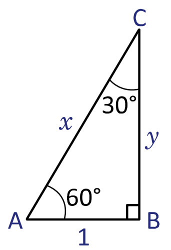
Lección 1

1.3 Triángulos rectángulos notables

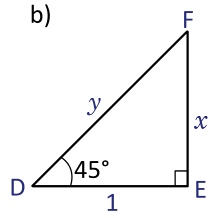
Problema inicial

Dados los siguientes triángulos rectángulos, encuentra el valor de x y y.

a)

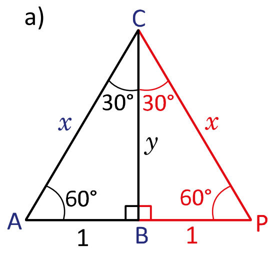


b)



Solución

a)



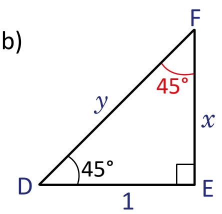
Si se refleja el triángulo ABC con respecto a $\overline{BC}$ se obtiene el triángulo APC. Como ∢BCA = 30° se tiene que ∢PCA = 60°. Resulta que el triángulo APC es equilátero, y por lo tanto x = AP = 2.

Luego, para encontrar el valor de y se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC: $x^2 = 1^2 + y^2$. Es decir,

$$y^2 = x^2 - 1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3.$$

Como $y > 0$, entonces, $y = \sqrt{3}$.

b)



En el triángulo DEF, los ángulos FDE y DFE son complementarios, es decir, ∢FDE + ∢EFD = 90°; por lo tanto, ∢EFD = 45°. Se tiene entonces que el triángulo DEF es isósceles, y por lo tanto x = 1.

Para encontrar el valor de y se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo DEF.

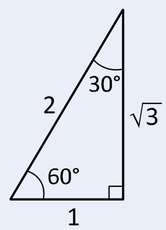
$$y^2 = 1^2 + x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

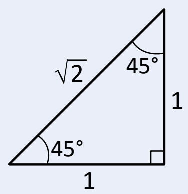
Como $y > 0$, entonces, $y = \sqrt{2}$.

Definición

Al triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos son de 30° y 60°, y al triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos son de 45° se les conoce como **triángulos notables**.

Se suele hacer referencia a estos triángulos como triángulo de 30 y 60; y triángulo de 45.

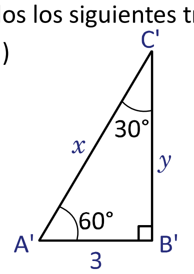




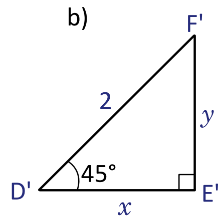
Ejemplo

Dados los siguientes triángulos, encuentra los valores de x y y.

a)

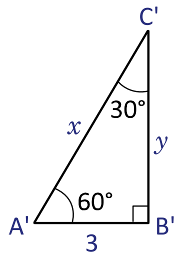


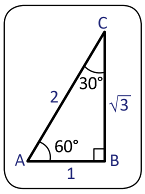
b)



a) Nótese que $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$, entonces,

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad x = 3(2) = 6 \qquad \text{y} \qquad \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad y = 3\sqrt{3}.$$

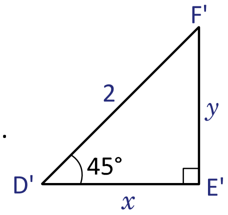


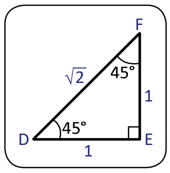


b) De igual forma que en a) $\Delta D'E'F' \sim \Delta DEF$, entonces,

$$\frac{x}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Luego, como el $\Delta D'E'F'$ es isósceles se tiene que $y = \sqrt{2}$.

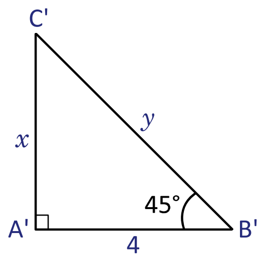




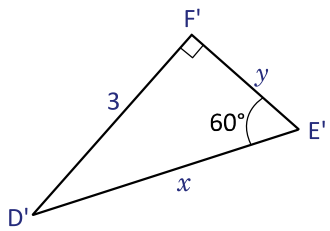
Problemas

Encuentra el valor de x y y en cada triángulo.

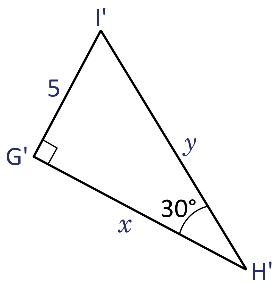
a)



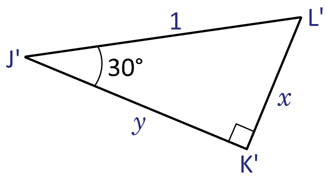
b)



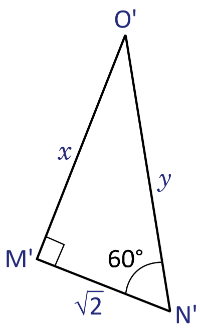
c)



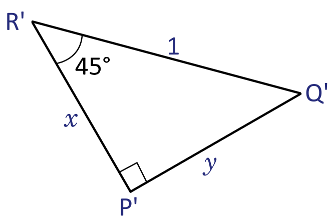
d)



e)



f)



Indicador de logro:

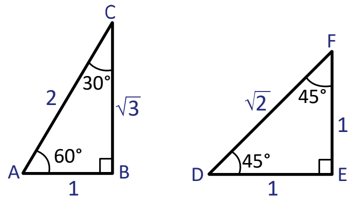
1.3 Utiliza los triángulos notables y semejanza para encontrar las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Secuencia:

Luego de haber calculado razones trigonométricas de un ángulo agudo a partir de un triángulo rectángulo dado, se definen los triángulos notables y las medidas de sus lados conociendo una de ellas.

Propósito:

Se calculan las medidas de los lados de los triángulos rectángulos de 30° y 60°, y el de 45° cuando se conoce una medida de ellas. El Ejemplo resuelve problemas similares a los del Problema inicial, pero utilizando semejanza con los triángulos establecidos en la Conclusión.

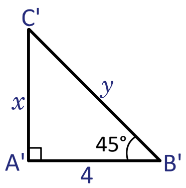


Solución de problemas:

Para resolver este problema, el estudiante puede hacerlo como se hizo en la Solución del Problema inicial o utilizando semejanza como se hizo en el Ejemplo.

Para ver la forma en que se nombran las figuras semejantes, léase la clase 1.3 (página 127) de la Unidad 5 del Libro de texto de noveno grado.

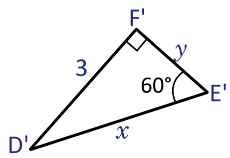
a) Como $\Delta A'B'C' \sim \Delta EFD$:



$\frac{x}{1} = \frac{4}{1} \Rightarrow x = 4,$

$\frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{4}{1} \Rightarrow y = 4\sqrt{2}.$

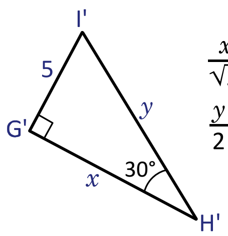
b) Como $\Delta D'E'F' \sim \Delta CAB$:



$\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$

$\frac{y}{1} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$

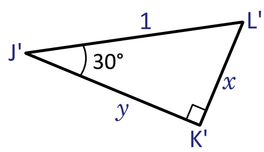
c) Como $\Delta I'G'H' \sim \Delta ABC$:



$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{5}{1} \Rightarrow x = 5\sqrt{3},$

$\frac{y}{2} = \frac{5}{1} \Rightarrow y = 10.$

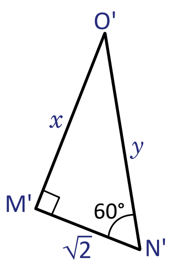
d) Como $\Delta L'K'J' \sim \Delta ABC$:



$\frac{x}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2},$

$\frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

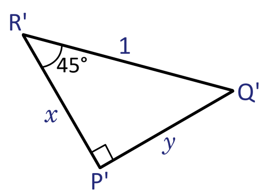
e) Como $\Delta N'M'O' \sim \Delta ABC$:



$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow x = \sqrt{6},$

$\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}.$

f) Como $\Delta R'P'Q' \sim \Delta DEF$:



$\frac{x}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$y = x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

1.4 Razones trigonométricas de triángulos rectángulos notables

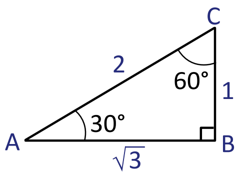
Problema inicial

Encuentra las tres razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°.

Solución

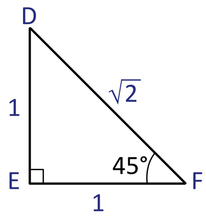
a) Para calcular las razones trigonométricas para 30° se utiliza el triángulo que se muestra en la figura. Identificando el lado opuesto y adyacente al ángulo de 30° se tiene que, *ady* = $\sqrt{3}$ y *op* = 1. Por lo tanto,

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2},$$
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



b) Se utiliza el triángulo mostrado en la figura para calcular las razones trigonométricas de 45°. Identificando el lado opuesto y adyacente al ángulo de 45°se tiene que, *ady* = *op* = 1. Por lo tanto,

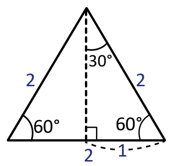
$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1.$$

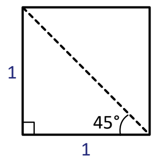


c) Para calcular las razones trigonométricas para 60° se utiliza el mismo triángulo ABC que se utilizó en a). En este caso, *ady* = 1 y *op* = $\sqrt{3}$. Por lo tanto,

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos 60° = \frac{1}{2},$$
$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Una forma para recordar las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60° es recordar cómo se construyen el triángulo de 30° y 60°, y el triángulo de 45°, como se muestra a continuación:





Conclusión

Las razones trigonométricas para los ángulos 30°, 45° y 60° se resumen en la siguiente tabla.

θ	30°	45°	60°
sen θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan θ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Cuando se calculen las razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60° hay que utilizar los valores que aparecen en el cuadro.

Problemas

Encuentra las razones trigonométricas secante, cosecante y cotangente para los ángulos 30°, 45° y 60°.

Indicador de logro:

1.4 Determina las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.

Secuencia:

En la clase anterior se dedujeron las medidas de los lados de los triángulos notables, por lo que en esta clase se establecen las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.

Propósito:

Establecer las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°, que son base importante para el resto del desarrollo de la unidad.

Solución de problemas:

El problema puede resolverse de dos formas:
- *Forma 1.* Utilizando la definición de las razones cosecante, secante y cotangente.
- *Forma 2.* Utilizando la relación de estas razones con las razones seno, coseno y tangente.

En la siguiente resolución se utiliza la segunda forma.

De los problemas 3, 4 y 5 de la clase 1.2 se sabe que,

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = 1 \div \operatorname{sen}\theta,\quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = 1 \div \cos\theta,\quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = 1 \div \tan\theta.$$

Entonces,

$$\csc 30° = 1 \div \operatorname{sen} 30° = 1 \div \frac{1}{2} = 2,$$

$$\sec 30° = 1 \div \cos 30° = 1 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot 30° = 1 \div \tan 30° = 1 \div \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$\csc 45° = 1 \div \operatorname{sen} 45° = 1 \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\sec 45° = 1 \div \cos 45° = 1 \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\cot 45° = 1 \div \tan 45° = 1 \div 1 = 1.$$

$$\csc 60° = 1 \div \operatorname{sen} 60° = 1 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

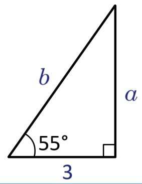
$$\sec 60° = 1 \div \cos 60° = 1 \div \frac{1}{2} = 2,$$

$$\cot 60° = 1 \div \tan 60° = 1 \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1.5 Triángulo rectángulo conocidos un lado y un ángulo agudo

Problema inicial

Dado el siguiente triángulo, encuentra la medida de los dos lados faltantes. Aproxima hasta las décimas.



Solución

Como se conoce el valor de uno de los ángulos agudos del triángulo se pueden utilizar las razones trigonométricas para calcular la medida de los lados faltantes.

Se sabe que tan 55° = $\frac{a}{3}$, entonces a = 3tan 55°. Como 55° no es un ángulo de un triángulo notable, se calcula el valor de tan 55° con la calculadora, pero antes hay que configurarla de modo que los ángulos estén medidos en grados, realizando los siguientes pasos:

Presionar la tecla MODE dos veces y presionar la tecla 1.

Ahora que está configurada la calculadora, se introduce tan 55° como se muestra a continuación:

tan 5 5 = $\Rightarrow$ Pantalla de la calculadora: tan 55 — 1.428148007

Aproximando a un decimal se tiene que a = 3tan 55° ≈ 3(1.4) = 4.2. Para calcular el valor de b se considera el hecho que

$$\cos 55° = \frac{3}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{\cos 55°}$$

3 ÷ cos 5 5 = $\Rightarrow$ Pantalla de la calculadora: 3÷cos 55 — 5.230340387

Por lo tanto, $a \approx 4.2$ y $b \approx 5.2$.

> Dependiendo del modelo de la calculadora, la tecla MODE puede aparecer de dos formas.
> MODE CLR   MODE SETUP
> Si tu calculadora tiene la segunda opción, debes presionar las teclas
> SHIFT   MODE SETUP
> y luego presionar la tecla 3.

> En la calculadora, la función seno aparece como sin.

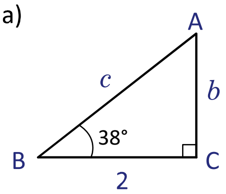
Conclusión

Dadas la medida de un lado y de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo pueden encontrarse las medidas de los lados restantes utilizando las razones trigonométricas del ángulo agudo.

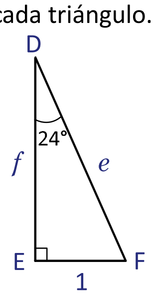
Problemas

Encuentra la medida de los lados faltantes en cada triángulo.

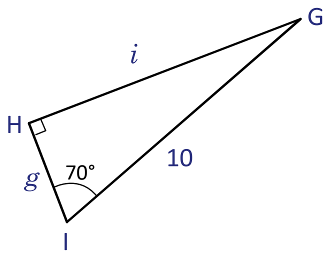
a)



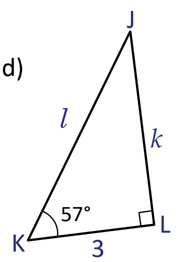
b)



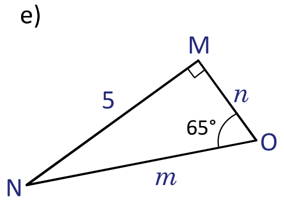
c)



d)



e)



130

Indicador de logro:

1.5 Encuentra la medida de los lados de un triángulo rectángulo conocidas la medida de un lado y un ángulo agudo utilizando razones trigonométricas.

Secuencia:

Luego de haber establecido las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°, se calculan las medidas de los lados de un triángulo rectángulo utilizando razones trigonométricas, cuando se conocen la medida de uno de sus lados y un ángulo agudo. Se introduce además, el uso de la calculadora científica para el cálculo de razones trigonométricas distintas a las de los ángulos de 30° 45° y 60°.

Posibles dificultades:

El uso de la calculadora científica aporta dificultad al desarrollo de la clase, por lo tanto, es importante guiar al estudiante en el uso correcto de esta y recordarle en repetidas ocasiones que debe estar configurada en grados y no en radianes o gradianes. Véase la página 160 del Libro de texto.

Solución de problemas:

a) $\tan 38° = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2\tan 38° \approx 1.6.$

$\cos 38° = \frac{2}{c} \Rightarrow c = \frac{2}{\cos 38°} \approx 2.5.$

Por lo tanto, $b \approx 1.6$ y $c \approx 2.5$.

b) $\operatorname{sen} 24° = \frac{1}{e} \Rightarrow e = \frac{1}{\operatorname{sen} 24°} \approx 2.5.$

$\tan 24° = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{\tan 24°} \approx 2.2.$

Por lo tanto, $e \approx 2.5$ y $f \approx 2.2$.

c) $\cos 70° = \frac{g}{10} \Rightarrow g = 10\cos 70° \approx 3.4.$

$\operatorname{sen} 70° = \frac{i}{10} \Rightarrow i = 10\operatorname{sen} 70° \approx 9.4.$

Por lo tanto, $g \approx 3.4$ y $i \approx 9.4$.

d) $\tan 57° = \frac{k}{3} \Rightarrow k = 3\tan 57° \approx 4.6.$

$\cos 57° = \frac{3}{l} \Rightarrow l = \frac{3}{\cos 57°} \approx 5.5.$

Por lo tanto, $k \approx 4.6$ y $l \approx 5.5$.

e) $\operatorname{sen} 65° = \frac{5}{m} \Rightarrow m = \frac{5}{\operatorname{sen} 65°} \approx 5.5.$

$\tan 65° = \frac{5}{n} \Rightarrow n = \frac{5}{\tan 65°} \approx 2.3.$

Por lo tanto, $m \approx 5.5$ y $n \approx 2.3$.

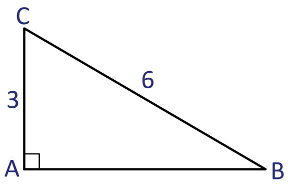
No es obligatorio utilizar la tangente y el coseno para calcular las medidas de los lados del triángulo; es decir, también puede utilizarse la razón seno. Se sugiere que, siempre que sea posible, se use una razón trigonométrica donde el valor que se desea encontrar quede como numerador, ya que se facilita el despeje de la incógnita.

1.6 Triángulo rectángulo conocidos dos lados

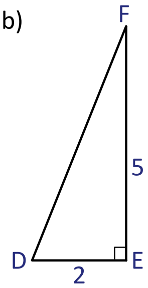
Problema inicial

En los siguientes triángulos, encuentra las medidas de los ángulos agudos.

a)



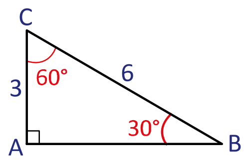
b)



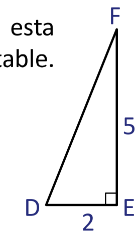
En un triángulo ABC, se suele denotar a la medida del ángulo C por *C* (en cursiva).

Solución

a) Obsérvese que $\cos C = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. El ángulo que cumple esta condición es el ángulo de 60°, por lo tanto $C = 60°$ y $B = 30°$.



b) Del triángulo se tiene que $\tan D = \frac{5}{2}$. Para encontrar el valor del ángulo D que cumpla esta condición se utilizará una calculadora ya que la razón no corresponde a algún triángulo notable.



$\Longrightarrow$

Pantalla de la calculadora

tan⁻¹(5÷2)
68.19859051

Aproximando a las décimas, se tiene que $D \approx 68.2°$. Luego, $F \approx 90° - 68.2° = 21.8°$.

La función de la calculadora $\tan^{-1}$ devuelve un ángulo que cumpla la condición que se le indique. Por ejemplo, $\tan^{-1}\frac{5}{2}$ devuelve el ángulo θ que cumple que $\tan\theta = \frac{5}{2}$, con θ entre –90° y 90°.

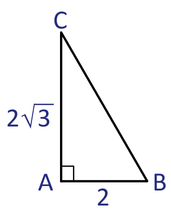
Conclusión

Dadas las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo se pueden encontrar los ángulos agudos utilizando las razones trigonométricas.

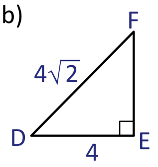
Problemas

Encuentra la medida de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos.

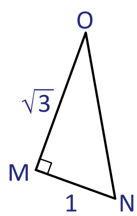
a)



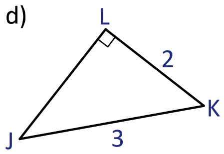
b)



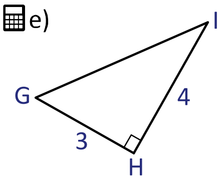
c)



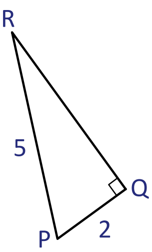
d)



e)



f)



Indicador de logro:

1.6 Encuentra la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo conocidas las medidas de dos lados, utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Secuencia:

En esta clase se calculan ángulos agudos de triángulos rectángulos cuando se conocen las medidas de dos lados, utilizando las razones trigonométricas. Se utiliza la calculadora nuevamente, en esta ocasión para calcular ángulos.
No se profundiza sobre las razones trigonométricas inversas, ya que esto requiere del conocimiento de funciones biyectivas e inversas, tema que se estudiará en segundo año de bachillerato.

Propósito:

En el Problema inicial se calculan ángulos de triángulos rectángulos. En el literal a se obtiene una razón trigonométrica conocida, es decir, pueden determinarse los ángulos sin calculadora. En el literal b, en cambio, la razón no es conocida, por lo que se calculan los ángulos utilizando las funciones trigonométricas inversas de la calculadora.

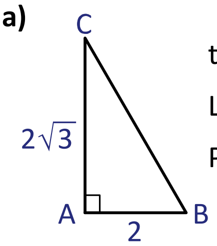
Posibles dificultades:

El uso de la calculadora para determinar ángulos al conocer el valor de la razón trigonométrica, ya que la calculadora se encuentre configurada en grados. El estudiante debe practicar para que comprenda que las teclas $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ devuelven medidas de ángulos.

Hay que utilizar la calculadora únicamente cuando aparece el ícono de esta.

Solución de problemas:

a)

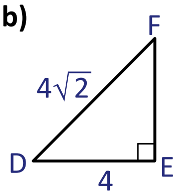


$\tan B = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow B = 60°$.

Luego, $C = 30°$.

Por lo tanto, $B = 60°$ y $C = 30°$.

b)

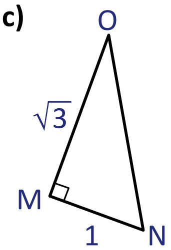


$\cos D = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow D = 45°$.

Por lo tanto, $D = F = 45°$.

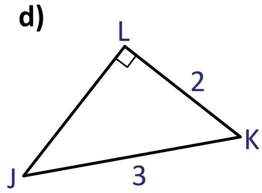
c)



$\tan N = \sqrt{3} \Rightarrow N = 60°$.

Por lo tanto, $N = 60°$ y $O = 30°$.

d)

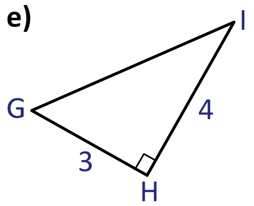


$\cos K = \frac{2}{3} \Rightarrow K \approx 48.2°$.

Luego, $J \approx 90° - 48.2° = 41.8°$.

Por lo tanto, $J \approx 41.8°$ y $K \approx 48.2°$.

e)

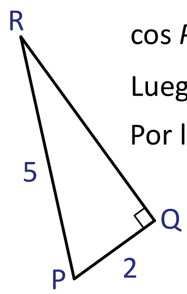


$\tan G = \frac{4}{3} \Rightarrow G = 53.1°$.

Luego, $I \approx 90° - 53.1° = 36.9°$.

Por lo tanto, $G \approx 53.1°$ e $I \approx 36.9°$.

f)



$\cos P = \frac{2}{5} \Rightarrow P \approx 66.4°$.

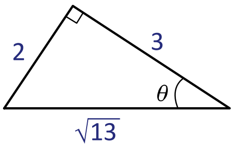
Luego, $R \approx 90° - 66.4° = 23.6°$.

Por lo tanto, $P \approx 66.4°$ y $R \approx 23.6°$.

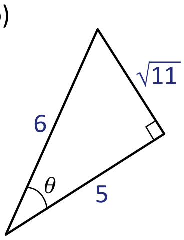
1.7 Practica lo aprendido

1. Determina las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ para cada uno de los siguientes triángulos.

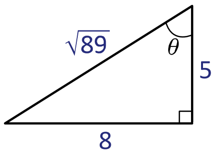
a)



b)

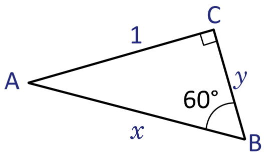


c)

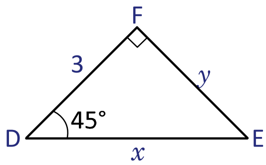


2. Determina el valor de x y y en cada triángulo.

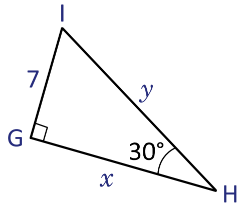
a)



b)

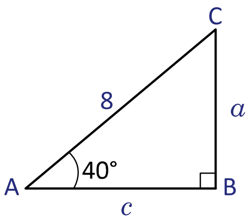


c)

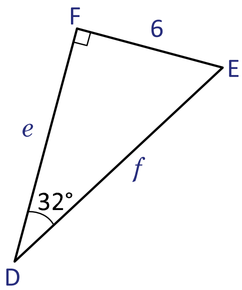


3. Calcula la medida de los lados faltantes en cada triángulo. Aproxima tu respuesta hasta las décimas.

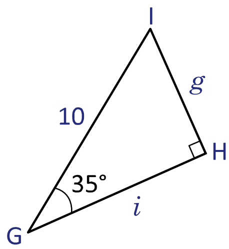
a)



b)

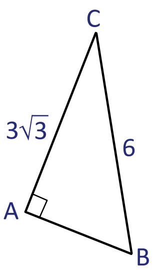


c)

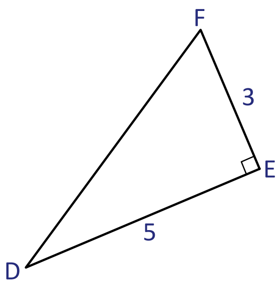


4. Calcula la medida de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos hasta las décimas.

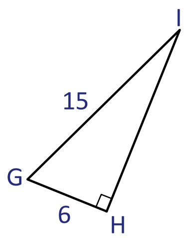
a)



b)



c)



Indicador de logro:

1.7 Resuelve problemas correspondientes a razones trigonométricas de ángulos agudos de triángulos rectángulos.

Solución de problemas:

1a) Como *hip* = $\sqrt{13}$, *op* = 2 y *ady* = 3, entonces,

$$\text{sen } \theta = \frac{op}{hip} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13},\ \cos \theta = \frac{ady}{hip} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},\ \tan \theta = \frac{op}{ady} = \frac{2}{3}.$$

1b) Como *hip* = 6, *op* = $\sqrt{11}$ y *ady* = 5, entonces,

$$\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{11}}{6},\ \cos \theta = \frac{5}{6},\ \tan \theta = \frac{\sqrt{11}}{5}.$$

1c) Como *hip* = $\sqrt{89}$, *op* = 8 y *ady* = 5, entonces,

$$\text{sen } \theta = \frac{8}{\sqrt{89}} = \frac{8\sqrt{89}}{89},\ \cos \theta = \frac{5}{\sqrt{89}} = \frac{5\sqrt{89}}{89},\ \tan \theta = \frac{8}{5}.$$

2a) Utilizando semejanza con el triángulo de 30° y 60°:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\frac{y}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2b) Como ΔDEF es isósceles, $y = 3$. Por otra parte, utilizando semejanza con el triángulo de 45°:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{3}{1} \Rightarrow x = 3\sqrt{2}.$$

Este problema también puede resolverse utilizando solo semejanza, es decir, sin utilizar el hecho de que el triángulo es isósceles, o aplicando el teorema de Pitágoras.

2c) Utilizando semejanza con el triángulo de 30° y 60°:

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{7}{1} \Rightarrow x = 7\sqrt{3},\quad \frac{y}{2} = \frac{7}{1} \Rightarrow y = 14.$$

3a) $\cos 40° = \frac{c}{8} \Rightarrow c = 8 \cos 40° \approx 6.1,$

$\text{sen } 40° = \frac{a}{8} \Rightarrow a = 8 \text{ sen } 40° \approx 5.1.$

Por lo tanto, $c \approx 6.1$ y $a \approx 5.1$.

3b) $\tan 32° = \frac{6}{e} \Rightarrow e = \frac{6}{\tan 32°} \approx 9.6,$

$\text{sen } 32° = \frac{6}{f} \Rightarrow f = \frac{6}{\text{sen } 32°} \approx 11.3.$

Por lo tanto, $e \approx 9.6$ y $f \approx 11.3$.

3c) $\cos 35° = \frac{i}{10} \Rightarrow i = 10 \cos 35° \approx 8.2$, $\text{sen } 35° = \frac{g}{10} \Rightarrow g = 10 \text{ sen } 35° \approx 5.7.$

Por lo tanto, $i \approx 8.2$ y $g \approx 5.7$.

4a) Se tiene que $\cos C = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C = 30°.$

Por lo tanto, $B = 60°$ y $C = 30°$.

4b) Como $\tan D = \frac{3}{5} \Rightarrow D = 31°.$

Luego, $F \approx 90° - 31° = 59°.$

Por lo tanto, $D \approx 31°$ e $F \approx 59°$.

4c) Como $\cos G = \frac{6}{15} \Rightarrow G = 66.4°$. Luego, $I \approx 90° - 66.4° = 23.6°$.

Por lo tanto, $G \approx 66.4°$ e $I \approx 23.6°$.

Lección 1

1.8 Aplicación de las razones trigonométricas

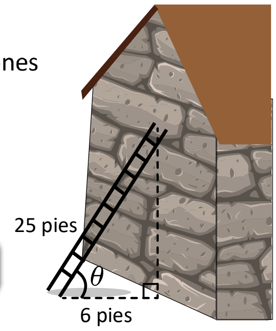
Problema inicial

Un carpintero compra una escalera de 25 pies y en las instrucciones de uso dice que la posición más segura para ubicarla sobre la pared es cuando el pie de la escalera se encuentra a 6 pies de la pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo?

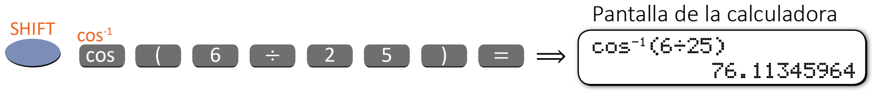
Solución

Se puede formar un triángulo rectángulo, como muestra la figura. Aplicando razones trigonométricas se tiene que

$$\cos\theta = \frac{6}{25}.$$



Utilizando la calculadora para calcular el ángulo se tiene



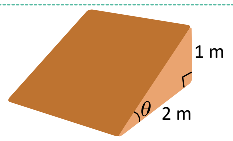
Entonces, el ángulo que forma la escalera con el suelo es aproximadamente 76°.

Conclusión

Las razones trigonométricas pueden utilizarse para calcular ángulos de inclinación que forman algunos objetos con superficies planas, para calcular distancias entre dos objetos o alturas de edificios o árboles.

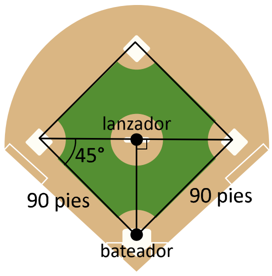
Problemas

1. Un patinador hará una pirueta sobre una rampa cuyo largo es de 2 metros. Si la altura de la rampa es de 1 metro, ¿cuál es el ángulo de inclinación de la rampa?

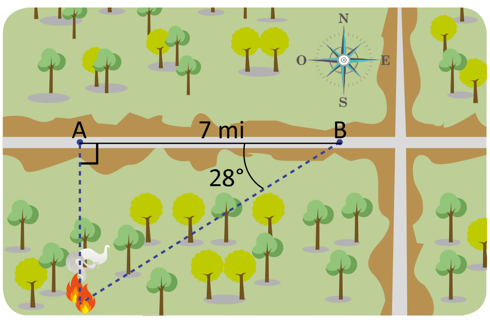


2. Las tres bases por las que debe pasar un beisbolista están sobre un cuadrado de 90 pies, como muestra la figura. ¿A qué distancia se encuentra el lanzador del bateador?

3. Una escalera de 20 pies yace sobre una pared y alcanza una altura de 16 pies, ¿cuál es el ángulo de inclinación de la escalera con respecto al suelo?



4. Un guardabosques que se encuentra en el punto A observa un incendio directamente al sur. Un segundo guardabosques en el punto B, a 7 millas del primer guardabosques observa el mismo incendio a 28° al suroeste, ¿qué tan lejos está el incendio del primer guardabosques?



Unidad 5

Indicador de logro:

1.8 Utiliza triángulos rectángulos y razones trigonométricas para resolver problemas del entorno.

Secuencia:

Luego de haber resuelto problemas que requieran de la aplicación de razones trigonométricas para calcular ángulos o medidas de lados de triángulos rectángulos, se abordan problemas del entorno que pueden resolverse utilizando triángulos rectángulos y razones trigonométicas.

Propósito:

Con el Problema inicial se introduce el uso de las razones trigonométricas para resolver problemas del entorno. La elaboración de gráficos sencillos como ayuda visual para la resolución de los problemas es importante en este punto.

Solución de problemas:

1. De los datos que muestra la figura se tiene que tan $\theta = \frac{1}{2}$. Así, $\theta \approx 26.6°$. Por lo tanto, el ángulo de inclinación de la rampa es de 26.6° aproximadamente.

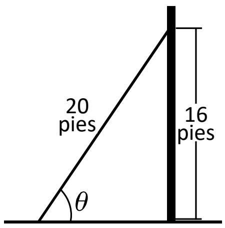
2. Se define d como la distancia entre el lanzador y el bateador. Puede observarse que sen 45° = $\frac{d}{90}$, entonces d = 90 sen 45° = $90\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45\sqrt{2}$. Es decir, $d \approx 63.6$.
Por lo tanto, la distancia a la que se encuentra el lanzador del bateador es de 63.6 pies aproximadamente.

3. Realizando un gráfico y ubicando los datos:

Con los datos que se conocen puede establecerse que

$$\text{sen } \theta = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

Es decir, $\theta \approx 53.1°$. Por lo tanto, el ángulo de inclinación de la escalera con respecto al suelo es de 53.1° aproximadamente.

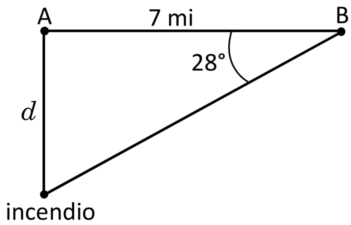


4. Los datos que se tienen se muestran en el siguiente gráfico:

Con los datos que se conocen puede establecerse que

$$\tan 28° = \frac{d}{7} \Rightarrow d = 7 \tan 28° \approx 3.7.$$

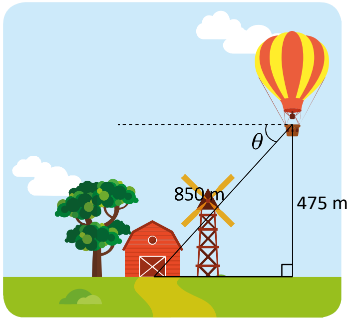
Por lo tanto, el primer guardabosques se encuentra a 3.7 millas aproximadamente del incendio.



1.9 Ángulo de depresión

Problema inicial

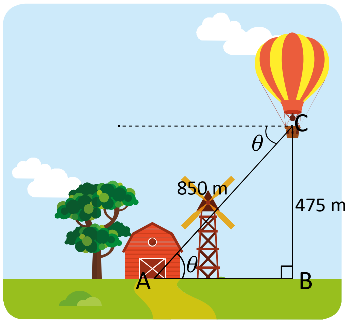
Un fotógrafo profesional desea tomarle una foto a una granja que observa desde un globo aerostático que está a una altura aproximada de 475 metros del suelo y a una distancia de 850 metros de la granja, observa la figura. ¿Cuánto mide el ángulo θ si la línea punteada es horizontal?



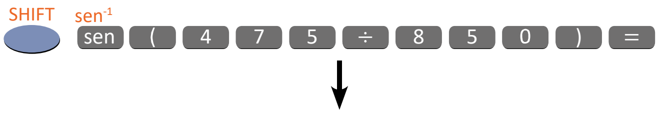
Solución

Se etiquetan con A, B y C los vértices del triángulo formado, como muestra la figura. Entonces, $\sphericalangle CAB = \theta$ ya que la línea punteada es paralela a $\overline{AB}$. Utilizando razones trigonométricas, se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{475}{850}.$$



Utilizando la calculadora,



Pantalla de la calculadora

```
sen⁻¹(475÷850)
           33.97447595
```

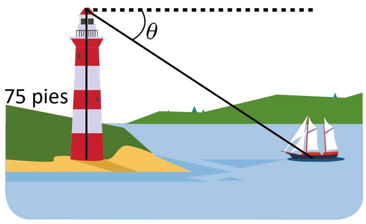
Por lo tanto, $\theta \approx 34°$.

Definición

Si un observador se encuentra por encima de un objeto, al ángulo que se forma entre una línea horizontal imaginaria y la línea de visión hacia el objeto se le llama **ángulo de depresión**. Por ejemplo, el ángulo θ que aparece en el dibujo del Problema inicial es un ángulo de depresión.

Problemas

1. Un faro tiene 75 pies de altura, y desde la punta de este se observa un bote de modo que el coseno del ángulo de depresión es $\frac{4}{5}$, ¿qué tan lejos está el bote del faro?



2. Desde la parte alta de un viejo edificio, un niño observa a un perro que se encuentra en la calle, de modo que se forma un ángulo de depresión de 37°. Si la altura del edificio es de 9 m, ¿a qué distancia de la base del edificio se encuentra el perro?

3. Un edificio tiene 100 metros de altura, y desde su punto más alto hay una persona observando unas ardillas comiendo en el suelo. La tangente del ángulo de depresión del observador es $\frac{5}{4}$, ¿a qué distancia están las ardillas de la base del edificio?

4. Una persona que mide 1.5 metros se encuentra en un muelle que sobresale 3.5 metros por encima del mar. La persona observa un bote con un ángulo de depresión de 10°, ¿a qué distancia está el bote del muelle?

Indicador de logro:

1.9 Utiliza las razones trigonométricas para calcular ángulos de depresión en problemas del entorno.

Secuencia:

En esta clase se continúa con problemas de aplicación de la trigonometría; en esta ocasión se abordan problemas sobre ángulos de depresión. La elaboración de gráficos sencillos para la resolución de los problemas continúa siendo importante.

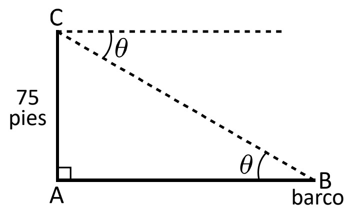
Propósito:

El Problema inicial pretende introducir la definición de ángulo de depresión y seguir consolidando el uso de las razones trigonométricas para resolver problemas del entorno.

Solución de problemas:

1. Elaborando un gráfico y ubicando los datos que se conocen, se tiene el dibujo de la derecha.
Por ángulos alternos internos entre paralelas, el ángulo ABC es igual a θ. Entonces,

$$\cos\theta = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \theta \approx 36.9°.$$



Luego, $\tan\theta = \frac{\text{AC}}{\text{AB}} \Rightarrow \tan 36.9° \approx \frac{75}{\text{AB}} \Rightarrow \text{AB} \approx \frac{75}{\tan 36.9°} \approx 99.9.$

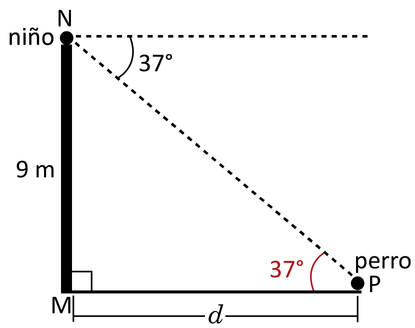
Por lo tanto, el bote está a 99.9 millas del faro aproximadamente.

La forma de elaborar los gráficos es variada. El objetivo de hacer el gráfico es dar apoyo visual en la resolución de los problemas.

2. Elaborando un gráfico y ubicando los datos, se obtiene un gráfico como el de la derecha.
Por ángulos alternos internos entre paralelas, el ángulo MPN es igual a 37°. Entonces,

$$\tan 37° = \frac{9}{d} \Rightarrow d = \frac{9}{\tan 37°} \approx 11.9.$$

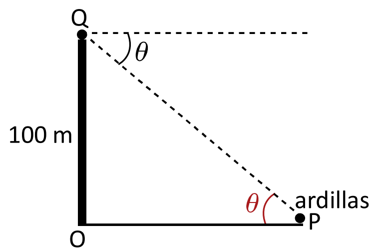
Por lo tanto, el perro se encuentra aproximadamente a 11.9 metros de la base del edificio.



3. Al elaborar un gráfico, como muestra la figura de la derecha, se deduce que el ángulo OPQ es igual a θ, por ángulos alternos internos entre paralelas. Luego,

$$\tan\theta = \frac{\text{OQ}}{\text{OP}} = \frac{100}{\text{OP}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \text{OP} = \frac{4(100)}{5} = 80.$$

Por lo tanto, las ardillas están a 80 metros de la base del edificio.

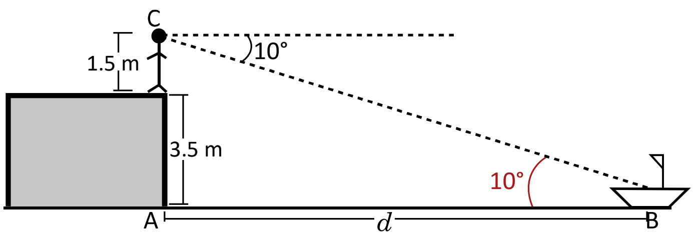


4. Se elabora un gráfico y se ubican los datos, como muestra la figura de la derecha. El ángulo ABC es igual a 10°, por ángulos alternos internos.

Luego,

$$\tan 10° = \frac{3.5 + 1.5}{d} = \frac{5}{d} \Rightarrow d = \frac{5}{\tan 10°} \approx 28.4.$$

Por lo tanto, el bote está a 28.4 metros del muelle aproximadamente.



1.10 Ángulo de elevación

Problema inicial

Un guardabosques quiere calcular la altura de un árbol y para ello se coloca a 7 metros de la base del árbol y observa la punta de este con un ángulo de 74°. Si la altura del guardabosques es de 1.6 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

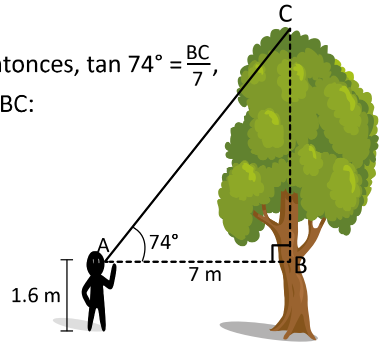
Solución

Se forma un triángulo rectángulo auxiliar ABC como muestra la figura. Entonces, $\tan 74° = \frac{BC}{7}$, por lo que $BC = 7\tan 74°$. Se puede utilizar la calculadora para encontrar BC:

Pantalla de la calculadora

7 × tan 7 4 = ⟹ 7×tan 74 24.41190111

Al valor de BC hay que sumarle la altura del guardabosques, por lo que la altura del árbol es aproximadamente 24.4 + 1.6 = 26 metros.



Definición

Si un observador se encuentra por debajo de un objeto, al ángulo que se forma entre una línea horizontal imaginaria y la línea de visión hacia el objeto se le llama **ángulo de elevación**. Por ejemplo, del gráfico del Problema inicial, el ángulo de elevación es ∢CAB.

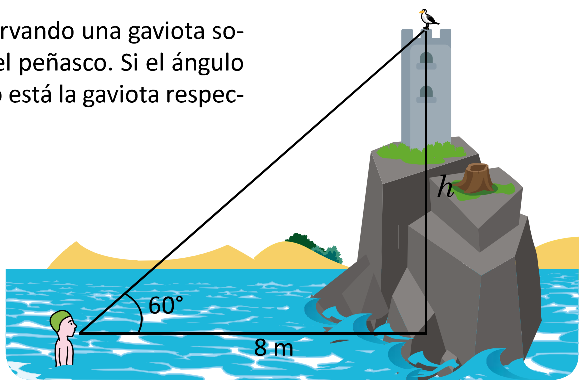
Problemas

1. Una guardabosques debe entrenar a un nuevo equipo de madereros para calcular la altura de los árboles. Como ejemplo, ella camina a 12 metros de la base de un árbol y estima que el ángulo de elevación desde el suelo a la punta del árbol es de 70°. Calcula la altura del árbol.

2. Para calcular la altura a la que se encuentra una nube del suelo durante la noche, se dirige un rayo vertical de luz hacia un punto de ella. En algún punto sobre el suelo, a 135 pies de donde se emite el rayo, se determina que el ángulo de elevación hacia el tope del rayo es de 65°. ¿Cuál es la altura a la que se encuentra la nube?

3. Un niño está a 2 metros de un árbol y observa a un gato que ha quedado atrapado en la punta del árbol. Si la altura del niño es de 1 metro y el ángulo de elevación es de 60°, ¿a qué altura está el gato del suelo?

4. Un nadador está a 8 metros de un peñasco observando una gaviota sobre la punta de un viejo edificio que está sobre el peñasco. Si el ángulo de elevación del nadador es de 60°, ¿qué tan alto está la gaviota respecto al nivel del mar?



Unidad 5

Indicador de logro:

1.10 Utiliza las razones trigonométricas para calcular ángulos de elevación en problemas del entorno.

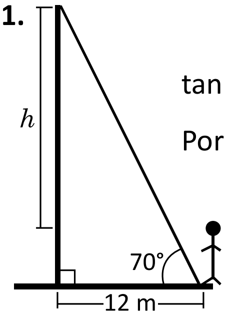
Secuencia:

Luego de haber introducido el ángulo de depresión, se introduce el ángulo de elevación y se resuelven problemas del entorno que lo involucren.

Solución de problemas:

Para los problemas que no tienen dibujo en su enunciado, se elabora un gráfico sencillo para facilitar su resolución.

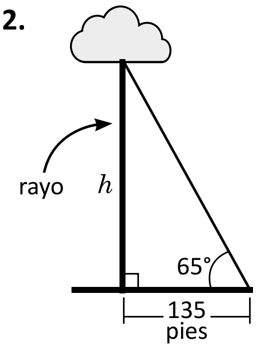
1.



$\tan 70° = \frac{h}{12} \Rightarrow h = 12 \tan 70° \approx 33.$

Por lo tanto, la altura del árbol es de aproximadamente 33 metros.

2.

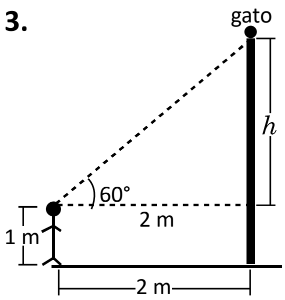


$\tan 65° = \frac{h}{135} \Rightarrow h = 135 \tan 65° \approx 289.5.$

Por lo tanto, la nube está a 289.5 pies del suelo aproximadamente.

En los problemas donde intervengan personas y su altura, se desprecia la distancia que hay desde los ojos hasta el límite de la cabeza.

3.



$\tan 60° = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2 \tan 60° = 2\sqrt{3} \approx 3.5.$

Luego, la altura a la que se encuentra el gato es de 3.5 + 1 = 4.5 metros aproximadamente.

4. De los datos proporcionados y del dibujo mostrado en el problema se tiene que

$$\tan 60° = \frac{h}{8} \Rightarrow h = 8 \tan 60° = 8\sqrt{3} \approx 13.9.$$

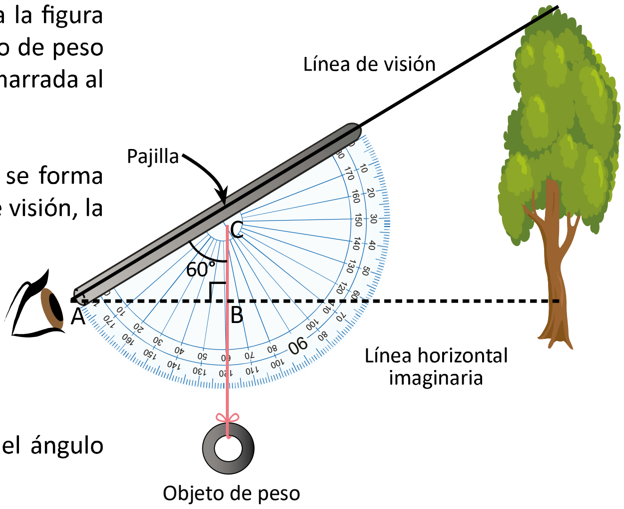
Por lo tanto, la gaviota está aproximadamente a 13.9 metros del nivel del mar.

1.11 Actividad. Construcción de un clinómetro

Un clinómetro es un aparato que se utiliza para medir inclinaciones en superficies, aunque también se utiliza para calcular alturas de edificios, árboles, postes, etc. Los clinómetros profesionales son sencillos de utilizar, y esta actividad muestra cómo construir uno.

Funcionamiento de un clinómetro

El observador coloca el clinómetro como muestra la figura y a través de un tubo observa el objeto. Un objeto de peso está amarrado a una cuerda y esta a su vez está amarrada al transportador.



Al colocar el clinómetro como muestra la figura, se forma un triángulo rectángulo (el ΔABC) entre la línea de visión, la línea horizontal imaginaria y el trozo de cuerda tensado. El ángulo que marca la cuerda en el transportador es el ángulo BCA. Entonces, en el ΔABC se tiene que:

$$\measuredangle CAB = 90° - \measuredangle BCA = 90° - 60° = 30°.$$

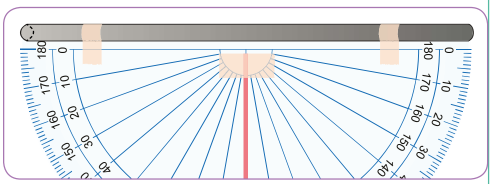
Se puede observar que con este procedimiento, el ángulo calculado corresponde al ángulo de elevación.

Materiales

- Un transportador
- Una pajilla
- Cinta adhesiva
- Lana o un trozo de cuerda
- Tijeras
- Un objeto pesado, puede ser una tuerca de 20 mm

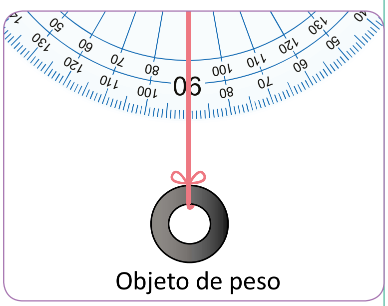
Actividad

1. Algunos transportadores tienen un hueco en su centro, por lo que puede amarrarse un trozo de cuerda en este hueco. Si no tiene el hueco, puede pegarse con un trozo de cinta adhesiva, donde está el centro del transportador. La longitud del trozo de cuerda debe sobrepasar al radio del transportador.



2. Cortar un trozo de pajilla, con longitud igual al diámetro del transportador. Pegar el trozo de pajilla con cinta adhesiva, con cuidado de no apretarla ya que hay que ver a través de ella.

3. En el extremo de la cuerda que quedó libre, amarrar la tuerca.



El clinómetro está listo para utilizarse.

Problemas

1. Calcula la altura de un árbol que se encuentre a tu alrededor utilizando el clinómetro para determinar el ángulo de elevación.
2. Con el clinómetro construido en la Actividad 1.11, ¿puedes calcular ángulos de depresión? Si la respuesta es afirmativa, explica cómo.

Indicador de logro:

1.11 Construye un clinómetro casero para hacer mediciones de ángulos de elevación.

Secuencia:

Luego de haber calculado ángulos de depresión y elevación, se elabora un clinómetro como herramienta para medir ángulos de elevación en el entorno.

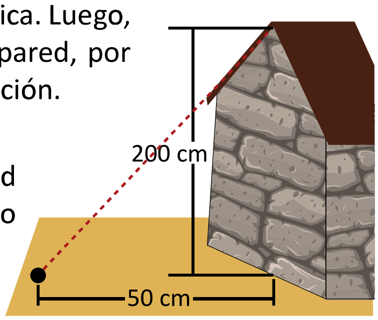
Propósito:

Construir una herramienta que sirva para medir ángulos de elevación, además de deducir el funcionamiento de dicha herramienta utilizando ángulos.

Solución de problemas:

1. Pueden medirse otros ángulos de elevación, como por ejemplo, el ángulo de elevación al observar el tope de un aro de baloncesto.

Como la idea es comprobar que el clinómetro funciona para el cálculo de la altura de objetos, puede medirse previamente una pared, con una cinta métrica. Luego, se ubica un punto en el suelo desde donde se medirá el tope de la pared, por ejemplo, a 50 centímetros, y a partir de ahí se mide el ángulo de elevación.

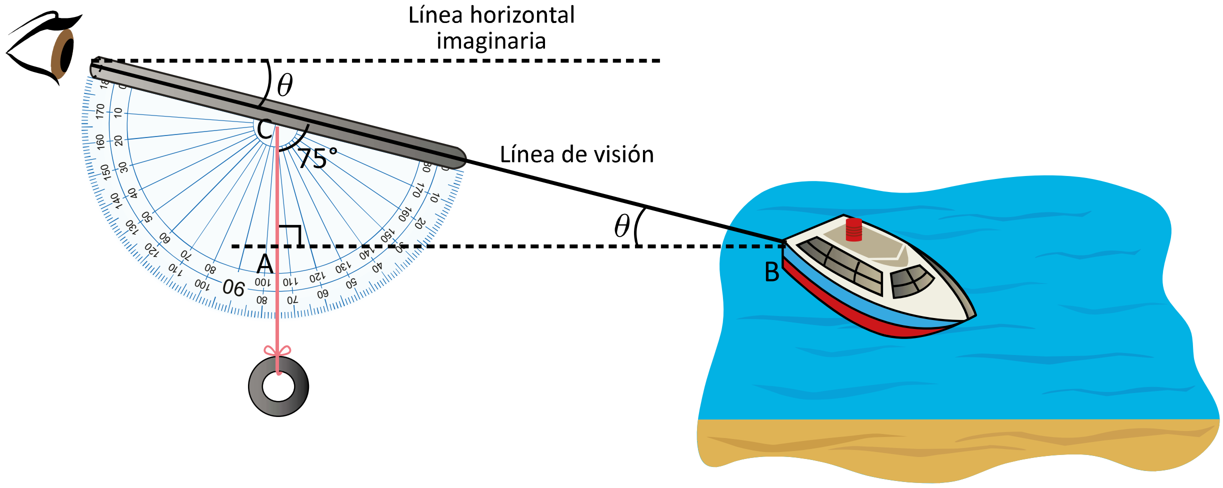


Al medir el ángulo de elevación, puede calcularse la altura de la pared utilizando la tangente del ángulo. Luego, se compara el valor obtenido con la altura original de la pared.

Este es un ejemplo, sin embargo, la pared puede tener menos altura y el punto en el suelo puede estar más lejos o más cerca.

El ángulo de elevación dependerá de la altura de la persona que haga la medición.

2. Se puede observar un objeto que esté por debajo de la línea horizontal imaginaria y al realizar esta acción, se obtiene un esquema como el siguiente:



Haciendo un análisis parecido al que se hizo con la medición de los ángulos de elevación, se tiene que el ángulo que marca la cuerda es el ángulo BCA del triángulo ABC. Además, el ángulo ABC del triángulo es igual al ángulo de depresión, θ. Entonces, del triángulo rectángulo ABC se tiene que $\theta = 90° - 75° = 15°$.

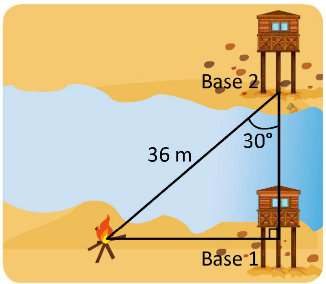
Por lo tanto, con el clinómetro se pueden medir ángulos de depresión, y es igual al complemento del ángulo que marca la cuerda de este.

1.12 Aplicaciones de las razones trigonométricas

1. Un pescador está a 12 km de un barco que se encuentra al este de él y observa un faro a 60° desde la línea de visión con el barco. ¿A qué distancia está el barco del faro si se encuentra en dirección sur del barco?

2. Un globo aerostático es amarrado a una roca con un lazo de 20 metros. El seno del ángulo que forma el lazo con el suelo es $\frac{3}{4}$, ¿qué tan alto está el globo?

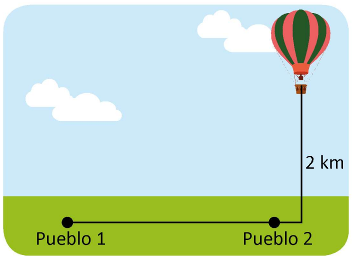
3. En el dibujo, ¿cuál es la distancia entre la Base 1 y la fogata?



4. Un hombre observa desde el tope de un faro una embarcación pesquera y estima que el ángulo de depresión es de 25°. Si la altura del faro es de 40 metros, ¿a qué distancia está la embarcación del faro?

5. Un hombre se encuentra en un edificio observando otro edificio que está a 100 m de distancia. El ángulo de elevación al tope del edificio es de 30° y el ángulo de depresión a la base es de 15°, ¿cuál es la altura del edificio que observa? Desprecia la altura del hombre.

6. Desde un globo aerostático a 2 km de altura, se observan dos pueblos. El ángulo de depresión a ambos pueblos es de 80° y 20°. ¿Qué distancia hay entre los pueblos?



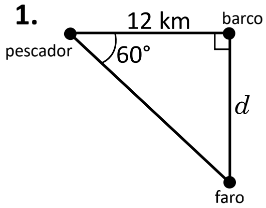
Unidad 5

Indicador de logro:

1.12 Resuelve problemas correspondientes a las aplicaciones de las razones trigonométricas al entorno.

Solución de problemas:

1.

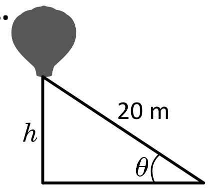


$\tan 60° = \frac{d}{12}$

$\Rightarrow d = 12 \tan 60° = 12\sqrt{3} \approx 20.8.$

Por lo tanto, el barco está a 20.8 kilómetros del faro aproximadamente.

2.



$\text{sen}\ \theta = \frac{3}{4} = \frac{h}{20} \Rightarrow h = \frac{3(20)}{4} = 15.$

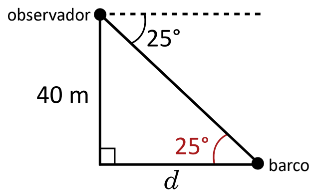
Por lo tanto, el globo está a 15 metros del suelo.

3. Sea d la distancia entre la Base 1 y la fogata. Entonces $\text{sen}\ 30° = \frac{d}{36} \Rightarrow d = 36\ \text{sen}\ 30° = 36\left(\frac{1}{2}\right) = 18.$

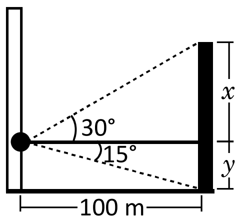
Por lo tanto, la Base 1 está a 18 metros de la fogata.

4. $\tan 25° = \frac{40}{d} \Rightarrow d = \frac{40}{\tan 25°} \approx 85.8.$

Por lo tanto, la embarcación está aproximadamente a 85.8 metros del faro.



5.



$\tan 30° = \frac{x}{100}$

$\Rightarrow x = 100 \tan 30°$

$\tan 15° = \frac{y}{100}$

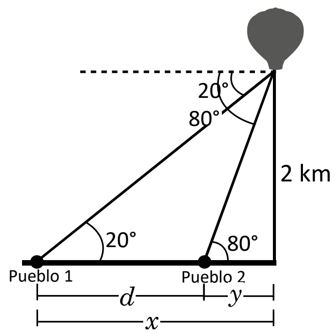
$\Rightarrow y = 100 \tan 15°$

La altura del edificio que observa el hombre es

$$\begin{aligned} x + y &= 100 \tan 30° + 100 \tan 15° \\ &= 100(\tan 30° + \tan 15°) \\ &\approx 84.5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la altura del edificio que el hombre observa es de 84.5 metros.

6.



$\tan 20° = \frac{2}{x}$

$\Rightarrow x = \frac{2}{\tan 20°}$

$\tan 80° = \frac{2}{y}$

$\Rightarrow y = \frac{2}{\tan 80°}$

Luego, $d = x - y = \frac{2}{\tan 20°} - \frac{2}{\tan 80°} \approx 5.1.$

Por lo tanto, los pueblos están aproximadamente a 5.1 kilómetros de distancia.

Se recomienda hacer el cálculo hasta el final, para tener una mejor aproximación.

Si hay confusión en la pregunta del problema 6, hay que aclarar que se refiere a la distancia que hay entre los pueblos.

Lección 2 Razones trigonométricas de ángulos no agudos

2.1 Distancia entre dos puntos

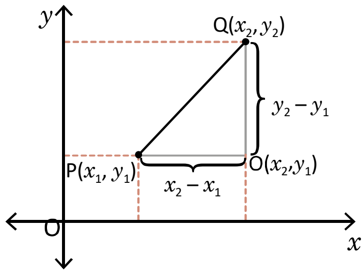
Problema inicial

Dados dos puntos P(x_1, y_1) y Q(x_2, y_2) en el plano cartesiano, ¿cuál es la distancia entre los puntos?

Se define la distancia entre dos puntos como la longitud del segmento de recta que une ambos puntos.

Solución

Supóngase que $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$. Si se trazan rectas perpendiculares a los ejes que pasen por P y Q, como muestra la figura, el punto O tiene coordenadas (x_2, y_1). De aquí se deduce que OP = $x_2 - x_1$ y QO = $y_2 - y_1$. Luego, por el teorema de Pitágoras en el triángulo POQ, se tiene que



$$(\text{PQ})^2 = (\text{OP})^2 + (\text{QO})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Pero PQ > 0 por ser una distancia, entonces

$$\text{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Si $x_1 = x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces la distancia de P a Q sería

$$\Rightarrow \quad \text{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|.$$

De manera análoga, si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 = y_2$, la distancia de P a Q sería

$$\Rightarrow \quad \text{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Para todo número real a se cumple que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Definición

La distancia de dos puntos P y Q en el plano con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, denotada por d(P, Q) está dada por

$$d(\text{P, Q}) = \text{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo

Calcula la distancia entre los puntos P(–1, 3) y Q(2, 1).

La distancia es,

$$\begin{aligned} d(\text{P, Q}) &= \sqrt{(2-(-1))^2 + (1-3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Problemas

1. Calcula la distancia entre los puntos P y Q.

a) P(–2, –1), Q(2, 2)   b) P(7, 2), Q(4, –2)   c) P(2, –2), Q(–8, 4)

d) P(1, 1), Q(9, 2)   e) P(0, 1), Q(3, 5)   f) P(–3, 5), Q(7, –9)

g) P(–1, 4), Q(2, 4)   h) P(3, 2), Q(3, 2)   i) P(–1, 0), Q(–1, 0)

2. Demostrar que si P(x_1, y_1) y Q(x_2, y_2), entonces d(P, Q) = d(Q, P).

Indicador de logro:

2.1 Calcula la distancia entre dos puntos del plano cartesiano.

Secuencia:

Se inicia la lección con la deducción y aplicación de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos ubicados en el plano cartesiano.

Propósito:

Con el Problema inicial se deduce la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, mientras que el Ejemplo muestra la forma de usarla.
Con respecto a la sección de Problemas, el problema 1 refuerza el uso de la fórmula, y el problema 2 muestra el hecho de que la distancia entre dos puntos P y Q es igual a la distancia entre Q y P.

Solución de problemas:

1a) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$

1b) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(4-7)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

1c) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(-8-2)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{(-10)^2 + 6^2} = \sqrt{100+36} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}.$

1d) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(9-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}.$

1e) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(3-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

1f) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(7-(-3))^2 + (-9-5)^2} = \sqrt{10^2 + (-14)^2} = \sqrt{100+196} = \sqrt{296} = 2\sqrt{74}.$

1g) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (4-4)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{3^2} = 3.$

1h) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(3-3)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0.$

También se puede calcular la distancia tomando primero las coordenadas de Q y luego de P, solo hay que tener especial cuidado que debe ser en orden.

1i) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(-1-(-1))^2 + (0-0)^2} = 0.$

2. Se sabe que

$$d(\text{P, Q}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Por otra parte, $(d(\text{Q, P}))^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = [-(x_2 - x_1)]^2 + [-(y_2 - y_1)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$

Pero $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = [d(\text{P, Q})]^2$, por lo tanto,

$$d(\text{P, Q}) = d(\text{Q, P}).$$

Lección 2

2.2 Simetrías en el plano cartesiano*

Problema inicial

Se toma el punto P(a, b) sobre el plano cartesiano. Determina lo siguiente respecto al punto P:

a) Las coordenadas del punto simétrico respecto al eje x.

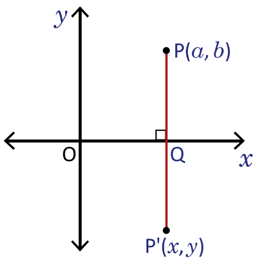
b) Las coordenadas del punto simétrico respecto al eje y.

c) Las coordenadas del punto simétrico respecto al origen.

d) Las coordenadas del punto simétrico respecto a la recta $y = x$.

Solución

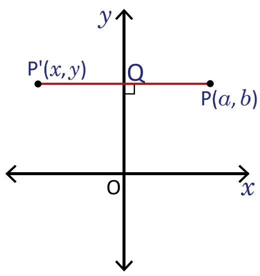
a) Sea P'(x, y) el punto simétrico de P respecto al eje x. Por propiedades de simetría, el segmento PP' es perpendicular al eje x y si Q es la intersección de dicho segmento con el eje, se satisface que PQ = P'Q.



Como el segmento PP' es vertical, solo la segunda coordenada de P' cambia. P y P' están a la misma distancia del eje x, por lo tanto la segunda coordenada de P' es el número opuesto a b, es decir $-b$.

Por lo tanto, el simétrico de P(a, b) respecto al eje x es P'(a, $-b$).

b) Sea P'(x, y) el punto simétrico de P respecto al eje y. Por propiedades de simetría, el segmento PP' es perpendicular al eje y y si Q es la intersección de dicho segmento con el eje, se satisface que PQ = P'Q.

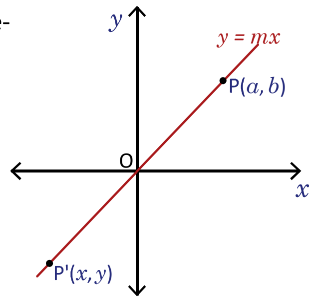


Como el segmento PP' es horizontal, solo la primera coordenada de P' cambia. P y P' están a la misma distancia del eje y, por lo tanto la primera coordenada de P' es el número opuesto a a, es decir $-a$.

Por lo tanto, el simétrico de P(a, b) respecto al eje y es P'($-a$, b).

c) Sea P'(x, y) el simétrico de P respecto al origen O. Por definición de simetría respecto a un punto, se tiene que OP = OP', es decir

$$(\mathrm{OP})^2 = (\mathrm{OP'})^2$$
$$\Rightarrow \quad (x-0)^2 + (y-0)^2 = (a-0)^2 + (b-0)^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{------------------ (1)}$$



Pero P y P' están sobre la recta $y = mx$, por lo que también se cumple que $b = ma$. Sustituyendo y y b en (1) se tiene

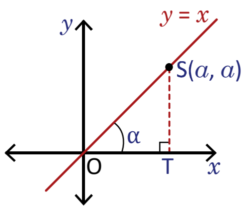
$$x^2 + m^2x^2 = a^2 + m^2a^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2(1 + m^2) = a^2(1 + m^2);$$

como $1 + m^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad x = a$ o bien $x = -a$.

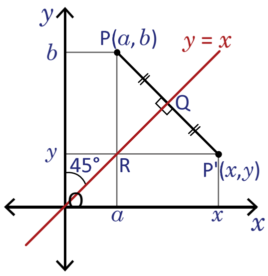
Si $x = a$ entonces $y = mx = ma = b$, por lo que P' resulta ser el mismo punto P. Si $x = -a$ entonces $y = mx = -ma = -b$, así P'($-a$, $-b$) es el simétrico de P respecto al origen. Por lo tanto, P'($-a$, $-b$).

Unidad 5

d) Primero véase que, si se toma el punto S(a, a) sobre la recta $y = x$, al trazar el triángulo OTS se deduce que tan $\alpha = 1$, por lo que $\alpha = 45°$; es decir, la recta $y = x$ divide en dos partes iguales a los cuadrantes I y III del plano cartesiano.



Sea P(a, b) un punto del plano cartesiano y P'(x, y) su simétrico respecto a la recta $y = x$. El resultado no se ve afectado si consideramos a P sobre la recta $y = x$. Sea Q la intersección del segmento PP' y la recta $y = x$. Por propiedades de simetría, PP' es perpendicular a dicha recta y PQ = P'Q.



Se traza el segmento vertical PR. Los triángulos PQR y P'QR son congruentes ya que PQ = P'Q, QR es lado común y ∢PQR = ∢P'QR = 90° (criterio LAL). Por lo tanto,

PR = P'R y ∢PRQ = ∢P'RQ. ------------------ (2)

Pero ∢PRQ = 45°, ya que PR es paralela al eje y. Luego ∢P'RQ = 45°, por lo que ∢P'RP = 90°. Por tanto, P'R es perpendicular a PR y así P'R = $x - a$ y PR = $b - y$.

De (2) se tiene que PR = P'R, pero PR = $b - a$, por lo que $b - a$ = P'R = $x - a$, es decir $x = b$. De igual forma, $b - a$ = PR = $b - y$, es decir, $y = a$. Por lo tanto, las coordenadas de P' son (b, a).

Teorema

Si P(a, b) es un punto sobre el plano cartesiano entonces:

- P'(a, $-b$) es el punto simétrico de P respecto al eje x.
- P'($-a$, b) es el punto simétrico de P respecto al eje y.
- P'($-a$, $-b$) es el punto simétrico de P respecto al origen.
- P'(b, a) es el punto simétrico de P respecto a la recta $y = x$.

A la recta que tiene por ecuación $y = x$ se le conoce como **recta identidad**.

Ejemplo

Sean P(–1, 3) y Q(–2, –3) dos puntos en el plano. Determina el simétrico de P y Q respecto al eje x, respecto al eje y, respecto al origen y respecto a la recta identidad.

a) El simétrico de P respecto al eje x es P_1(–1, –3).
El simétrico de P respecto al eje y es P_2(1, 3).
El simétrico de P respecto al origen es P_3(1, –3).
El simétrico de P respecto a la recta identidad es P_4(3, –1).

b) El simétrico de Q respecto al eje x es Q_1(–2, 3).
El simétrico de Q respecto al eje y es Q_2(2, –3).
El simétrico de Q respecto al origen es Q_3(2, 3).
El simétrico de P respecto a la recta identidad es Q_4(–3, –2).

Problemas

1. Determina el simétrico de cada punto respecto al eje x, respecto al eje y, respecto al origen y respecto a la recta $y = x$.

a) P(1, 4) b) P(3, –2) c) P(–3, –1)

d) P(–5, 4) e) P(2, 0) f) P(0, –3)

2. ¿Puede encontrarse el simétrico respecto al origen de un punto P haciendo una simetría respecto al eje x y luego haciendo otra simetría respecto al eje y? Justifica tu respuesta.

Indicador de logro:

2.2 Determina las coordenadas del punto simétrico de un punto del plano cartesiano respecto al eje x, al eje y, al origen y a la recta identidad.

Secuencia:

En esta clase se establecen las coordenadas del punto simétrico de un punto del plano cartesiano. Las simetrías que se determinan son respecto a los ejes coordenados, al origen y respecto a la recta identidad $y = x$.

Propósito:

Esta clase, junto con la clase 2.1, tiene como objetivo establecer algunas herramientas necesarias para el cálculo de razones trigonométricas de ángulos no agudos. La simetría, en particular, se utilizará en toda la Lección 2.

Solución de problemas:

	Punto	Respecto al eje x	Respecto al eje y	Respecto al origen	Respecto a la recta identidad
1a)	(1, 4)	$P_1(1, -4)$	$P_2(-1, 4)$	$P_3(-1, -4)$	$P_4(4, 1)$
1b)	(3, −2)	$P_1(3, 2)$	$P_2(-3, -2)$	$P_3(-3, 2)$	$P_4(-2, 3)$
1c)	(−3, −1)	$P_1(-3, 1)$	$P_2(3, -1)$	$P_3(3, 1)$	$P_4(-1, -3)$
1d)	(−5, 4)	$P_1(-5, -4)$	$P_2(5, 4)$	$P_3(5, -4)$	$P_4(4, -5)$
1e)	(2, 0)	$P_1(2, 0)$	$P_2(-2, 0)$	$P_3(-2, 0)$	$P_4(0, 2)$
1f)	(0, −3)	$P_1(0, 3)$	$P_2(0, -3)$	$P_3(0, 3)$	$P_4(-3, 0)$

2. Sea P(x, y) un punto en el plano cartesiano. Las coordenadas del punto simétrico de P respecto al origen son $(-x, -y)$.

Por otra parte, el simétrico de P con respecto al eje x tiene coordenadas $(x, -y)$. Ahora, el simétrico de $(x, -y)$ respecto al eje y tiene coordenadas $(-x, -y)$.

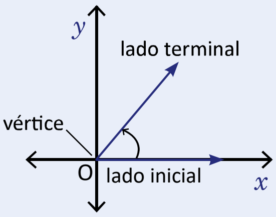
Por lo tanto, al calcular el simétrico de un punto respecto al eje x y luego al eje y se obtienen las coordenadas del simétrico del punto respecto al origen.

Lección 2

2.3 Ángulos

Definición

Se ubica un rayo sobre el eje x con punto inicial en el origen del plano cartesiano y se rota este rayo alrededor del origen; a la abertura entre el rayo inicial y el final se le llama **ángulo** y al rayo inicial se le llama **lado inicial** y al rayo final se le llama **lado terminal** del ángulo. Se dice que un ángulo está en **posición estándar** si su lado inicial está sobre el lado positivo del eje x y su vértice sobre el origen. Un ángulo puede medirse en grados y cada grado resulta de dividir una circunferencia en 360 partes iguales, siendo cada parte 1° (un grado).



Si un ángulo se genera mediante una rotación en el sentido antihorario será positivo, y una rotación en el sentido horario genera un ángulo negativo.

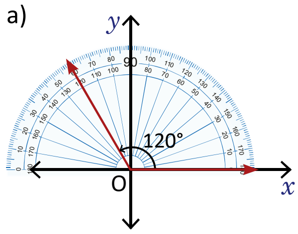
Dependiendo en qué cuadrante está el lado terminal del ángulo, se dice que el ángulo es de dicho cuadrante.

Ejemplo

Dibuja cada ángulo en posición estándar e identifica a qué cuadrante pertenece.

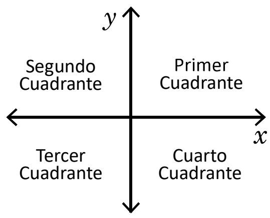
a) 120° b) –70° c) –150°

a)



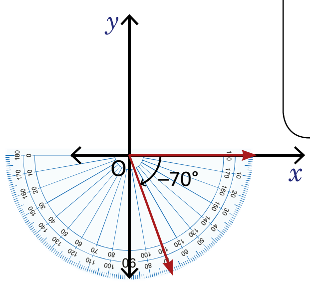
Como el lado final está en el segundo cuadrante, 120° pertenece al segundo cuadrante.

Cuando se construye el plano cartesiano se obtienen cuatro secciones a las que se les llama cuadrantes y se enumeran a partir del cuadrante superior derecho y en sentido antihorario.



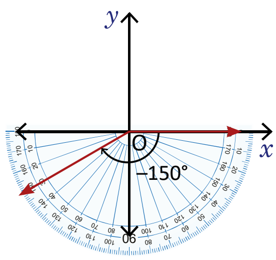
b) Para graficar este ángulo, como va en el sentido a las agujas del reloj, se coloca el transportador hacia abajo y se marca 70°.

Como el lado final está en el cuarto cuadrante, –70° pertenece al cuarto cuadrante.



c) Para graficar este ángulo, como va en el sentido a las agujas del reloj, se coloca el transportador hacia abajo y se marca 150°.

Como el lado final está en el tercer cuadrante, –150° pertenece al tercer cuadrante.



Problemas

Dibuja cada ángulo en posición estándar e identifica a qué cuadrante pertenece.

a) 80° b) 310° c) –170°

Indicador de logro:

2.3 Determina el signo y el cuadrante al que pertenece un ángulo en el plano cartesiano.

Secuencia:

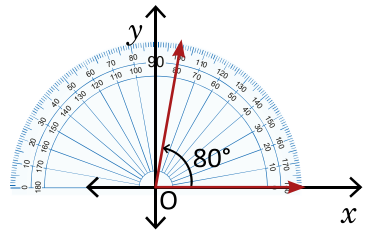
Esta clase es introductoria, en ella se define a un ángulo como la abertura entre dos rayos, uno de ellos ubicado sobre la parte positiva del eje x y el otro que gira alrededor del origen del plano cartesiano. Los elementos que componen un ángulo, ya han sido abordados en Educación Básica, por lo que esta es una extensión del concepto de ángulo. Además, se define el signo del ángulo dependiendo de si gira en sentido horario o antihorario, y se define la pertenencia del ángulo a un cuadrante del plano cartesiano.

Propósito:

Introducir ángulos mayores que 90° y menores que 0° y la identificación del cuadrante al que pertenecen, este último concepto es importante para el cálculo de razones trigonométricas, el signo de estas y la ubicación de ángulos en el plano cartesiano.

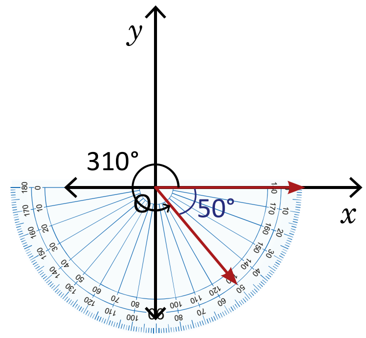
Solución de problemas:

a) Como el ángulo es positivo, se dibuja en el sentido contrario a las agujas del reloj. El lado final está en el primer cuadrante, por lo tanto 80° pertenece al primer cuadrante.

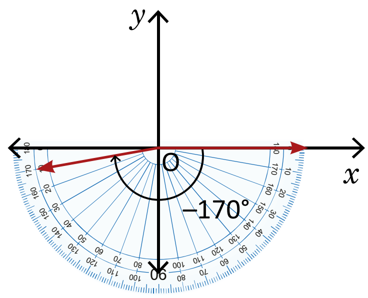


b) Como el transportador no mide ángulos mayores a 180°, en este caso se mide el ángulo que falta para dar la vuelta completa. Faltan 50° para llegar a 360°, se coloca el transportador y se miden los 50° que faltan para la vuelta completa.

Como el ángulo es positivo, se mide en el sentido contrario a las agujas del reloj. El lado final está en el cuarto cuadrante, por lo tanto 310° pertenece al cuarto cuadrante.



c) Como el ángulo es negativo, se mide en el sentido de las agujas del reloj. El lado final está en el tercer cuadrante, por lo tanto –170° pertenece al tercer cuadrante.



Si el transportador es un círculo, no es necesario girarlo.

2.4 Ángulos mayores a 360° y menores a –360°

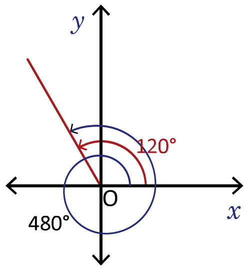
Problema inicial

Dibuja los ángulos 480°, 930°, 2 150° y –1 150°.

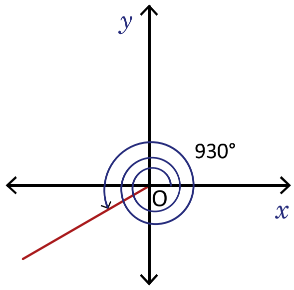
Solución

Para dibujar los ángulos, hay que recordar (de la clase anterior) que una circunferencia se ha dividido en 360 partes iguales y cada parte representa 1°, por lo tanto, un ángulo de 360° representa una vuelta completa.

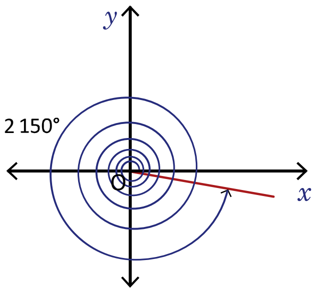
a) Se escribe 480° como 360° + 120°, entonces al dibujar el ángulo se obtiene



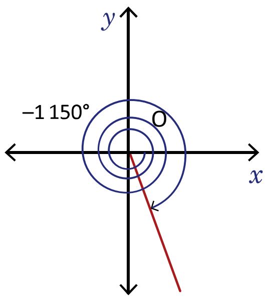
b) Observa que 930° = 360°(2) + 210°, entonces al dibujar se obtiene



c) Observa que 2 150° = 360°(5) + 350°, entonces al dibujar se obtiene



d) Como el ángulo es negativo hay que medirlo en el sentido de las agujas del reloj, además
–1 150° = –360°(3) – 70°



Observa que –1150° también puede escribirse como
360°(–3) – 70° = 360°(–3) – 70° + 360° – 360° = 360°(–4) + 290°
lo cual resulta más útil, ya que de este modo no se trabaja con ángulos negativos.

Conclusión

Para dibujar un ángulo mayor a 360° se determina cuántas vueltas completas contiene el ángulo y el lado terminal será el que corresponde al ángulo menor de 360° que queda al descomponer el ángulo.

Por ejemplo, si $\theta = 360°n + \theta'$, con n un número entero distinto de cero, n representa el número de vueltas completas que contiene el ángulo y $0 \leq \theta' < 360°$, el lado terminal de θ será igual al lado terminal del ángulo θ'. Si $n > 0$, el ángulo se mide en el sentido antihorario y si $n < 0$, el ángulo se mide en sentido horario.

Problemas

Dibuja cada ángulo.

a) 1 000° b) 990° c) 1 480°
d) –1 500° e) –1 315° f) –1 880°

Indicador de logro:

2.4 Grafica en el plano cartesiano ángulos mayores a 360° y menores a –360°.

Secuencia:

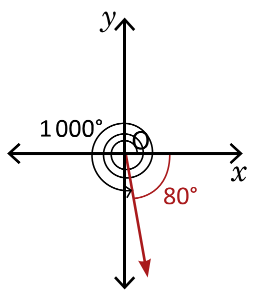
Se grafican ángulos mayores a 360° y menores a –360° mediante la identificación del número de vueltas completas que da.

Posibles dificultades:

Identificar el número de vueltas completas que hay en un ángulo puede significar una dificultad para el estudiante, especialmente cuando el ángulo es negativo. Este paso puede hacerse utilizando la división.

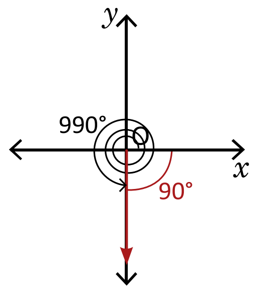
Solución de problemas:

a) 1 000° = 360°(2) + 280°.

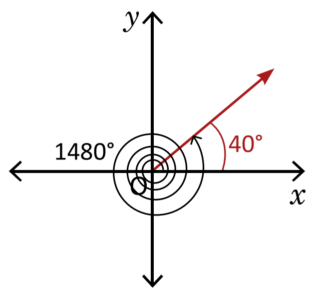


Para graficar un ángulo mayor que 360° o menor que –360° solo es necesario graficar el ángulo menor de 360° que se obtiene al descomponer el ángulo inicial.

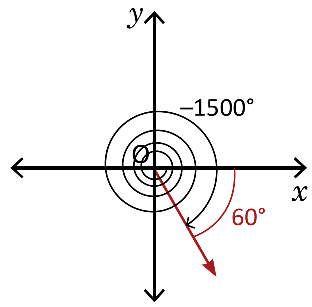
b) 990° = 360°(2) + 270°.



c) 1 480° = 360°(4) + 40°.

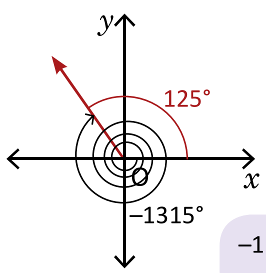


d) –1 500° = –360°(4) – 60°.



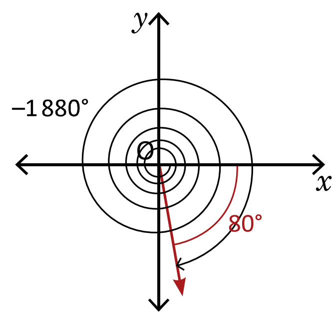
Para graficar ángulos negativos debe iniciarse del lado positivo del eje x.

e) –1 315° = –360°(3) – 235°.



–1 315° = –360°(3) – 235° + 360° – 360°
= –360°(4) + 125°

f) –1 880° = –360°(5) – 80°.

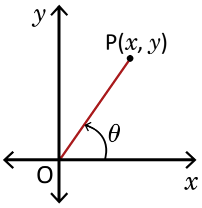


Lección 2

2.5 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 1

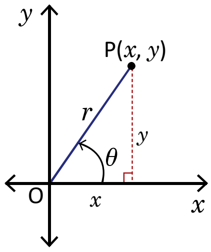
Problema inicial

Considera el ángulo θ de la figura. Expresa los valores seno, coseno y tangente del ángulo θ en términos de x y y.



Solución

Se dibuja un triángulo rectángulo tal que la hipotenusa es el lado terminal del ángulo y uno de los catetos está sobre el eje x, como muestra la figura. El punto final del lado terminal está determinado por el punto P con coordenadas (x, y), por lo que los catetos del triángulo miden x y y unidades.



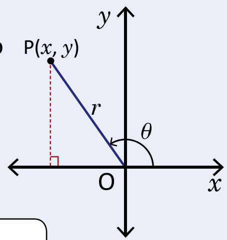
En el triángulo rectángulo, x es la longitud del lado adyacente y y es la longitud del lado opuesto a θ. Para determinar la longitud de la hipotenusa r se aplica el teorema de Pitágoras, obteniéndose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r} \text{ y } \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Definición

Se definen las razones trigonométricas de cualquier ángulo θ de la siguiente manera:
Se coloca el ángulo θ en posición estándar y se toma un punto P(x, y) sobre el lado terminal. Se establece que $r = \text{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r} \text{ y } \tan\theta = \frac{y}{x}.$$



Se define $\tan\theta$ solo cuando $x \neq 0$.

De la definición de razones trigonométricas se establece lo siguiente:

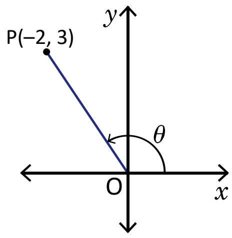
$$y = r\operatorname{sen}\theta, \quad x = r\cos\theta.$$

Además, $\operatorname{sen}(360°n + \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos(360°n + \theta) = \cos\theta$.

Observar que $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

Ejemplo

Determina las razones seno, coseno y tangente para el ángulo θ en la figura.



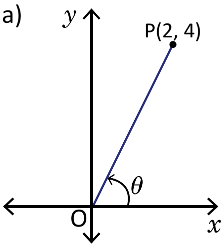
En este caso, $r = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}},\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}} \text{ y } \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

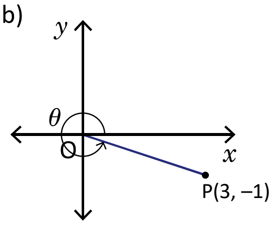
Problemas

Determina los valores seno, coseno y tangente de cada ángulo.

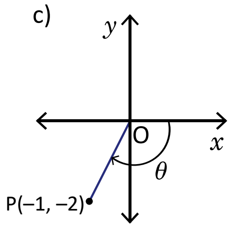
a)



b)



c)



Unidad 5

Indicador de logro:

2.5 Determina las razones trigonométricas de un ángulo definido por la parte positiva del eje x y $\overline{\text{OP}}$, donde P es un punto del plano cartesiano.

Secuencia:

Se definen las razones trigonométricas en términos de las coordenadas de un punto del plano cartesiano.

Propósito:

Como no se pueden construir triángulos rectángulos para los ángulos que no sean agudos, se definen las razones trigonométricas en términos de las coordenadas de un punto del plano cartesiano. Esta nueva definición coincide con la anterior cuando el ángulo es agudo, observando la relación entre las razones trigonométricas y las coordenadas del punto.

Solución de problemas:

a) $r = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, por lo tanto,

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{y } \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{2} = 2.$$

b) $r = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$, por lo tanto,

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{y } \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

c) $r = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, por lo tanto,

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{y } \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

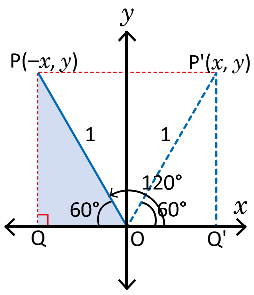
2.6 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 2

Problema inicial

Calcula los valores de sen 120°, cos 120° y tan 120°.

Solución

Se ubica el ángulo en posición estándar y se traza un triángulo OPQ de modo que OP = 1, como muestra la figura. Si se observa, el ∢QOP es igual a 180° – 120° = 60°, por lo que las razones sen 120°, cos 120° y tan 120° pueden calcularse tomando como referencia los valores de sen 60°, cos 60° y tan 60°.



Si se refleja el ΔOPQ con respecto al eje y, el resultado es el triángulo OP'Q'. Las coordenadas de P' son (cos 60°, sen 60°) y por ser P el simétrico de P', sus coordenadas son (–cos 60°, sen 60°), por lo tanto,

$$\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2},$$

$$\tan 120° = \frac{\text{sen } 120°}{\cos 120°} = \frac{\text{sen } 60°}{-\cos 60°} = -\tan 60° = -\sqrt{3}.$$

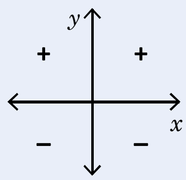
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{r\text{ sen }\theta}{r\cos\theta} = \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}$$

Conclusión

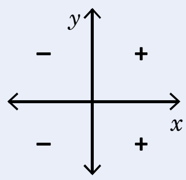
Si se tiene un ángulo distinto de 0°, 90°, 180° o 270° se define el **triángulo de referencia** como el triángulo rectángulo cuya hipotenusa de medida 1, es el lado terminal del ángulo y uno de sus catetos está sobre el eje x. En la solución del Problema inicial, el triángulo OPQ es el triángulo de referencia.

Para calcular razones trigonométricas de ángulos mayores a 90° se procede de la siguiente forma:

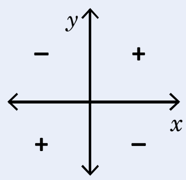
1. Se coloca el ángulo en posición estándar.
2. Se traza el triángulo de referencia siempre que sea posible.
3. Se calculan las razones del ángulo utilizando el ángulo agudo del triángulo de referencia que está comprendido entre el lado terminal del ángulo y el eje x. En este paso se determina el signo que tendrán las razones trigonométricas, dependiendo del cuadrante al que pertenece el ángulo. El signo del seno depende de y, el signo del coseno depende de x y el signo de la tangente depende del cociente $\frac{y}{x}$.



signos del seno



signos del coseno



signos de la tangente

Al ángulo agudo que se utiliza para calcular las razones trigonométricas se le conoce como **ángulo de referencia**.

Problemas

Calcula las razones trigonométricas de cada ángulo de la tabla y complétala. Cuando la razón no esté definida, escribe /.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen θ																	
cos θ																	
tan θ																	

Para calcular las razones trigonométricas de los ángulos 0°, 90°, 270° y 360° considera las coordenadas de x y y, que definen el ángulo en el plano cartesiano.

Indicador de logro:

2.6 Calcula las razones trigonométricas de ángulos en el plano cartesiano, utilizando los ángulos de los triángulos notables.

Secuencia:

En esta clase se define el triángulo y el ángulo de referencia de un ángulo no agudo, se utiliza para el cálculo de razones trigonométricas de ángulos no agudos menores o iguales que 360°, que pueden calcularse con los ángulos de triángulos notables. Se establecen además, los signos de las razones seno, coseno y tangente, dependiendo de a qué cuadrante pertenece el ángulo.
Si la solución del Problema inicial presenta mucha dificultad, el docente debe brindar más apoyo.

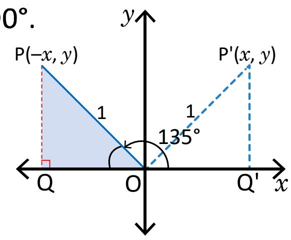
Solución de problemas:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

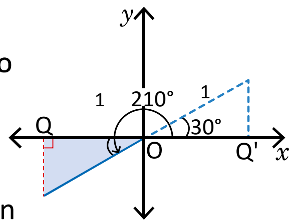
A continuación se muestra a detalle la deducción de algunas razones.

Para los ángulos 0°, 90°, 180° y 270° pueden considerarse también los puntos $(x, 0)$, $(0, y)$, $(-x, 0)$ y $(0, -y)$, respectivamente, con $x > 0$, $y > 0$.

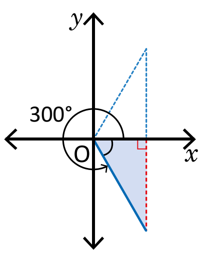
- Para las razones del ángulo 0° se considera el punto P(1, 0), entonces $r = 1$,
$$\text{sen } 0° = \frac{0}{1} = 0, \quad \cos 0° = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{y} \quad \tan 0° = \frac{0}{1} = 0.$$
- De igual forma para 90°, se toma el punto P(0, 1). Entonces $r = 1$,
$$\text{sen } 90° = \frac{1}{1} = 1, \quad \cos 90° = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{y} \quad \tan 90° = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{la tangente no está definida para } 90°.$$



- Para el ángulo de 135°, el ángulo de referencia es ∢QOP = 180° – 135° = 45°. El signo del seno es positivo, y el signo del coseno y la tangente es negativo. Por lo tanto,
$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \tan 135° = -\tan 45° = -1.$$
- Para el ángulo de 180° se considera P(–1, 0). Entonces, sen 180° = 0, cos 180° = –1 y tan 180° = 0.



- Para 210°, el ángulo de referencia es 210° – 180° = 30°. En este caso, el signo del seno y del coseno es negativo mientras que el de la tangente es positivo. Así,
$$\text{sen } 210° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}, \quad \cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \tan 210° = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$
- Para 270° se considera el punto P(0, –1). Entonces, sen 270° = –1, cos 270° = 0 y tan 270° no está definida.
- Para 300°, el ángulo de referencia es 360° – 300° = 60°. El signo del seno y la tangente es negativo mientras que el del coseno es positivo. Entonces,
$$\text{sen } 300° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \cos 300° = \cos 60° = \frac{1}{2} \text{ y } \tan 300° = -\tan 60° = -\sqrt{3}.$$



- El ángulo de 360°, representa una vuelta completa, por lo tanto coincide con los valores del ángulo 0°.

Observe que la tangente no está definida cuando el coseno toma el valor de cero.

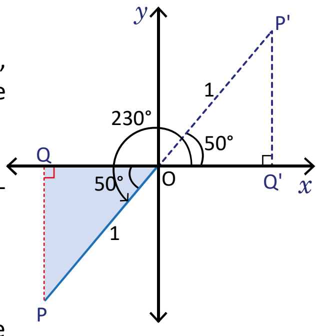
2.7 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 3

Problema inicial

a) Representa los valores de sen 230°, cos 230° y tan 230° en términos de un ángulo agudo.

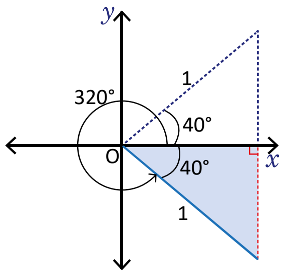
b) Representa los valores de sen 320°, cos 320° y tan 320° en términos de un ángulo agudo.

Solución



a) Se traza el triángulo de referencia. Si se observa, ∢POQ = 230° – 180° = 50°, por lo que las razones sen 230°, cos 230° y tan 230° pueden representarse tomando como referencia los valores de sen 50°, cos 50° y tan 50°.

El signo del seno y coseno es negativo y el de la tangente es positivo. Entonces, sen 230° = –sen 50°, cos 230° = –cos 50° y tan 230° = tan 50°.



b) En este caso, el ángulo de referencia es 360° – 320° = 40°. Puede observarse el gráfico de la derecha para analizar por qué se calcula de este modo.

El signo del seno y la tangente es negativo en el cuarto cuadrante, mientras que el coseno es positivo. Entonces,

sen 320° = – sen 40°, cos 320° = cos 40° y tan 320° = – tan 40°.

Conclusión

Los ángulos de referencia sirven para calcular razones trigonométricas de ángulos mayores a 90°.

La forma de calcular el ángulo de referencia depende del cuadrante al que pertenece dicho ángulo. Sea θ un ángulo cualquiera menor que 360°, entonces:

- Si θ pertenece al primer cuadrante, el ángulo de referencia es él mismo.
- Si θ pertenece al segundo cuadrante, el ángulo de referencia es 180° – θ.
- Si θ pertenece al tercer cuadrante, el ángulo de referencia es θ – 180°.
- Si θ pertenece al cuarto cuadrante, el ángulo de referencia es 360° – θ.

Ejemplo

Representa cos(–400°) en términos de un ángulo agudo.

Como –400° = –360° – 40°, el ángulo de referencia es 40°. El ángulo pertenece al cuarto cuadrante, por lo que el signo de cos(–400°) es positivo. Por lo tanto, cos(–400°) = cos 40°.

Problemas

Representa los valores de las razones trigonométricas en términos de los valores de sen θ, cos θ y tan θ, donde $0 \leq \theta < 90°$.

a) 100°	b) 175°	c) 220°
d) 250°	e) 290°	f) 310°
g) 405°	h) 570°	i) 630°
j) –780°	k) –940°	l) –1 000°

Indicador de logro:

2.7 Representa las razones trigonométricas de ángulos no agudos en términos de ángulos que estén entre 0° y 90°.

Secuencia:

Luego de haber calculado razones trigonométricas utilizando triángulos notables se utilizan los ángulos de referencia para escribir una razón trigonométrica en términos de un ángulo agudo.

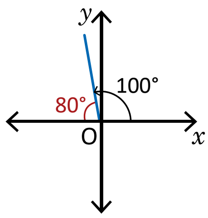
Propósito:

Se espera fortalecer en el estudiante el uso de los ángulos de referencia y su identificación en el plano cartesiano, los signos de las razones trigonométricas. No se calculan las razones trigonométricas, solo se escriben en términos de ángulos agudos.

Posibles dificultades:

Visualizar y calcular el ángulo de referencia. Es importante recordar que el ángulo de referencia es aquel ángulo agudo que se forma entre el lado final del ángulo y el eje x (observe que aquí, el eje x se refiere tanto al lado positivo como el negativo).

Solución de problemas:

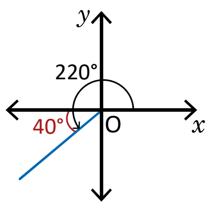


a) El ángulo de referencia de 100° es 180° – 100° = 80°. Como 100° está en el segundo cuadrante, el seno es positivo y el coseno y la tangente son negativos. Entonces,

sen 100° = sen 80°, cos 100° = – cos 80° y tan 100° = – tan 80°.

b) El ángulo de referencia es: 180° – 175° = 5°. Como 175° está en el segundo cuadrante, el seno es positivo y el coseno y la tangente son negativos. Entonces,

sen 175° = sen 5°, cos 175° = – cos 5° y tan 175° = – tan 5°.

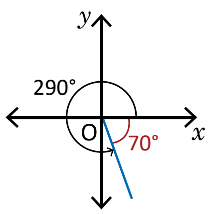


c) El ángulo de referencia de 220° es 220° – 180° = 40°. Como 220° está en el tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos y la tangente es positiva. Entonces,

sen 220° = – sen 40°, cos 220° = – cos 40° y tan 220° = tan 40°.

d) El ángulo de referencia es: 250° – 180° = 70°. Como 250° está en el tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos y la tangente es positiva. Entonces,

sen 250° = – sen 70°, cos 250° = – cos 70° y tan 250° = tan 70°.



e) El ángulo de referencia de 290° es 360° – 290° = 70°. Como 290° está en el cuarto cuadrante, el seno y la tangente son negativos y el coseno es positivo. Entonces,

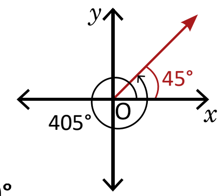
sen 290° = – sen 70°, cos 290° = cos 70° y tan 290° = – tan 70°.

f) El ángulo de referencia es: 360° – 310° = 50°. Como 310° está en el cuarto cuadrante, el seno y la tangente son negativos y el coseno es positivo. Entonces,

sen 310° = – sen 50°, cos 310° = cos 50° y tan 310° = – tan 50°.

g) El ángulo es mayor que 360° y 405° = 360° + 45°. Entonces el ángulo de referencia es 45°. Como 45° está en el primer cuadrante, también 405° lo está y por tanto, todas las razones son positivas. Por tanto,

sen 405° = sen 45°, cos 405° = cos 45° y tan 405° = tan 45°.



h) Como 570° = 360° + 210°, se determina el ángulo de referencia para 210°: 210° – 180° = 30°. Entonces,

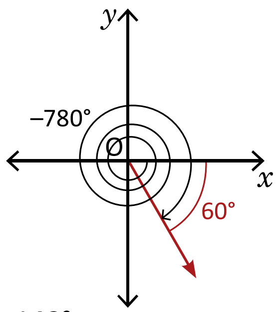
sen 570° = sen 210° = – sen 30°,
cos 570° = cos 210° = – cos 30° y
tan 570° = tan 210° = tan 30°.

i) Como 630° = 360° + 270°. El ángulo de referencia de 270° es 90°. Entonces,

sen 630° = sen 270° = – sen 90°, cos 630° = cos 270° = cos 90° y tan 630° no está definida.

j) Como –780° = –360°(2) – 60°, el ángulo de referencia es 60° y como –60° está en el cuarto cuadrante, el coseno es positivo y el seno y la tangente son negativos. Luego,

sen(–780°) = – sen 60°, cos(–780°) = cos 60° y tan(–780°) = – tan 60°.



k) Como –940° = –360°(2) – 220°. Se reescribe el ángulo de modo que se obtenga la suma de un ángulo positivo:

–940° = –360°(2) – 220° = –360°(2) – 220° + 360° – 360° = –360°(3) + 140°.

A partir de aquí, se calcula el ángulo de referencia de 140°, que es 180° – 140° = 40°. 140° está en el segundo cuadrante, y por tanto – 940° también lo está. Luego, el coseno y la tangente son negativos y el seno es positivo. Entonces,

sen(–940°) = sen 140° = sen 40°,
cos(–940°) = cos 140° = – cos 40° y
tan(–940°) = tan 140° = – tan 40°.

l) –1 000° = –360°(2) – 280° = –360°(2) – 280° + 360° – 360° = –360°(3) + 80°. Luego, el ángulo de referencia es 80°. Como 80° está en el primer cuadrante, todas las razones son positivas. Entonces,

sen(–1 000°) = sen 80°, cos(–1 000°) = cos 80° y tan(–1 000°) = tan 80°.

2.8 Razones trigonométricas de cualquier ángulo, parte 4*

Problema inicial

Si θ está entre 0° y 360°, calcula su valor para cada caso:

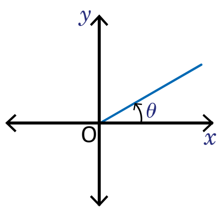
a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$

b) $\cos\theta = -\frac{3}{4}$

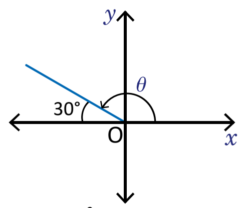
Solución

a) De acuerdo a la condición dada, sen θ es positivo. El seno es positivo en el primer y segundo cuadrante, y además $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$. Entonces, hay dos posibles valores para θ si está entre 0° y 360°.

Entonces $\theta = 30°$ o bien $\theta = 180° - 30° = 150°$.



Para θ en el primer cuadrante



Para θ en el segundo cuadrante

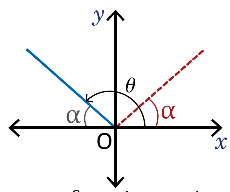
b) De acuerdo a la condición dada, cos θ es negativo. El coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante. Para calcular el valor de θ se utiliza la calculadora. Se utiliza el valor absoluto de $-\frac{3}{4}$ en vez del propio valor.

Considerar el ángulo de referencia α, entonces $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

Se sabe que la función $\cos^{-1}$ de la calculadora devuelve el ángulo α que cumpla que $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; es decir, $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha$.

Pero α es el ángulo de referencia y como θ está en el segundo cuadrante, se tiene que

$$\theta = 180° - \alpha = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 138.6°.$$

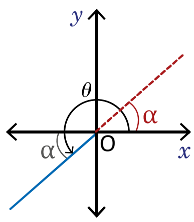


Para θ en el segundo cuadrante

De igual forma, si θ está en el tercer cuadrante se tiene que

$$\theta = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 221.4°.$$

Cuando se determinan ángulos con calculadora hay que tener un cuidado especial: esta devuelve ángulos que están entre –90° y 90° para el seno y la tangente, y entre 0° y 180° para el coseno.



Para θ en el tercer cuadrante

Conclusión

Para calcular el valor de un ángulo si se conoce una de sus razones trigonométricas, se utilizan ángulos de referencia. Además, si el ángulo se encuentra entre 0° y 360° generalmente habrán dos ángulos que satisfagan la condición impuesta.

Problemas

Calcula el valor de θ en cada caso si está entre 0° y 360°.

a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\tan\theta = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$

d) $\cos\theta = -\frac{4}{7}$

Indicador de logro:

2.8 Calcula el ángulo si se conoce una de sus razones trigonométricas.

Secuencia:

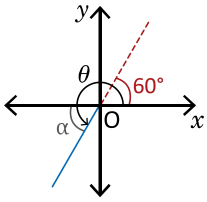
Se trabaja en el cálculo de ángulos cuando se conoce el valor de una razón trigonométrica. Este es el proceso inverso de encontrar razones trigonométricas, y se utilizan las funciones trigonométricas inversas de la calculadora cuando aparece el ícono de esta.
Si la solución del Problema inicial presenta muchas dificultades, el docente debe brindar más apoyo.

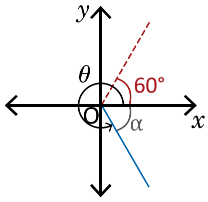
Solución de problemas:

a) El seno del ángulo es negativo, por lo tanto θ está en el tercer o cuarto cuadrante. Se sabe que

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

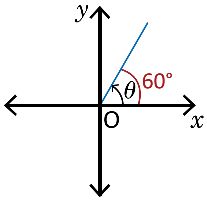
Entonces $\theta = 180° + 60° = 240°$ o $\theta = 360° - 60° = 300°$.

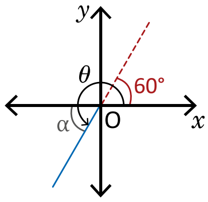




b) La tangente de un ángulo es positiva cuando el ángulo está en el primer o tercer cuadrante. Como $\tan 60° = \sqrt{3}$ se tiene que

$$\theta = 60° \text{ o } \theta = 180° + 60° = 240°.$$





c) El seno de un ángulo es positivo cuando el ángulo está en el primer o segundo cuadrante.

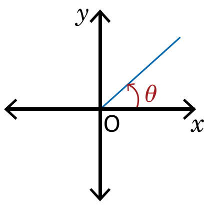
Sea α el ángulo de referencia, entonces $\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$.

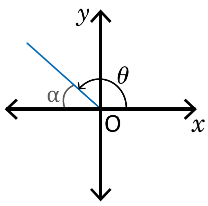
La función sen^{-1} de la calculadora devuelve el ángulo α que cumpla que $\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$; es decir, $\text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \alpha$. Pero α es el ángulo de referencia, y cuando θ está en el primer cuadrante,

$$\theta = \alpha = \text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41.8°,$$

y cuando θ está en el segundo cuadrante se tiene que

$$\theta = 180° - \alpha = 180° - \text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 138.2°.$$





No hay que olvidar que la calculadora debe estar configurada en grados.

d) El coseno de un ángulo es negativo en el segundo o tercer cuadrante.

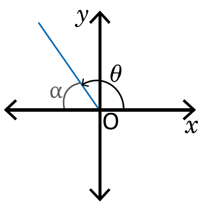
Sea α el ángulo de referencia, entonces $\cos \alpha = \frac{4}{7}$.

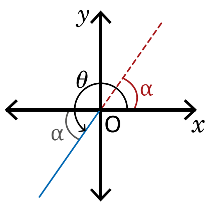
La función $\cos^{-1}$ de la calculadora devuelve el ángulo α que cumpla que $\cos \alpha = \frac{4}{7}$; es decir, $\cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) = \alpha$. Pero α es el ángulo de referencia, y cuando θ está en el segundo cuadrante,

$$\theta = 180° - \alpha = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) \approx 124.8°.$$

y cuando θ está en el tercer cuadrante se tiene que

$$\theta = 180° + \alpha = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) \approx 235.2°.$$





2.9 La identidad pitagórica

Problema inicial

Se denota el cuadrado de una razón trigonométrica, (sen θ)^2, (cos θ)^2, etc., como sen$^2\theta$, cos$^2\theta$, etc.

Demuestra que para cualquier ángulo θ se cumple que sen$^2\theta$ + cos$^2\theta$ = 1.

Solución

Recordando que sen $\theta = \frac{y}{r}$ y cos $\theta = \frac{x}{r}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces,

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Conclusión

La identidad sen$^2\theta$ + cos$^2\theta$ = 1 se conoce como **identidad pitagórica** y es válida para cualquier ángulo θ.

Ejemplo 1

Determinar los valores de cos θ y tan θ si sen $\theta = \frac{5}{13}$ y θ está en el cuadrante I.

Utilizando la identidad pitagórica sen$^2\theta$ + cos$^2\theta$ = 1,

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\theta = \frac{25}{169} + \cos^2\theta = 1.$$

Entonces $\cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$. Luego, $\cos\theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$ o bien $\cos\theta = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$. Pero la otra condición inicial es que θ está en el cuadrante I y en el cuadrante I el coseno es positivo, por lo que $\cos\theta = \frac{12}{13}$.

Para calcular tan θ, recordar que $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$, entonces

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{13} \div \frac{12}{13} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}.$$

Por lo tanto, $\cos\theta = \frac{12}{13}$ y $\tan\theta = \frac{5}{12}$.

Ejemplo 2

Demuestra que $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$ para cualquier ángulo θ.

Se sabe que $\tan\theta = \frac{y}{x}$, para (x, y) las coordenadas de un punto del plano. Entonces $\cot\theta = \frac{x}{y}$, así

$$1 + \cot^2\theta = 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}.$$

Por otra parte, $\frac{1}{\text{sen}^2\theta} = 1 \div \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \times \frac{r^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$. Por lo tanto, $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$.

Problemas

1. Determina los valores de sen θ y tan θ si $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ y θ está en el cuadrante III.
2. Determina los valores de sen θ y tan θ si $\cos\theta = -\frac{7}{9}$ y $\tan\theta < 0$.
3. Determina los valores de cos θ y tan θ si sen $\theta = \frac{2}{3}$ y θ no está en el cuadrante I.
4. Demuestra que $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ para cualquier ángulo θ.
5. Determina los valores de sen θ y cos θ si $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ y sen $\theta > 0$.
6. Demuestra que tan θ + cot θ = sec θ csc θ.
7. Demuestra que sec θ – cos θ = tan θ sen θ.

Puedes utilizar la estrategia aplicada en la solución del problema inicial.

Para el problema 5 puedes utilizar el resultado del problema 4.

Unidad 5

Indicador de logro:

2.9 Calcula las razones trigonométricas de cualquier ángulo utilizando la identidad pitagórica si se conocen algunos datos de este.

Secuencia:

Se introduce la identidad pitagórica y se utiliza para calcular razones trigonométricas de un ángulo si se conoce una de ellas; también se demuestran algunas identidades trigonométricas utilizando la misma estrategia de la resolución del Problema inicial.

Propósito:

En el Problema inicial se deduce la identidad pitagórica. En el Ejemplo 1 se muestra la forma de aplicar la identidad pitagórica para resolver un problema en particular, mientras que el Ejemplo 2 demuestra otra identidad con la misma técnica utilizada en la resolución del Problema inicial.

Solución de problemas:

1. Utilizando la identidad pitagórica, $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$: $\Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$.

Como en el cuadrante III el seno es negativo, se tiene que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$. Luego,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$ y $\tan\theta = \frac{3}{4}$.

2. $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + \left(-\frac{7}{9}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{49}{81} = \frac{32}{81}$.

Como $\cos\theta < 0$ y $\tan\theta < 0$, entonces θ está en el segundo cuadrante, por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta > 0$. Es decir, $\operatorname{sen}\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. Luego,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \div \left(-\frac{7}{9}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{9}{7} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ y $\tan\theta = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

3. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\tan\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. $1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$.

Por otra parte, $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 \div \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 \times \frac{r^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$. Por lo tanto, $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$.

5. Como la tangente es negativa y el seno es positivo, el ángulo está en el segundo cuadrante y por tanto el coseno es negativo. Utilizando la identidad del problema anterior:

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Luego, como $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \tan\theta\cos\theta = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Es decir, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Cuando dos de los valores entre $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ se conocen, es más adecuado utilizar la relación $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ para calcular el valor restante.

6. $\tan\theta + \cot\theta = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{y^2 + x^2}{xy} = \frac{r^2}{xy}$. Por otro lado, $\sec\theta\csc\theta = \left(\frac{r}{x}\right)\left(\frac{r}{y}\right) = \frac{r^2}{xy}$.

Por lo tanto, $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$.

7. $\sec\theta - \cos\theta = \frac{r}{x} - \frac{x}{r} = \frac{r^2 - x^2}{xr} = \frac{x^2 + y^2 - x^2}{xr} = \frac{y^2}{xr}$. Por otro lado, $\tan\theta\operatorname{sen}\theta = \left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{y^2}{xr}$.

Por lo tanto, $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\operatorname{sen}\theta$.

2.10 Practica lo aprendido

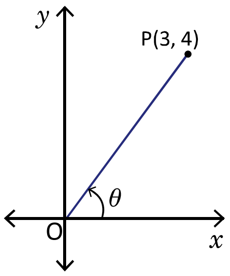
1. Dibuja cada ángulo.

a) 530°   b) 780°   c) 855°

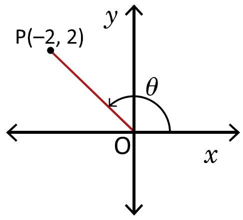
d) –1 360°   e) –1 210°   f) –630°

2. Determina las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para cada ángulo.

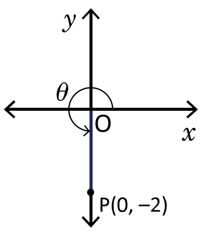
a)



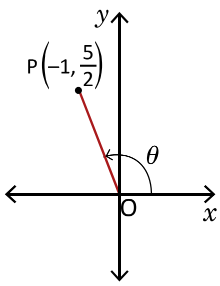
b)



c)



d)



3. Representa los valores de las razones trigonométricas en términos de los valores de sen θ, cos θ y tan θ, donde $0 \leq \theta < 90°$.

a) 165°   b) 855°   c) 2 385°

d) –140°   e) –840°   f) –2 190°

4. Calcula el valor de θ en cada caso, donde $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\tan\theta = 1$ c) $\text{sen}\,\theta = -\frac{7}{9}$

5. Determina sen θ si $\cos\theta = \frac{5}{6}$ y θ no está en el cuadrante I.

6. Determina sen θ y cos θ si $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ y θ está en el cuadrante II.

7. Demuestra que $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$.

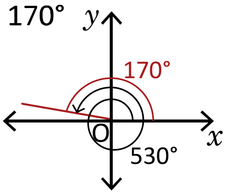
8. Demuestra que $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$.

Indicador de logro:

2.10 Resuelve problemas correspondientes al cálculo de razones trigonométricas de ángulos no agudos.

Solución de problemas:

1a) 530° = 360° + 170°



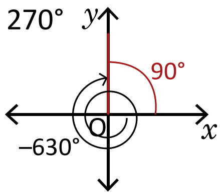
1b) 780° = 360°(2) + 60°.

1c) 855° = 360°(2) + 135°.

1d) –1 360° = –360°(3) – 280°.

1e) –1 210° = –360°(3) – 130°.

1f) –630° = –360° – 270°



2a) $r = \sqrt{9+16} = 5$, por lo tanto,

sen $\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$, cos $\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$ y tan $\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{3}$.

2b) $r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, por lo tanto,

sen $\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cos $\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y tan $\theta = \frac{2}{-2} = -1$.

2c) $r = 2$, por lo tanto, sen $\theta = \frac{-2}{2} = -1$, cos $\theta = \frac{0}{2} = 0$

y tan θ no está definida.

2d) $r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$, por lo tanto,

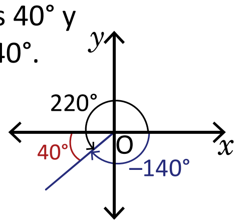
sen $\theta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, cos $\theta = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$ y tan $\theta = -\frac{5}{2}$.

3a) sen 165° = sen 15°, cos 165° = – cos 15° y tan 165° = – tan 15°

3b) sen 855° = sen 135° = sen 45°, cos 855° = cos 135° = – cos 45°, tan 855° = tan 135° = – tan 45°

3c) sen 2 385° = sen 225° = – sen 45°, cos 2 385° = cos 225° = – cos 45° y tan 2 385° = tan 225° = tan 45°

3d) sen(–140°) = – sen 40°,
cos(–140°) = – cos 40° y
tan(–140°) = tan 40°.

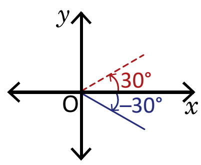


3e) – 840° = – 360°(2) – 120° = – 360°(3) + 240°

El ángulo de referencia de 240° es 240° – 180° = 60°.
Entonces

sen(–840°) = sen 240° = – sen 60°,
cos(–840°) = cos 240° = – cos 60° y
tan(–840°) = sen 240° = tan 60°.

3f) –2 190° = –360°(6) – 30°. El ángulo de referencia de – 30° se obtiene reflejándolo con respecto al eje x. El signo del seno y la tangente es negativo y el del coseno es positivo. Entonces, sen(–30°) = – sen 30°, cos(–30°) = cos 30° y tan(–30°) = – tan 30°.



4a) El coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante. Entonces

$$\theta = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 180° - 30° = 150° \text{ o bien } \theta = 180° + \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 180° + 30° = 210°.$$

4b) La tangente es positiva en el primer y tercer cuadrante; además, tan 45° = 1, entonces

$$\theta = \tan^{-1}(1) = 45° \text{ o bien } \theta = 180° + \tan^{-1}(1) = 180° + 45° = 225°.$$

4c) $\theta = 180° + \text{sen}^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) \approx 231.1°$ o bien $\theta = 360° - \text{sen}^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) \approx 308.9°$.

5. sen $\theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

6. sen $\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ y cos $\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

7. $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \frac{r^2}{x^2} + \frac{r^2}{y^2} = \frac{r^2y^2 + r^2x^2}{x^2y^2} = \frac{r^2(y^2+x^2)}{x^2y^2} = \frac{r^4}{x^2y^2}$.

Por otra parte, $\sec^2\theta \csc^2\theta = \left(\frac{r^2}{x^2}\right)\left(\frac{r^2}{y^2}\right) = \frac{r^4}{x^2y^2}$. Por lo tanto, $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta \csc^2\theta$.

8. $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)\frac{y}{x} = \frac{r^2}{x^2}$. Por otra parte, $\sec^2\theta = \frac{r^2}{x^2}$. Por lo tanto, $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$.

Lección 3 Resolución de triángulos oblicuángulos

3.1 Área de un triángulo

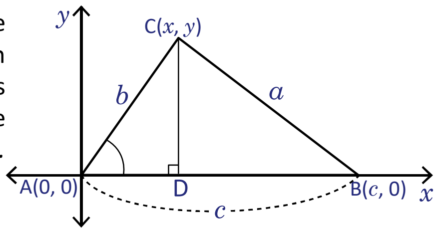
Problema inicial

Del triángulo ABC se conocen las medidas de los lados AC = b y AB = c, y la medida del ángulo A. Determina una fórmula para calcular el área del triángulo utilizando razones trigonométricas.

Recuerda que en un triángulo suele referirse a los ángulos de acuerdo a las etiquetas de los vértices.

Solución

Se ubica el triángulo ABC sobre el plano cartesiano de modo que A(0, 0) y B(c, 0), con $c > 0$, y C(x, y), con $y > 0$. Como el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base y la altura, es necesario calcular la longitud de la altura, la cual se corresponde con el valor de la coordenada en y del punto C; es decir, $y = b\text{sen } A$.



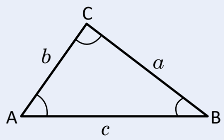
Ahora, la base es AB = c, entonces,

$$\text{Área del } \Delta\text{ABC} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(\text{AB})(y)}{2} = \frac{c(b\text{sen } A)}{2} = \frac{bc\text{sen } A}{2}.$$

Teorema

Se denota por (ABC) el área de un triángulo ABC. Si se conocen las medidas de dos de los lados de un triángulo y el ángulo entre ellos, entonces puede calcularse el área utilizando trigonometría, de modo que

$$(\text{ABC}) = \frac{ab\text{sen } C}{2} = \frac{bc\text{sen } A}{2} = \frac{ca\text{sen } B}{2}.$$



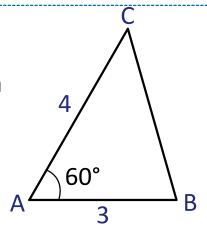
En adelante, se utilizará la notación

$(\text{ABC}) = \frac{1}{2}ab\text{sen } C = \frac{1}{2}bc\text{sen } A = \frac{1}{2}ca\text{sen } B.$

Un triángulo posee tres alturas, que son aquellos segmentos de recta que parten de un vértice y cortan perpendicularmente al lado opuesto.

Ejemplo 1

Calcula el área del triángulo ABC que muestra la figura.

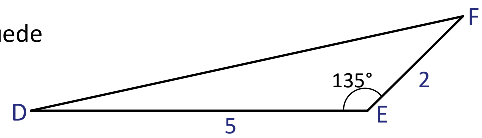


Como el ángulo conocido está entre los lados conocidos, se puede aplicar la fórmula del área directamente. Entonces,

$$(\text{ABC}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{4})(3)\text{sen } 60° = (2)(3)\text{sen } 60° = (\cancel{2})(3)\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = 3\sqrt{3}.$$

Ejemplo 2

Determina el área del triángulo DEF que muestra la figura.



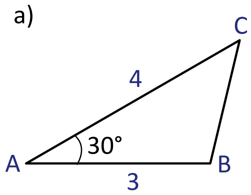
Como el ángulo conocido está entre los lados conocidos, se puede aplicar la fórmula del área directamente. Entonces,

$$(\text{DEF}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2})(5)\text{sen } 135° = 5\text{sen } 135° = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

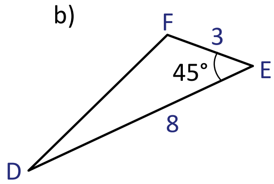
Problemas

1. Calcula el área de cada uno de los triángulos siguientes.

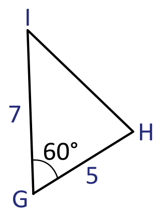
a)



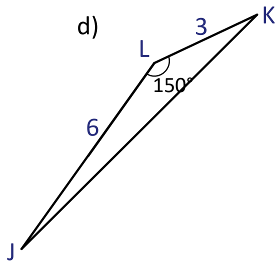
b)



c)



d)



2. Deduce la fórmula del área del triángulo ABC, del Problema inicial, si C tiene coordenadas (x, y), con $x < 0$ y $y > 0$.

Indicador de logro:

3.1 Calcula el área de un triángulo oblicuángulo utilizando trigonometría.

Secuencia:

En la lección anterior se calcularon razones trigonométricas de ángulos no agudos, se utilizaron ángulos de referencia para escribir una razón en términos de ángulos agudos, y se calcularon ángulos si se conocían algunos datos trigonométricos de estos. En esta lección se utilizan las razones trigonométricas para resolver triángulos oblicuángulos mediante la ley de los senos y del coseno.

Propósito:

Deducir la fórmula para calcular el área de un triángulo mediante el uso de la trigonometría. Esta fórmula puede utilizarse únicamente si se conocen la medida de dos lados y del ángulo comprendido entre ellos.

Solución de problemas:

1a) (ABC) = $\frac{1}{\cancel{2}}(\overset{2}{\cancel{4}})(3)\text{sen } 30° = (2)(3)\text{sen } 30° = (\cancel{2})(3)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 3.$

1b) (DEF) = $\frac{1}{\cancel{2}}(\overset{4}{\cancel{8}})(3)\text{sen } 45° = (4)(3)\text{sen } 45° = (\overset{2}{\cancel{4}})(3)\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = 6\sqrt{2}.$

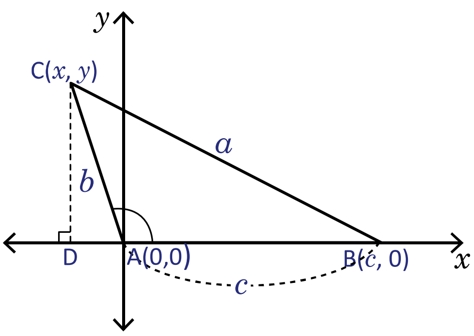
1c) (GHI) = $\frac{1}{2}(5)(7)\text{sen } 60° = \frac{1}{2}(35) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{35\sqrt{3}}{4}.$

Es recomendable dejar expresada la respuesta con los radicales o en fracción, sin embargo, en decimales también es válida.

1d) (JKL) = $\frac{1}{\cancel{2}}(3)(\overset{3}{\cancel{6}})\text{sen } 150° = 9 \text{ sen } 150° = 9\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2} = 4.5.$

Las medidas no tienen unidades, por lo que en la respuesta final no debe llevarlas.

2. Si $x < 0$ y $y > 0$ en C(x, y), entonces el punto queda ubicado en el segundo cuadrante y por tanto, el ángulo A es mayor que 90°. Observe la figura de la derecha.



La altura es y. El seno del ángulo BAC (el ángulo interno A del triángulo ABC) es igual al seno del ángulo DAC, que es igual a $\frac{\text{CD}}{b}$. Es decir, y = CD = b sen A.

La base del triángulo ABC es AB = c, entonces,

$$\text{Área del } \Delta\text{ABC} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(\text{AB})(y)}{2} = \frac{c(b\text{sen } A)}{2} = \frac{bc\text{sen } A}{2}.$$

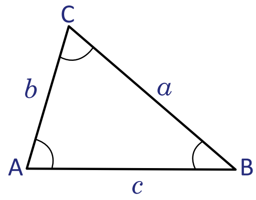
3.2 Ley de los senos*

Problema inicial

Demuestra que en cualquier triángulo ABC se cumple que $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

Solución

Si se calcula el área del triángulo, se tienen tres maneras: $\frac{1}{2}ab\text{sen } C$, $\frac{1}{2}bc\text{sen } A$ y $\frac{1}{2}ca\text{sen } B$.
Pero el área es igual, no importa cómo se calcule, por lo tanto



$$\frac{1}{2}ab\text{sen } C = \frac{1}{2}bc\text{sen } A = \frac{1}{2}ca\text{sen } B.$$

Multiplicando por 2,

$$bc\text{sen } A = ac\text{sen } B = ab\text{sen } C,$$

dividiendo entre abc

$$\frac{bc\text{sen } A}{abc} = \frac{ac\text{sen } B}{abc} = \frac{ab\text{sen } C}{abc} \Rightarrow \frac{\cancel{bc}\text{sen } A}{a\cancel{bc}} = \frac{\cancel{ac}\text{sen } B}{\cancel{a}b\cancel{c}} = \frac{\cancel{ab}\text{sen } C}{\cancel{ab}c},$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}, \quad \text{------------------ (1)}$$

sacando los recíprocos $\Rightarrow \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

Observa que las razones en la proporción relacionan el lado y el seno del ángulo opuesto a este.

Teorema (Ley de los senos)

En un triángulo ABC, se cumple que $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

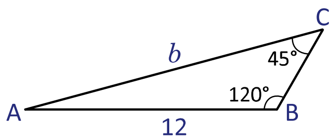
Como las igualdades anteriores son equivalentes a las igualdades en (1), se puede utilizar cualquiera de las dos indistintamente, según sea la necesidad.

Ejemplo

En un triángulo ABC calcula el valor de b si $c = 12$, $B = 120°$ y $C = 45°$.

Se dibuja el triángulo ABC y se ubican los datos. Aplicando el ley de los senos, se tiene

$$\frac{b}{\text{sen } 120°} = \frac{12}{\text{sen } 45°} \Rightarrow b = \frac{12\text{sen } 120°}{\text{sen } 45°} = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{12\sqrt{6}}{2}$$
$$= 6\sqrt{6}.$$



Por lo tanto, $b = 6\sqrt{6}$.

Problemas

Calcula los valores que se piden para el triángulo ABC.

a) El valor de b si $a = 3$, $A = 30°$ y $B = 45°$.

b) El valor de b si $a = 9$, $A = 60°$ y $B = 45°$.

c) El valor de c si $a = 6$, $A = 30°$ y $C = 135°$.

d) El valor de b si $c = 8$, $B = 55°$ y $C = 100°$.

e) El valor de c si $a = 6$, $A = 60°$ y $B = 75°$.

Indicador de logro:

3.2 Calcula la medida de un lado de un triángulo conocidas las medidas de dos ángulos y un lado opuesto a uno de estos ángulos, aplicando la ley de los senos.

Secuencia:

Se inicia la parte del cálculo de medidas de ángulos o lados de triángulos no necesariamente rectángulos. Se introduce la ley de los senos, deduciéndola para luego utilizarla en el cálculo de un lado del triángulo si se conocen dos ángulos y un lado opuesto a uno de estos ángulos.
La deducción de la ley de los senos se hace utilizando la fórmula para calcular el área de un triángulo vista en la Clase 3.1.
Esta clase debe tener más apoyo por parte del docente.

Propósito:

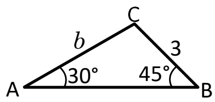
Establecer herramientas para el cálculo de medidas de lados y ángulos de cualquier triángulo, al conocerse algunas de sus medidas. Para los ángulos especiales, no es necesaria la calculadora.

Posibles dificultades:

Identificar el lado opuesto de un ángulo; las razones trigonométricas de ángulos especiales; puede consultarse la tabla del Problema 1 de la Clase 2.6 de esta unidad.

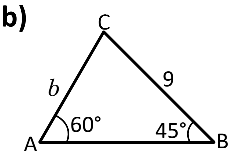
Solución de problemas:

a) Como se conocen dos ángulos, un lado opuesto a uno de estos y el lado que se desea calcular es opuesto al otro, puede aplicarse la ley de los senos.



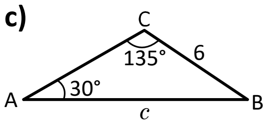
$$\frac{b}{\text{sen } 45°} = \frac{3}{\text{sen } 30°} \Rightarrow b = \frac{3 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 30°} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = 3\sqrt{2}$$

b)



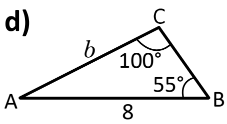
$$\frac{b}{\text{sen } 45°} = \frac{9}{\text{sen } 60°} \Rightarrow b = \frac{9 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 60°} = 9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = 9\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \overset{3}{\cancel{9}}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{{}_{1}\cancel{3}} = 3\sqrt{6}$$

c)



$$\frac{c}{\text{sen } 135°} = \frac{6}{\text{sen } 30°} \Rightarrow c = \frac{6 \text{ sen } 135°}{\text{sen } 30°} = \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}_{1}}\right) \div \frac{1}{2} = 3\sqrt{2} \times 2 = 6\sqrt{2}$$

d)



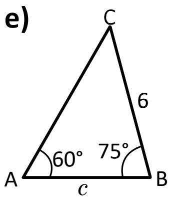
$$\frac{b}{\text{sen } 55°} = \frac{8}{\text{sen } 100°} \Rightarrow b = \frac{8 \text{ sen } 55°}{\text{sen } 100°} \approx 6.7$$

Pantalla de la calculadora

```
8sin 55÷sin 10
        6.65431028
```

No es necesario dibujar el triángulo de manera exacta. El objetivo de hacer el dibujo y ubicar los datos es para ayuda visual y para identificar la forma en que hay que aplicar la ley de los senos.

e)



En este caso no puede aplicarse la ley de los senos directamente, ya que no se conoce el ángulo opuesto del lado c. Sin embargo, puede calcularse ya que se conocen dos ángulos. Así,

$$C = 180° - 60° - 75° = 45°.$$

En este punto, puede aplicarse la ley de los senos. Entonces,

$$\frac{c}{\text{sen } 45°} = \frac{6}{\text{sen } 60°} \Rightarrow c = \frac{6 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 60°} = \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}_{1}}\right) \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{{}_{1}\cancel{3}} = 2\sqrt{6}.$$

Lección 3

3.3 Cálculo del ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo, parte 1

Problema inicial

En cada uno de los siguientes casos, determina si puede construirse el triángulo y en caso afirmativo, calcula la medida del ángulo pedido.

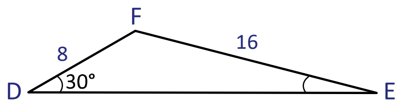
a) En el ΔDEF, $d = 16$, $e = 8$ y $D = 30°$. Calcula la medida del ángulo E.

b) En el ΔMNP, $n = 20$, $p = 8$ y $P = 30°$. Calcula la medida del ángulo N.

Solución

a) Se dibuja el triángulo DEF y se colocan los datos conocidos. Como se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos se aplica la ley de los senos. Por comodidad, se utilizará (1) de la clase 3.2.

$$\frac{\text{sen } E}{8} = \frac{\text{sen } 30°}{16} \Rightarrow \text{sen } E = \frac{8\text{sen } 30°}{16} = \frac{\cancel{8}\text{sen } 30°}{\cancel{16}} = \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}.$$



Cuando $\text{sen } E = \frac{1}{4}$ se tiene que $E \approx 14.5°$ o bien $E \approx 180° - 14.5° = 165.5°$.

Se sabe que en un triángulo $D + E + F = 180°$. Es necesario comprobar que los valores de E encontrados tienen sentido.

Puede revisarse la clase 2.7 de esta unidad para ver por qué el ángulo E puede tener dos valores.

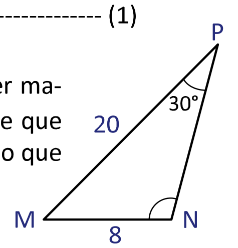
Para $E \approx 14.5°$ se tiene que $D + E \approx 30° + 14.5° = 44.5° < 180°$, por lo tanto $E \approx 14.5°$.

Para $E \approx 165.5°$ se tiene que $D + E \approx 30° + 165.5 = 195.5° > 180°$. Por lo tanto, E no puede tener un valor de 165.5°.

Luego, con los datos proporcionados puede construirse un solo triángulo y $E \approx 14.5°$.

b) Aplicando la ley de los senos se tiene que:

$$\frac{8}{\text{sen } 30°} = \frac{20}{\text{sen } N} \Rightarrow \text{sen } N = \frac{20 \text{ sen } 30°}{8} = \frac{\cancel{20} \text{ sen } 30°}{\cancel{8}} = 5\left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{5}{4} \quad \text{------------------ (1)}$$



Para $\text{sen } \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ se establecerá que esta razón trigonométrica no puede ser mayor que 1 o menor que –1. Para cualesquiera números reales x y y puede verse que $y^2 \leq x^2 + y^2$ (a un número positivo se le está sumando un número positivo). Por lo que $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq y \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, al dividir todo entre $\sqrt{x^2 + y^2}$ se obtiene

$$-1 \leq \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1, \text{ es decir, } -1 \leq \text{sen } \theta \leq 1.$$

Luego, de (1), como $\text{sen } N = \frac{5}{4} > 1$, no hay ángulo que cumpla esta condición ya que el seno no puede ser mayor a 1, y por lo tanto no puede construirse un triángulo con las medidas dadas.

Conclusión

Si se conocen las medidas de dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados conocidos, entonces puede determinarse si el triángulo puede construirse mediante la aplicación de la ley de los senos. Además, pueden calcularse todos los ángulos del triángulo mediante la aplicación de la misma.

Problemas

Determina cuántos triángulos ABC pueden construirse en cada caso, calcula además la medida del ángulo pedido de ser posible.

a) $b = 2$, $c = \sqrt{2}$ y $B = 45°$. Calcula C.

b) $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$ y $A = 120°$. Calcula B.

c) $b = 3$, $c = \sqrt{2}$ y $C = 150°$. Calcula B.

d) $b = 6$, $c = \sqrt{3}$ y $C = 135°$. Calcula B.

Indicador de logro:

3.3 Calcula la medida de un ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos lados, aplicando la ley de los senos.

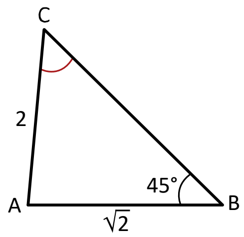
Secuencia:

En esta clase se continúa con la aplicación de la ley de los senos. En esta ocasión, se calcula un ángulo si se conocen dos lados, un ángulo opuesto y el ángulo a calcular es opuesto a uno de los lados conocidos. Por otra parte, es posible que con los datos conocidos, el triángulo no pueda construirse; la forma de determinar si se puede construir es observando si el valor del seno del ángulo a determinar es menor o igual que 1, y si ese es el caso, se debe verificar que el ángulo cumpla la condición de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

Solución de problemas:

a) Al dibujar el triángulo y ubicar los datos se observa que se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos. Además, el ángulo a calcular es opuesto al otro lado conocido, por lo tanto, se puede aplicar la ley de los senos:

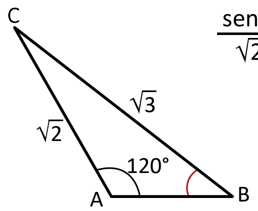
$$\frac{\text{sen } C}{\sqrt{2}} = \frac{\text{sen } 45°}{2} \Rightarrow \text{sen } C = \frac{\sqrt{2}\text{ sen } 45°}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$



Luego, el seno es igual a $\frac{1}{2}$ en 30°, por lo tanto, $C = 30°$ o bien $C = 180° - 30° = 150°$.

Si $C = 30°$ entonces $B + C = 75° < 180°$. Si $C = 150°$ entonces $B + C = 195° > 180°$, que es imposible, ya que $A + B + C = 180°$. Por lo tanto, puede construirse un triángulo con $C = 30°$.

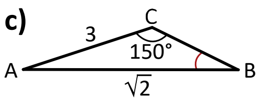
b)



$$\frac{\text{sen } B}{\sqrt{2}} = \frac{\text{sen } 120°}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{\sqrt{2}\text{ sen } 120°}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}\left(\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}\right) \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Es decir, $B = 45°$ o bien $B = 180° - 45° = 135°$. Claramente B no puede ser 135° ($A + B > 180°$). Por lo tanto, con $B = 45°$ puede construirse un triángulo.

c)



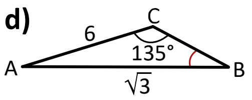
$$\frac{\text{sen } B}{3} = \frac{\text{sen } 150°}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{3\text{ sen } 150°}{\sqrt{2}} = 3\,\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1.$$

Por lo tanto, el triángulo no puede construirse.

Una fracción es mayor que 1 si su numerador es mayor que el denominador.

Como $(3\sqrt{2})^2 > 4^2$ se tiene que $3\sqrt{2} > 4$. Por tanto, $\frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$.

d)



$$\frac{\text{sen } B}{6} = \frac{\text{sen } 135°}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{6\text{ sen } 135°}{\sqrt{3}}$$

$$= \cancel{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \cancel{3}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}}$$

$$= \sqrt{6} > 1.$$

Por lo tanto, el triángulo no puede construirse.

No es necesario construir el triángulo de manera exacta. Para el caso del literal c, el triángulo no se puede construir, pero sí se puede hacer el dibujo como un supuesto con el objetivo de que sirva de guía para aplicar correctamente la ley de los senos.

3.4 Cálculo del ángulo de un triángulo conocidos dos lados y un ángulo, parte 2

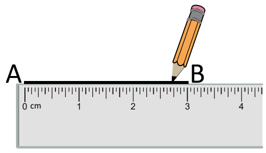
Problema inicial

Del triángulo ABC se sabe que a = 2 cm, c = 3 cm y A = 30°. Construye el triángulo y calcula la medida del ángulo C.

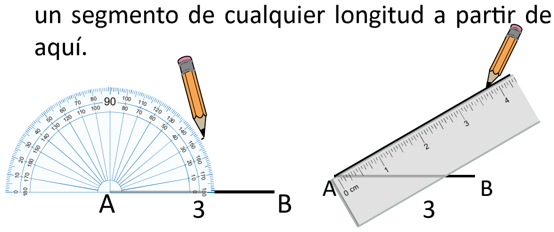
Solución

Puede construirse primero el triángulo de manera exacta como sigue:

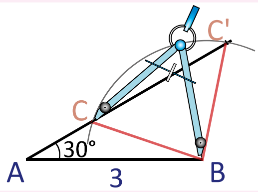
1. Trazar un segmento de longitud 3 cm. Se denota A el extremo inicial y B el extremo final.



2. Con vértice en A trazar un ángulo de 30° y trazar un segmento de cualquier longitud a partir de aquí.



3. Con el compás, medir una amplitud de 2 cm y haciendo centro en B trazar un arco de circunferencia hasta cortar al segmento trazado en el Paso 2. En este paso, se determinan dos cortes, por lo que con las medidas proporcionadas pueden dibujarse dos triángulos.



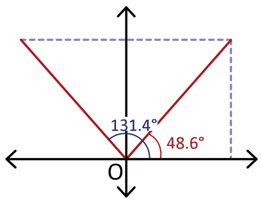
Para calcular el valor del ángulo C, nótese que se conocen dos lados del triángulo y el ángulo conocido es opuesto a un lado conocido, por lo tanto puede aplicarse la ley de los senos:

$$\frac{2}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{3}{\operatorname{sen} C} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} C = \frac{3 \operatorname{sen} 30°}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right) \div 2 = \frac{3}{4}.$$

Cuando sen $C = \frac{3}{4}$ se tiene que $C \approx 48.6°$ o bien $C \approx 180° - 48.6° = 131.4°$.

Hay que comprobar que ambos valores de C son válidos.

- Si $C \approx 48.6°$ se tiene que $A + C \approx 30° + 48.6° = 78.6° < 180°$.
- Si $C \approx 131.4°$ se tiene que $A + C \approx 30° + 131.4° = 161.4° < 180°$.



Luego, el valor del ángulo C con los datos dados puede ser aproximadamente 48.6° o 161.4°.

Conclusión

Si se conocen dos lados de un triángulo y un ángulo opuesto a uno de estos lados, en algunos casos, pueden construirse dos triángulos con dichas medidas. A este caso se le llama **caso ambiguo**.

Problemas

Para cada caso, determina cuántos triángulos pueden construirse con las medidas dadas, y calcula el ángulo pedido de ser posible.

a) a = 3, b = 4 y A = 30°. Calcula B.

b) a = 2, c = 1 y C = 20°. Calcula A.

c) a = 4, b = 6 y B = 60°. Calcula A.

Indicador de logro:

3.4 Determina el número de triángulos que pueden construirse cuando se conocen las medidas de dos lados y un ángulo opuesto a uno de estos.

Secuencia:

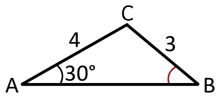
Luego de haber establecido la condición para que el seno de un ángulo exista, se calculan medidas de ángulos utilizando la ley de los senos. En este caso, puede obtenerse más de un triángulo.

Propósito:

Continuar con el uso de la ley de los senos para determinar ángulos de triángulos, e incluir el caso cuando se pueden construir dos triángulos conociendo dos lados y un ángulo opuesto a estos.

Solución de problemas:

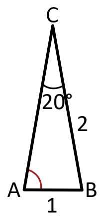
a)



$$\frac{\text{sen } B}{4} = \frac{\text{sen } 30°}{3} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{4 \text{ sen } 30°}{3} = \cancel{4}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Entonces $B \approx 41.8°$ o bien $B \approx 180° - 41.8° = 138.2°$. Para cualquiera de estos dos valores, $A + B$ resulta ser menor que 180°. Por lo tanto, pueden construirse dos triángulos, uno con $B \approx 41.8°$ y otro con $B \approx 138.2°$.

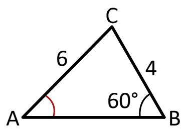
b)



$$\frac{\text{sen } A}{2} = \frac{\text{sen } 20°}{1} \Rightarrow \text{sen } A = 2 \text{ sen } 20° \Rightarrow A \approx 43.2° \text{ o bien A} \approx 180° - 43.2° = 136.8°.$$

Para ambos valores de A, el triángulo puede construirse (si $A \approx 43.2°$, $A + C \approx 63.2°$; si $A \approx 136.8°$, $A + C \approx 156.8°$). Por lo tanto, pueden construirse dos triángulos.

c)



$$\frac{\text{sen } A}{4} = \frac{\text{sen } 60°}{6} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \text{ sen } 60°}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \cancel{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Rightarrow A = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 35.3° \text{ o bien } A \approx 180° - 35.3° = 144.7°.$$

Se observa que para $A \approx 144.7°$ se obtiene que $A + B > 180°$. Por lo tanto, solo puede construirse un triángulo con $A \approx 35.3°$.

Fe de errata: En la solución los valores posibles para el ángulo *C* son 48.6° y 131.4°

3.5 Ley del coseno*

Problema inicial

Demuestra que en cualquier triángulo ABC se cumple que:

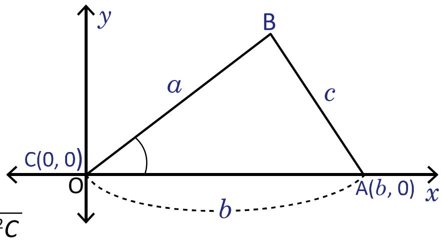
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Solución

Se ubica el triángulo ABC en el plano cartesiano de modo que A(b, 0) y C(0, 0).

Si (p, q) son las coordenadas del punto B, entonces

$$\cos C = \frac{p}{a} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} C = \frac{q}{a}.$$



Por lo que $p = a\cos C$ y $q = a\operatorname{sen} C$.

Ahora, la distancia del punto A al punto B es

$$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{(b - a\cos C)^2 + (0 - a\operatorname{sen} C)^2} \\ &= \sqrt{b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C + a^2\operatorname{sen}^2 C} \\ &= \sqrt{a^2(\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}. \end{aligned}$$

Pero la distancia de A a B es la longitud del lado AB del triángulo, que es c. Entonces,

$$d(\text{A, B}) = c \ \Rightarrow \ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Teorema (Ley del coseno)

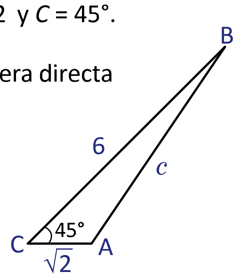
En un triángulo ABC se cumple que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

De igual forma se satisface que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$

Ejemplo

Determina la medida del tercer lado de un triángulo ABC si se sabe que $a = 6$, $b = \sqrt{2}$ y $C = 45°$.



Dibujando el triángulo y ubicando los datos se observa que se puede aplicar de manera directa la ley del coseno. Así,

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(6)(\sqrt{2})\cos 45° \\ &= 36 + 2 - \cancel{12}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) \\ &= 38 - 6(2) = 38 - 12 = 26. \end{aligned}$$

Como $c > 0$, se tiene que $c = \sqrt{26}$.

Problemas

Para cada caso, calcula la medida del tercer lado del triángulo.

a) En el ΔABC, $a = \sqrt{3}$, $b = 5$ y $C = 30°$.

b) En el ΔABC, $b = 6$, $c = 4$ y $A = 120°$.

c) En el ΔABC, $a = 9$, $c = 9\sqrt{3}$ y $B = 150°$.

d) En el ΔABC, $a = b = 4$ y $C = 60°$.

e) En el ΔABC, $a = \sqrt{2}$, $c = 2$ y $B = 135°$.

Indicador de logro:

3.5 Encuentra la medida de un lado de un triángulo si se conocen las medidas de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, aplicando la ley del coseno.

Secuencia:

Se deduce la ley del coseno para luego calcular la medida de un lado de un triángulo si se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Si el estudiante tiene muchas dificultades para resolver el Problema inicial, el docente deberá brindar más apoyo.

Propósito:

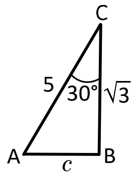
Proporcionar otra herramienta para calcular medidas de lados y ángulos de triángulos oblicuángulos. El Ejemplo tiene como objetivo mostrar la forma de utilizar la ley del coseno de manera directa.

Posibles dificultades:

Identificar la forma de aplicar la ley del coseno.

Solución de problemas:

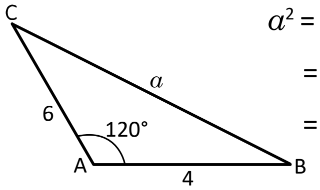
a)



$$c^2 = (\sqrt{3})^2 + 5^2 - 2(\sqrt{3})(5)\cos 30°$$
$$= 3 + 25 - \cancel{2}\sqrt{3}(5)\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$$
$$= 28 - 15 = 13$$

Como $c > 0$, se tiene que $c = \sqrt{13}$.

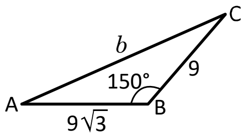
b)



$$a^2 = 6^2 + 4^2 - 2(6)(4)\cos 120°$$
$$= 52 - \cancel{2}(24)\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$
$$= 76$$

Como $a > 0$, se tiene que $a = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

c)



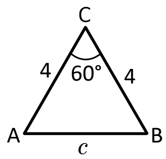
$$b^2 = 9^2 + (9\sqrt{3})^2 - 2(9)(9\sqrt{3})\cos 150°$$
$$= 81 + 81(3) - \cancel{2}(81\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$$
$$= 324 + 81(3) = 567$$

Como $b > 0$, se tiene que $b = \sqrt{567} = 9\sqrt{7}$.

Son útiles algunas propiedades de divisibilidad cuando se descomponen números en factores primos. Por ejemplo, en la divisibilidad por 3 se tiene: un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
Así, 567 es divisible por 3 ya que 5 + 6 + 7 = 18 es divisible por 3.

567	3
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

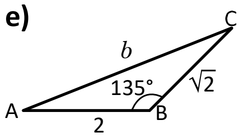
d)



$$c^2 = 4^2 + 4^2 - 2(4)(4)\cos 60°$$
$$= 32 - \cancel{2}(16)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$
$$= 16$$

Como $c > 0$, se tiene que $c = \sqrt{16} = 4$.

e)



$$b^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(\sqrt{2})(2)\cos 135°$$
$$= 6 - 2(\sqrt{2})(\cancel{2})\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)$$
$$= 6 + 4 = 10$$

Como $b > 0$, se tiene que $b = \sqrt{10}$.

No es necesario aproximar, además, los problemas no requieren del uso de la calculadora.

3.6 Cálculo de los ángulos de un triángulo conocidos sus tres lados

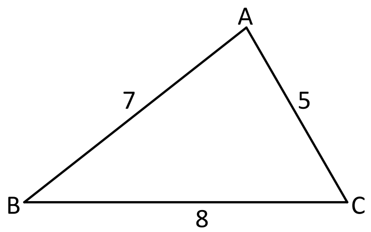
Problema inicial

Del triángulo ABC se sabe que $a = 8$, $b = 5$ y $c = 7$. Determina la medida de los tres ángulos del triángulo.

Solución

Se puede utilizar la ley del coseno para calcular un ángulo del triángulo. Utilizando $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, entonces:

$$\begin{aligned} 7^2 &= 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)\cos C \\ 2(8)(5)\cos C &= 8^2 + 5^2 - 7^2 \\ 80\cos C &= 64 + 25 - 49 \\ 80\cos C &= 40 \\ \cos C &= \frac{40}{80} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Cuando $\cos C = \frac{1}{2}$ se tiene que $C = 60°$.

Para calcular otro ángulo se aplica nuevamente la ley del coseno

$$\begin{aligned} 5^2 &= 7^2 + 8^2 - 2(7)(8)\cos B \\ 2(7)(8)\cos B &= 8^2 + 7^2 - 5^2 \\ 112\cos B &= 64 + 49 - 25 \\ 112\cos B &= 88 \\ \cos B &= \frac{88}{112} = \frac{11}{14}. \end{aligned}$$

Cuando $\cos B = \frac{11}{14}$, $B \approx 38.2°$.

Luego, $A = 180° - B - C \approx 180° - 38.2° - 60° = 81.8°$.

Por lo tanto, $A \approx 81.8°$, $B \approx 38.2°$ y $C = 60°$.

> Observa que para calcular el segundo ángulo también se puede utilizar la ley del seno.
>
> $$\frac{7}{\text{sen } 60°} = \frac{5}{\text{sen } B} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } B = \frac{5\text{sen } 60°}{7} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 7 = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$
>
> Cuando $\text{sen } B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $B \approx 38.2°$ o bien $B \approx 180° - 38.2° = 141.8°$. Pero si $B \approx 141.8°$ entonces $B + C \approx 141.8° + 60° = 201.8°$, lo cual no puede ser en un triángulo. Por lo tanto $B \approx 38.2°$.
> ¿Por qué es preferible utilizar la ley del coseno?

Conclusión

Si se conocen las medidas de los tres lados de un triángulo pueden calcularse las medidas de sus tres ángulos mediante la ley del coseno.

Problemas

1. Para cada caso, determina la medida de los tres ángulos del triángulo si es posible.

   a) En el ΔABC, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ y $c = 2$

   b) En el ΔABC, $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ y $c = \sqrt{5}$

   c) En el ΔABC, $a = 5$, $b = 3$ y $c = 7$

   d) En el ΔABC, $a = 6$, $b = 10$ y $c = 11$

   e) En el ΔABC, $a = \sqrt{3}$, $b = 12$ y $c = 9$

2. En el ΔABC expresa $\cos B$ en términos de los lados a, b y c.

Indicador de logro:

3.6 Calcula la medida de los ángulos de un triángulo si se conocen las medidas de sus tres lados.

Secuencia:

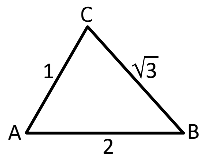
Se continúa con el uso de la ley del coseno, en esta ocasión para calcular los ángulos de un triángulo si se conocen las medidas de sus tres lados.

Solución de problemas:

Para resolver estos problemas, puede elegirse cualesquiera de los tres ángulos y calcularlo con la ley del coseno, ya que se conocen las medidas de los tres lados del triángulo.

1a) Considerando $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$:

$$(\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2^2 - 2(1)(2)\cos A \;\Rightarrow\; 4\cos A = 5 - 3 = 2 \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; A = 60°.$$



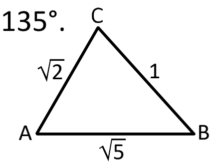
Para el cálculo de otro ángulo se considera $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$:

$$2^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2(\sqrt{3})(1)\cos C \;\Rightarrow\; 2\sqrt{3}\cos C = 4 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; \cos C = 0 \;\Rightarrow\; C = 90°.$$

Luego, como $A = 60°$ y $C = 90°$ se tiene que $B = 180° - 60° - 90° = 30°$.

1b) Calculando el ángulo C:

$$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(1)(\sqrt{2})\cos C \;\Rightarrow\; 2\sqrt{2}\cos C = 3 - 5 = -2 \;\Rightarrow\; \cos C = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; C = 135°.$$

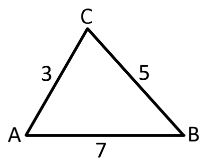


Calculando el ángulo B:

$$(\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2 - 2(\sqrt{5})(1)\cos B \;\Rightarrow\; 2\sqrt{5}\cos B = 4 \;\Rightarrow\; \cos B = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \;\Rightarrow\; B \approx 26.6°.$$

Luego, $A \approx 180° - 26.6° - 135° = 18.4°$.

1c) Calculando el ángulo A: $5^2 = 3^2 + 7^2 - 2(3)(7)\cos A \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{33}{42} = \frac{11}{14} \;\Rightarrow\; A \approx 38.2°$.

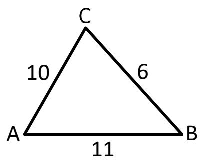


Calculando el ángulo C: $7^2 = 5^2 + 3^2 - 2(5)(3)\cos C \;\Rightarrow\; \cos C = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; C = 120°$.

Luego, $B \approx 180° - 38.2° - 120° = 21.8°$.

No es necesario simplificar las fracciones cuando el cálculo del ángulo se hace con la calculadora.

1d) Calculando el ángulo B: $10^2 = 6^2 + 11^2 - 2(6)(11)\cos B \;\Rightarrow\; \cos B = \frac{19}{44} \;\Rightarrow\; B \approx 64.4°$.



Calculando el ángulo C: $11^2 = 6^2 + 10^2 - 2(6)(10)\cos C \;\Rightarrow\; \cos C = \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; C \approx 82.8°$.

Luego, $A \approx 180° - 64.4° - 82.8° = 32.8°$.

1e) Calculando el ángulo A: $(\sqrt{3})^2 = 12^2 + 9^2 - 2(12)(9)\cos A \;\Rightarrow\; \cos C = \frac{37}{36} > 1$.

Por lo tanto, el triángulo no puede construirse.

2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \;\Rightarrow\; 2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2 \;\Rightarrow\; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

3.7 Practica lo aprendido

1. Calcula el área del triángulo ABC si se conocen los datos proporcionados en cada caso.

a) $a = 7$, $c = 4$ y $B = 45°$

b) $b = 10$, $c = 8$ y $A = 30°$

c) $a = 1$, $b = 2$ y $C = 45°$

d) $a = 4$, $b = 5$ y $C = 60°$

e) $a = 6$, $c = \sqrt{3}$ y $B = 120°$

2. En el triángulo ABC calcula el dato que se pide en cada caso, analizando si el resultado tiene sentido.

a) $b = 24$, $B = 38°$ y $C = 120°$. Calcula c.

b) $c = 10$, $A = 135°$ y $C = 30°$. Calcula a.

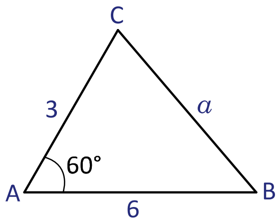
c) $a = 12$, $b = 16$ y $A = 45°$. Calcula el B.

d) $a = 3$, $b = 2$ y $B = 30°$. Calcula el A.

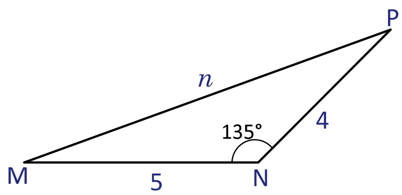
e) $b = 2$, $c = \sqrt{3}$ y $C = 120°$. Calcula el B.

3. Determina el valor del tercer lado en cada caso.

a)



b)

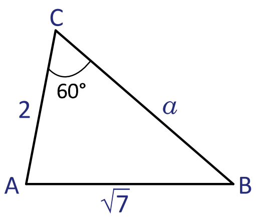


4. Calcula la medida de los tres ángulos del triángulo ABC para cada caso.

a) $a = 12$, $b = 7$ y $c = 6$

b) $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$

5. Determina la medida del tercer lado del triángulo ABC que muestra la figura.



Utiliza la ley del coseno y resuelve la ecuación cuadrática que resulta de ello.

6. Resuelve los siguientes triángulos, utilizando la ley de los senos y la ley del coseno.

a) $b = 21$, $A = 60°$, $B = 12°$

b) $a = 15$, $c = 7$, $B = 65°$

c) $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$

d) $c = 3$, $B = 110°$, $C = 45°$

Resolver un triángulo significa encontrar todas las medidas de sus lados y ángulos.

Indicador de logro:

3.7 Resuelve problemas correspondientes a la resolución de triángulos oblicuángulos.

Solución de problemas:

1a) $(ABC) = \frac{1}{\cancel{2}_{1}}(\cancel{4}^{2})(7)\text{sen } 45°$
$= (\cancel{2})(7)\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = 7\sqrt{2}$

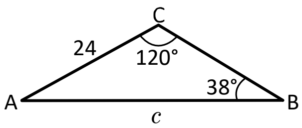
1b) $(ABC) = 20$

1c) $(ABC) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1d) $(ABC) = 5\sqrt{3}$

1e) $(ABC) = \frac{9}{2}$

2a) Utilizando la ley de los senos:



$$\frac{c}{\text{sen } 120°} = \frac{24}{\text{sen } 38°}$$
$$\Rightarrow c = \frac{24 \text{ sen } 120°}{\text{sen } 38°} \approx 33.8.$$

2b) $a = 10\sqrt{2}$ **2c)** $B \approx 70.5°$ **2d)** $A \approx 48.6°$

2e) Al utilizar la ley de los senos, se obtiene que sen B = 1; es decir, B = 90°. Pero cuando B = 90°, $B + C$ = 210° > 180°. Por lo tanto, el triángulo no puede construirse.

3a) $a^2 = 3^2 + 6^2 - 2(3)(6)\cos 60° = 9 + 36 - \cancel{2}(18)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 45 - 18 = 27 \Rightarrow a = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

3b) $n^2 = 5^2 + 4^2 - 2(5)(4)\cos 135° = 41 + 20\sqrt{2} \Rightarrow n = \sqrt{41 + 20\sqrt{2}}$

4a) $12^2 = 7^2 + 6^2 - 2(7)(6)\cos A \Rightarrow \cos A = -\frac{59}{84} \Rightarrow A \approx 134.6°.$

$7^2 = 12^2 + 6^2 - 2(12)(6)\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{131}{144} \Rightarrow B \approx 24.5°.$

Luego, $C \approx 180° - 134.6° - 24.5° = 20.9°.$

4b) $2^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{7}{8} \Rightarrow A \approx 29°.$

$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2(2)(3)\cos C \Rightarrow \cos C = -\frac{1}{4} \Rightarrow C \approx 104.5°.$

Luego, $B \approx 180° - 29° - 104.5° = 46.5°.$

5. $(\sqrt{7})^2 = a^2 + 2^2 - 2a(2)\cos 60° \Rightarrow 7 = a^2 + 4 - \cancel{2}(2a)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a - 3)(a + 1) = 0$

Es decir, a = 3 o a = –1. Pero a representa una longitud, por lo tanto no puede ser negativa. Entonces a = 3.

6a) Se observa que C = 180° – 60° – 12° = 108°. Aplicando la ley de los senos se determina $a \approx 87.5$. Aplicando nuevamente la ley de los senos se determina que $c \approx 96.1$.

6b) Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Se puede aplicar la ley del coseno y calcular el valor de b:

$$b^2 = 15^2 + 7^2 - 2(15)(7)\cos 65° = 274 - 210 \cos 65° \Rightarrow b \approx 13.6.$$

Utilizando ahora la ley del coseno para calcular el ángulo C:

$$7^2 \approx 15^2 + 13.6^2 - 2(15)(13.6)\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{15^2 + 13.6^2 - 7^2}{2(15)(13.6)} \Rightarrow C \approx 27.8°.$$

Luego, $A \approx 180° - 65° - 27.8° = 87.2°$. Por tanto, $A \approx 87.2°$, $C \approx 27.8°$ y $b \approx 13.6°$.

6c) Utilizando la ley del coseno para calcular el valor de A se tiene que $A \approx 97.2°$. El triángulo es isósceles, entonces $C = B$ por lo que

$$A + B + C = 180° \Rightarrow A + B + B = 180° \Rightarrow 2B = 180° - A \Rightarrow B = \frac{180° - A}{2} \approx 41.4°.$$

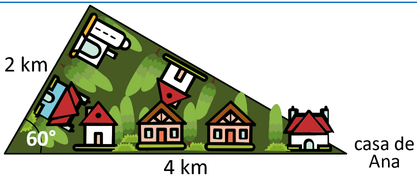
6d) Se observa que A = 180° – 110° – 45° = 25°. Luego, aplicando la ley de los senos se calcula el valor de b, obteniéndose $b \approx 4$. Aplicando nuevamente la ley de los senos se obtiene $a \approx 1.8$.

Lección 3

3.8 Aplicaciones de la ley de los senos y la ley del coseno

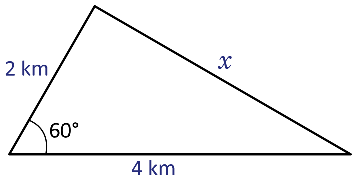
Problema inicial

Ana sale a correr cada mañana alrededor de su cuadra que tiene forma triangular. Primero recorre 4 km, luego 2 km y por último recorre la última calle para regresar a su casa. ¿Cuántos kilómetros corre Ana en total cada mañana si da una vuelta completa en su vecindario?



Solución

Para saber cuántos kilómetros corre Ana en total cada mañana, hay que encontrar la medida del tercer lado del vecindario. Como tiene forma triangular, se conocen dos lados y además el ángulo que se conoce es opuesto al lado que se desea calcular, se utiliza la ley del coseno.



$$x^2 = 4^2 + 2^2 - 2(4)(2)\cos 60° = 16 + 4 - 2(4)(\cancel{2})\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 20 - 8 = 12$$

Es decir, $x^2 = 12 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{12}$ o $x = -\sqrt{12}$.

Pero x representa una longitud por lo que no puede ser negativo. Entonces, $x \approx 3.5$ km. Luego, Ana corre cada mañana 4 km + 2 km + 3.5 km = 9.5 km, aproximadamente.

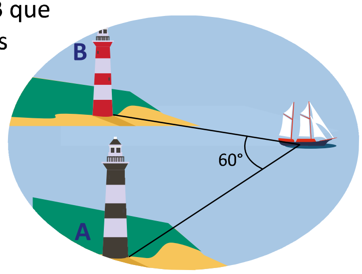
Conclusión

La ley de los senos y la ley del coseno pueden utilizarse para resolver problemas aplicados al entorno cuando dichos problemas involucren triángulos.

En algunos casos resulta útil aplicar la ley de los senos y en otras la ley del coseno, por ello es recomendable elaborar un dibujo y ubicar los datos conocidos y los datos que se desean calcular para identificar cuál de las dos leyes conviene utilizar.

Problemas

1. Un barco deja un faro A y navega 5 km. En este punto observa un faro B que está a 7 km del faro A. Si el ángulo entre las líneas de visión a ambos faros es de 60°, ¿a qué distancia está el bote del faro B?



2. Una casa tiene un patio en forma triangular y el dueño quiere ponerle grama, por lo que necesita calcular el área del patio para comprar la grama. Dos de los lados del patio miden 40 y 42 metros, y el ángulo opuesto al lado que mide 42 es de 120°. ¿Cuántos m^2 debe comprar de grama aproximadamente?

3. Un herrero desea construir un columpio usando dos triángulos isósceles en sus extremos. Si el ángulo distinto mide 30° y el lado opuesto a este quiere que mida 1 metro, ¿cuánto deben medir los otros dos lados?

4. Demuestra que el área de un paralelogramo es el producto de dos lados adyacentes y el seno del ángulo entre estos dos lados adyacentes.

Indicador de logro:

3.8 Utiliza la ley de los senos y la ley del coseno para resolver problemas que involucren triángulos oblicuángulos.

Secuencia:

Luego de haber deducido y aplicado la ley de los senos y del coseno, se resuelven problemas del entorno que requieran del uso de estas.

Propósito:

Consolidar el uso de la ley de los senos y del coseno, al resolver problemas del entorno.

Posibles dificultades:

Una de las dificultades que pueden tener los estudiantes al resolver problemas de aplicación, es identificar cuál de las leyes puede o debe utilizar. Además, identificar qué es lo que está calculando o qué es lo que debe calcular y cómo relacionarlo con el problema puede ser otra de las dificultades.

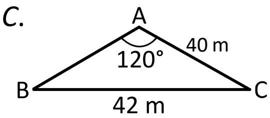
Solución de problemas:

1. Sea x la distancia que hay entre el barco y el faro B. Utilizando la ley del coseno para calcular el valor de x:

$$7^2 = 5^2 + x^2 - 2(5x)\cos 60° \Rightarrow 25 + x^2 - \cancel{2}(5x)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) - 49 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$
$$\Rightarrow (x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 8 \text{ o } x = -3.$$

Como x representa una distancia, no puede ser negativa. Por lo tanto, $x = 8$. Es decir, la distancia del barco al segundo faro es de 8 kilómetros.

2. No puede utilizarse la fórmula del área directamente, ya que los datos conocidos no cumplen las condiciones. Hay dos opciones: calcular la medida del lado c o calcular la medida del ángulo C.



Forma 1: $42^2 = c^2 + 40^2 - 2c(40)\cos 120°$

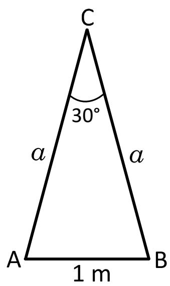
$$\Rightarrow c^2 + 40c - 164 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}\left(-40 \pm \sqrt{40^2 + 4(164)}\right) = -20 \pm 2\sqrt{141}.$$

Luego, $c = -20 + 2\sqrt{141}$. Entonces, el área del jardín es (ABC) $= \frac{1}{2}(40)(-20 + 2\sqrt{141})\text{sen } 120° \approx 64.9 \text{ m}^2$.

Forma 2: $\frac{\text{sen } B}{40} = \frac{\text{sen } 120°}{42} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{40 \text{ sen } 120°}{42} = \frac{10\sqrt{3}}{21} \Rightarrow B \approx 55.6°$.

Luego, $C \approx 180° - 120° - 55.6° = 4.4°$. Entonces, el área del jardín es (ABC) $= \frac{1}{2}(40)(42)\text{sen } 4.4° \approx 64.4 \text{ m}^2$.

3. Al representar los extremos del columpio con un triángulo, se tiene la figura de la derecha.

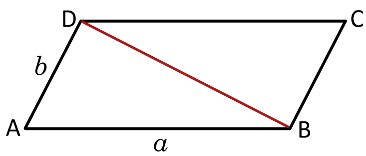


Utilizando la ley del coseno para calcular el valor de a:

$$1^2 = a^2 + a^2 - 2(a)(a)\cos 30° \Rightarrow 1 = 2a^2 - \cancel{2}(a^2)\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow 2a^2 - \sqrt{3}a^2 = 1 \Rightarrow a^2(2-\sqrt{3}) = 1.$$
$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 1.9.$$

Por lo tanto, los lados de los extremos deben medir aproximadamente 1.9 metros.

4. Tomando el paralelogramo ABCD cuyos lados miden a y b, se traza la diagonal BD. Los triángulos ABD y CDB son congruentes, por el criterio LAL.



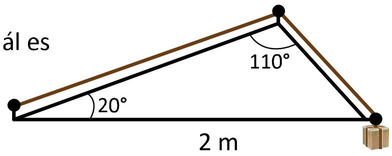
El área del triángulo ABD es (ABD) $= \frac{1}{2}ab$ sen A.

Como $\Delta ABD \cong \Delta CDB$, sus áreas son iguales. Entonces, (ABCD) = (ABD) + (CDB) = 2(ABD) = absen A.

Por lo tanto, el área de un paralelogramo es igual al producto de los lados adyacentes por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

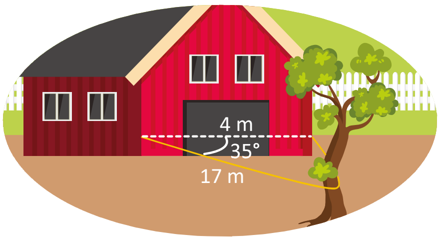
3.9 Practica lo aprendido

1. Una caja está sostenida por una cuerda, como muestra la figura. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

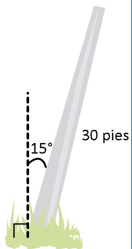


2. La capitana de un barco observa dos faros mientras navega. El barco se encuentra a 15 millas de un faro y a 20 millas del otro faro. Si la capitana determina que el ángulo entre las dos líneas de visión hacia los faros es de 120°, ¿cuál es la distancia entre los faros?

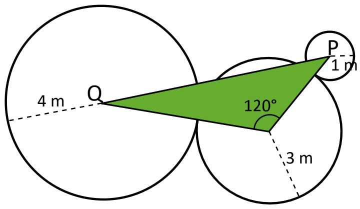
3. Un granjero tiene un establo y necesita hacer un corral extra. Para ello tiene un lazo de 38 metros y piensa atar el lazo como muestra la figura. ¿Tiene el granjero suficiente lazo si los nudos están a una distancia de 4 metros?



4. Un poste de 30 pies de largo se ha inclinado aproximadamente 15° de su posición original. El alcalde de la ciudad piensa sostenerlo con un cable de acero pero necesita calcular cuánto necesita de cable. Si amarra el cable a 100 pies de la base del poste, ¿cuánto necesita aproximadamente?



5. Se construirá la decoración de un jardín en forma triangular, como muestra la figura. Si cada vértice del triángulo es centro de la circunferencia sobre la que está, ¿cuál es la longitud de PQ?



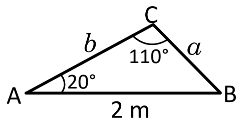
6. Un grupo de exploradores está aprendiendo a navegar para un viaje de supervivencia. Sobre un mapa les han ubicado tres puntos que deben visitar, sin embargo, necesitan conocer las medidas de los ángulos para saber qué tanto deben girar. ¿Cuáles son los ángulos que deben girar para poder visitar los tres puntos?

Indicador de logro:

3.9 Resuelve problemas correspondientes a la aplicación de la ley de los senos y del coseno a problemas del entorno.

Solución de problemas:

1. Al dibujar el triángulo y ubicar los datos, se obtiene el gráfico de la derecha. El ángulo B es igual a 180° – 20° – 110° = 50°. Luego, utilizando la ley de los senos para calcular el valor de a:



$$\frac{a}{\text{sen } 20°} = \frac{2}{\text{sen } 110°} \Rightarrow a = \frac{2 \text{ sen } 20°}{\text{sen } 110°} \approx 0.7.$$

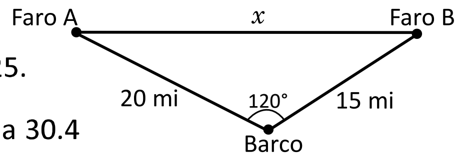
Se aplica nuevamente la ley de los senos para calcular el valor de b:

$$\frac{b}{\text{sen } 50°} = \frac{2}{\text{sen } 110°} \Rightarrow b = \frac{2 \text{ sen } 50°}{\text{sen } 110°} \approx 1.6.$$

También es válido sumar los resultados de los lados y aproximar al final, en tal caso se obtiene 2.4 m.

Luego, la longitud de la cuerda es de aproximadamente 1.6 m + 0.7 m = 2.3 m.

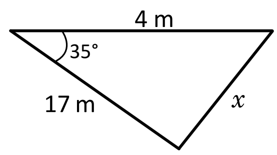
2. Elaborando un gráfico y ubicando los datos se observa que se puede aplicar la ley del coseno para calcular la distancia entre los faros.



$$x^2 = 20^2 + 15^2 - 2(20)(15)\cos 120° = 625 - \cancel{2}(300)\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 625 + 300 = 925.$$

Entonces, $x = \sqrt{925} \approx 30.4$. Es decir, los faros están aproximadamente a 30.4 millas de distancia.

3. Si se considera que la figura formada es un triángulo, se tiene:

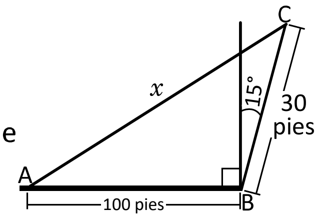


Para saber si le alcanza la cantidad de lazo que tiene hay que calcular el valor de x y luego ver si $17 + x$ es menor o igual que 38. Utilizando la ley del coseno:

$$x^2 = 4^2 + 17^2 - 2(4)(17)\cos 35° = 305 - 136 \cos 35° \approx 193.6.$$

Entonces $x \approx 13.9$. Luego, 17 + 13.9 = 30.9. Por tanto, el granjero tiene suficiente lazo.

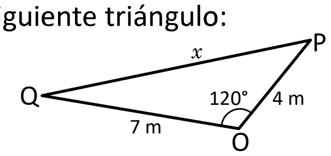
4. El ángulo B mide 90° + 15° = 105°. Por la ley del coseno:



$$x^2 = 100^2 + 30^2 - 2(100)(30)\cos 105° \approx 12\,452.9.$$

Entonces, $x \approx 111.6$. Es decir, necesita aproximadamente 111.6 pies de cable para amarrar el poste.

5. Se observa que las circunferencias son tangentes. Sea O el tercer vértice. Como cada vértice del triángulo cae en el centro de cada circunferencia, puede observarse que OQ = 4 + 3 = 7 y OP = 3 + 1 = 4. Se tiene el siguiente triángulo:

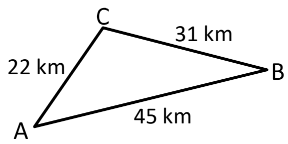


Como se desea conocer la longitud de $\overline{PQ}$, se aplica la ley del coseno:

$$x^2 = 7^2 + 4^2 - 2(7)(4)\cos 120° = 93.$$

Entonces, la longitud de PQ es de aproximadamente 9.6 metros.

6. Como se conocen los tres lados del triángulo, se aplica la ley del coseno.



$$31^2 = 22^2 + 45^2 - 2(22)(45)\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{43}{55} \Rightarrow A \approx 38.6°.$$

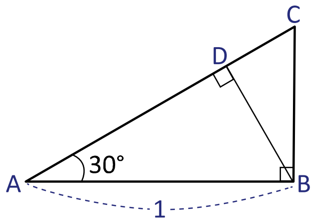
$$22^2 = 31^2 + 45^2 - 2(31)(45)\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{1251}{1395} = \frac{139}{155} \Rightarrow B \approx 26.3°.$$

Luego, $C \approx 180° - 38.6° - 26.3° = 115.1°$.

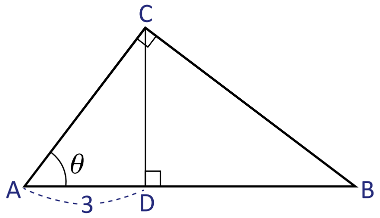
Aunque depende del orden en que visiten los puntos indicados, los ángulos que deben girar son 38.6°, 26.3° y de 115.1°.

3.10 Problemas de la unidad

1. De la siguiente figura, calcula las longitudes de los segmentos AD, DC, AC, BD y BC. Racionaliza cuando sea necesario.



2. De la siguiente figura, escribe las longitudes de los segmentos BC, AC, DB y AB en términos del ángulo θ.

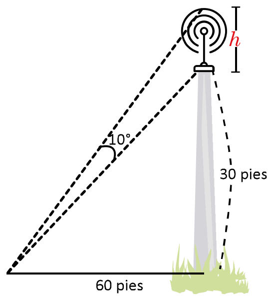


3. Un pentágono regular está inscrito en un círculo de radio 7. Calcula el perímetro del pentágono.

4. Una escalera de 30 pies de largo yace sobre una pared con una inclinación de 70°. Determina la distancia a la que se encuentra el pie de la escalera de la pared.

5. Desde la punta de un faro de 50 pies se observa un bote a un ángulo de depresión de 11°. ¿A qué distancia está el bote del faro?

6. Una antena vertical está montada en el tope de un poste de 30 pies de altura. Desde un punto a 60 pies de la base del poste, la antena subtiende un ángulo de 10°, como muestra la figura. Calcula la longitud h de la antena.



7. Calcula lo que se pide, si los datos se refieren a un triángulo rectángulo.

   a) Si $\cos\theta = \frac{1}{3}$, calcula $\operatorname{sen}\theta$.
   b) Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4}$, calcula $\cos\theta$.
   c) Si $\tan\theta = 2$, calcula $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.
   d) Si $\sec\theta = 7$, calcula $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

8. Calcula la distancia entre P y Q para cada caso.

   a) P(–1, 3) y Q(2, 5)
   b) P(2, 3) y Q(2, 6)

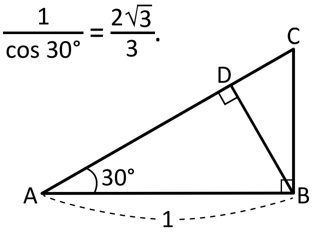
9. Calcula el perímetro del cuadrilátero ABCD que tiene por vértices A(–3, –1), B(0, 3), C(3, 4) y D(4, 1).

Indicador de logro:

3.10 Resuelve problemas correspondientes a la resolución de triángulos oblicuángulos.

Solución de problemas:

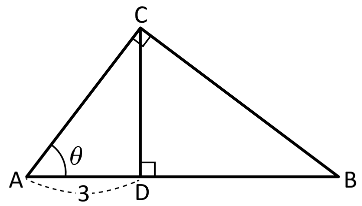
1. En el ΔABC se tiene que $\tan 30° = \frac{BC}{1} \Rightarrow BC = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\cos 30° = \frac{1}{AC} \Rightarrow AC = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



Ahora, en el ΔABD, $\cos 30° = \frac{AD}{1} \Rightarrow AD = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen} 30° = \frac{BD}{1} \Rightarrow BD = \frac{1}{2}$.

Para calcular DC: $DC = AC - AD = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. En el ΔADC: $\cos\theta = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = \frac{3}{\cos\theta}$.



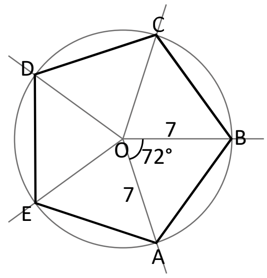
Luego, en el ΔABC: $\tan\theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC\tan\theta = \frac{3\tan\theta}{\cos\theta}$,

y $\cos\theta = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\cos\theta} = \frac{3}{\cos^2\theta}$.

Por último, $DB = AB - AD = \frac{3}{\cos^2\theta} - 3 = \frac{3 - 3\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{3(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{3\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = 3\tan^2\theta$.

3. Un pentágono regular puede construirse dividiendo una circunferencia en 5 partes iguales. Entonces, los ángulos AOB, BOC, COD, DOE, EOA son iguales a 72°(360° ÷ 5).

Un pentágono regular inscrito en una circunferencia cumple que los segmentos que unen el centro con los vértices del polígono son radios. Entonces, cada segmento OA, OB, OC, OD y OE tienen una longitud de 7.



Luego, los triángulos AOB, BOC, COD, DOE y EOA son isósceles. Considerando el ΔAOB:

$$(AB)^2 = 7^2 + 7^2 - 2(7)(7)\cos 72° = 2(7^2) - 2(7^2)\cos 72° = 2(7^2)(1 - \cos 72°)$$

Entonces, $AB = \sqrt{2(7^2)(1-\cos 72°)} = 7\sqrt{2(1-\cos 72°)}$. Por lo tanto, el perímetro del pentágono es

$$5AB = 35\sqrt{2(1-\cos 72°)}.$$

4. Sea d la distancia que hay entre el pie de la escalera a la pared.

$\cos 70° = \frac{d}{30} \Rightarrow d = 30\cos 70° \approx 10.3$.

Por lo tanto, el pie de la escalera se encuentra aproximadamente a 10.3 pies de la pared.

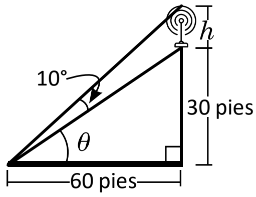
5. Sea d la distancia que hay entre el bote y el faro.

$\tan 11° = \frac{50}{d} \Rightarrow d = \frac{50}{\tan 11°} \approx 257.2$.

Por lo tanto, el bote está aproximadamente a 257.2 pies del faro.

6. Al elaborar un gráfico y ubicar los datos, se obtiene la figura que se muestra. Luego,

$$\tan\theta = \frac{30}{60} \Rightarrow \theta \approx 26.6°.$$



Por otra parte,

$$\tan(\theta + 10°) = \frac{30 + h}{60}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ 30 + h = 60\tan(\theta + 10°)\\
&\Rightarrow\ h = 60\tan(\theta + 10°) - 30\\
&\qquad \approx 60\tan(26.6° + 10°) - 30\\
&\qquad = 60\tan 36.6° - 30\\
&\qquad \approx 14.6.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la altura de la antena es de aproximadamente 14.6 pies.

7a) sen $\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

7b) cos $\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

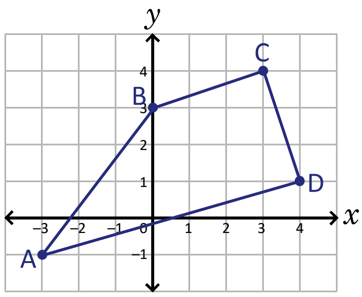
7c) cos $\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, sen $\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

7d) cos $\theta = \frac{1}{7}$, sen $\theta = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

8a) d(P, Q) = $\sqrt{13}$.

8b) d(P, Q) = 3

9. Resulta útil graficar el cuadrilátero en el plano cartesiano.



Para calcular el perímetro, se calculan las longitudes de los lados del cuadrilátero. Utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos:

- $d(A, B) = \sqrt{(0-(-3))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
- $d(B, C) = \sqrt{10}$
- $d(C, D) = \sqrt{10}$
- $d(A, D) = \sqrt{53}$

Luego, el perímetro de ABCD es $5 + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{53} = 5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{53}$.

3.11 Problemas de la unidad

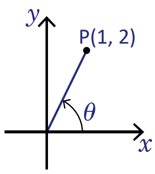
10. Determina el simétrico de cada punto respecto al eje x, respecto al eje y y respecto al origen. Grafica en cada caso.

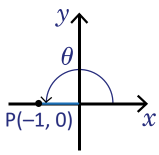
a) P(0, 3) b) $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ c) P(–2, 0) d) P(–1, –1)

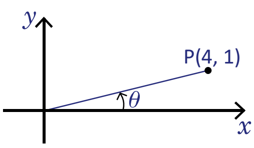
11. Dibuja cada ángulo e identifica a qué cuadrante pertenece.

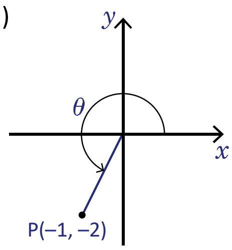
a) 800° b) –300° c) 1 050° d) –735°

12. Determina los valores de seno, coseno y tangente de θ en cada caso.

a)


b)


c)


d)


13. Representa los valores de las razones trigonométricas en términos de los valores de sen θ, cos θ y tan θ, donde $0° \leq \theta < 90°$.

a) 150° b) 370° c) 450° d) 535°

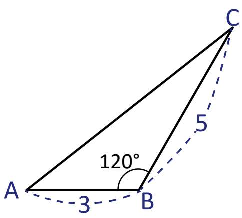
14. Determina los valores que se piden en cada caso.

a) sen θ y tan θ si cos $\theta = -\frac{1}{3}$ y $90° < \theta < 180°$.

b) tan θ si sen $\theta = \frac{3}{4}$ y θ está en el segundo cuadrante.

c) cos θ y sen θ si sec θ = 2 y θ está en el primer cuadrante.

15. Calcula el área del triángulo ABC.



16. Calcula los valores que se piden.

a) El valor de c si $a = 3$, $A = 60°$ y $C = 45°$.

b) El valor de B si $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ y $A = 30°$.

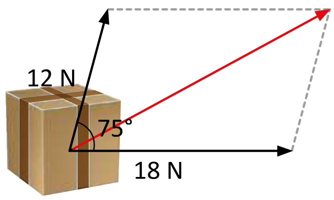
c) El valor de a si $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$ y $A = 150°$.

d) La medida de los tres ángulos si $a = b = 2$ y $c = \sqrt{3}$.

e) El valor de A si $a = 4$, $b = 1$ y $B = 60°$.

La unidad de medida de la fuerza aplicada a objetos es el newton y se simboliza por **N**.

17. Cuando dos fuerzas en direcciones distintas actúan sobre un objeto, la fuerza resultante es la diagonal del paralelogramo formado por las fuerzas aplicadas. Si dos fuerzas de 12 y 18 newtons actúan sobre un objeto a un ángulo de 75°, ¿cuál es el valor de la fuerza resultante?



Unidad 5

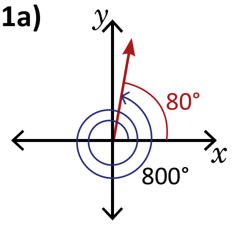
Indicador de logro:

3.11 Resuelve problemas correspondientes a la resolución de triángulos oblicuángulos.

Solución de problemas:

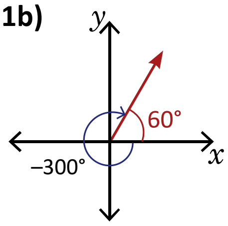
	Respecto al eje x	Respecto al eje y	Respecto al origen	Respecto a la recta identidad
10a)	$P_1(0, -3)$	$P_2(0, 3)$	$P_3(0, -3)$	$P_4(3, 0)$
10b)	$P_1\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$P_2\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$	$P_3\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$P_4\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
10c)	$P_1(-2, 0)$	$P_2(2, 0)$	$P_3(2, 0)$	$P_4(0, -2)$
10d)	$P_1(-1, 1)$	$P_2(1, -1)$	$P_3(1, 1)$	$P_4(-1, -1)$

11a)

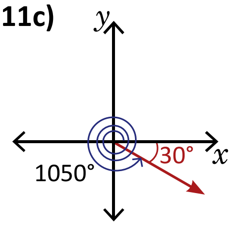


800° = 360°(2) + 80°

11b)

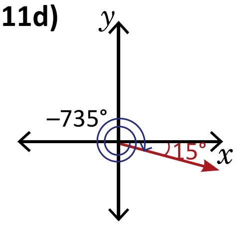


11c)



1050° = 360°(2) + 330°

11d)



−735° = −360°(2) − 15°

12a) $r = \sqrt{5}$, por lo tanto, sen $\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, cos $\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ y tan $\theta = \frac{y}{x} = 2$.

12b) $r = 1$, por lo tanto, sen $\theta = 0$, cos $\theta = -1$ y tan $\theta = 0$.

12c) $r = \sqrt{17}$, por lo tanto, sen $\theta = \frac{\sqrt{17}}{17}$, cos $\theta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ y tan $\theta = \frac{1}{4}$.

12d) $r = \sqrt{5}$, por lo tanto, sen $\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, cos $\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ y tan $\theta = 2$.

13a) 150° = 180° – 30°. Entonces, sen 150° = sen 30°, cos 150° = – cos 30° y tan 150° = – tan 30°.

13b) 370° = 360° + 10°. Entonces, sen 370° = sen 10°, cos 370° = cos 10° y tan 370° = tan 10°.

13c) 450° = 360° + 90°. Entonces, sen 450° = sen 90°, cos 450° = cos 90° y tan 450° no está definida.

13d) 535° = 360° + 175°. Ángulo de referencia de 175° es 180° – 175° = 5°. Entonces,
sen 535° = sen 175° = sen 5°, cos 535° = cos 175° = – cos 5° y tan 535° = tan 175° = – tan 5°.

14a) sen $\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ y tan $\theta = -2\sqrt{2}$ **14b)** cos $\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ y tan $\theta = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$ **14c)** cos $\theta = \frac{1}{2}$ y sen $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

15. $(ABC) = \frac{1}{2}(3)(5)\text{sen}120° = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

16a) $c = \sqrt{6}$ **16b)** $B = 60°$ o $B = 120°$ **16c)** $a = 2\sqrt{7}$ **16d)** $A = B \approx 64.34°$, $C \approx 51.32°$

16e) sen $A = 2\sqrt{3} > 1$. Por lo tanto, el triángulo no puede construirse.

En 16d sugerir a los estudiantes aproximar hasta las centésimas.

17. Por propiedades del paralelogramo, el ángulo B es igual a 180° – 75° = 105°. Además, BC = 12. Para calcular la diagonal AC se puede utilizar la ley del coseno:

$$(AC)^2 = 18^2 + 12^2 - 2(18)(12)\cos 105° \approx 579.8 \Rightarrow AC \approx 24.1.$$

Por lo tanto, la fuerza resultante es de aproximadamente 24.1 newtons.