Unidad 6. Identidades y ecuaciones trigonométricas

Competencia de la unidad

Deducir identidades trigonométricas básicas mediante propiedades de simetría en el plano, para el cálculo de valores trigonométricos exactos y la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo	Primer año de bachillerato	Segundo año de bachillerato
Unidad 5: Figuras semejantes (9°) • Semejanza • Semejanza de triángulos • Semejanza y paralelismo • Aplicaciones de semejanza y triángulos semejantes	**Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos** • Razones trigonométricas de ángulos agudos • Razones trigonométricas de ángulos no agudos • Resolución de triángulos oblicuángulos	**Unidad 5: Funciones trascendentales II** • Función biyectiva e inversa • Función logarítmica • Funciones trigonométricas • Práctica en GeoGebra
Unidad 6: Teorema de Pitágoras (9°) • Teorema de Pitágoras • Aplicación del teorema de Pitágoras	**Unidad 6: Identidades y ecuaciones trigonométricas** • Identidades trigonométricas • Ecuaciones trigonométricas	

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Identidades trigonométricas	1	1. Identidades trigonométricas de los ángulos $-\theta$, 90° – θ y 180° – θ
	1	2. Identidades trigonométricas de los ángulos θ + 180°, θ – 180° y 90° + θ
	1	3. Ángulo adición
	1	4. Valores exactos de las razones trigonométricas, parte 1
	1	5. Ángulo doble
	1	6. Ángulo medio
	1	7. Valores exactos de las razones trigonométricas, parte 2
	1	8. Practica lo aprendido
2. Ecuaciones trigonométricas	1	1. Ecuaciones trigonométricas, parte 1
	1	2. Ecuaciones trigonométricas, parte 2 (uso de la identidad pitagórica)
	1	3. Ecuaciones trigonométricas, parte 3 (uso del ángulo doble del coseno)
	1	4. Ecuaciones trigonométricas, parte 4 (uso del ángulo doble del seno)
	1	5. Ecuaciones trigonométricas, parte 5
	1	6. Practica lo aprendido
	1	7. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la unidad 6
	2	Prueba del tercer periodo

15 horas clase + prueba de la unidad 6 + prueba del tercer periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Identidades trigonométricas
En esta lección se establecen las identidades trigonométricas más relevantes y el uso de ellas para el cálculo de valores exactos de razones trigonométricas.
Lección 2: Ecuaciones trigonométricas
Se resuelven ecuaciones trigonométricas utilizando las identidades establecidas en la Lección 1, además de utilizar otras herramientas como la identidad pitagórica y el método de tijera.

1.1 Identidades trigonométricas de los ángulos $-\theta$, 90° – θ y 180° – θ

Problema inicial

Demuestra que

1. $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$
2. $\cos(90° - \theta) = \text{sen}\,\theta$ y $\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
3. $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ y $\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen}\,\theta$

Utiliza simetrías respecto al eje x, a la recta identidad y al eje y.

Solución

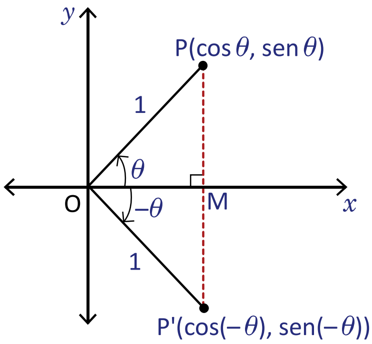
1. De la clase 2.2 de la Unidad 5 se sabe que si P es un punto del plano cartesiano con coordenadas (a, b), las coordenadas del punto simétrico P' respecto al eje x es $(a, -b)$.

   Sea el punto P(a, b) tal que OP = 1 y $\overline{\text{OP}}$ forme un ángulo θ con el eje x. Las coordenadas de P son $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$. Entonces, las coordenadas de su simétrico respecto al eje x es

   P'$(\cos\theta, -\text{sen}\,\theta)$ ------------------ (1)

   Por otra parte, $\overline{\text{OP'}}$ forma un ángulo $-\theta$ con el eje x. Por lo tanto, las coordenadas de P' son

   $(\cos(-\theta), \text{sen}(-\theta))$ ------------------ (2)



   Comparando (1) y (2) se tiene que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$.

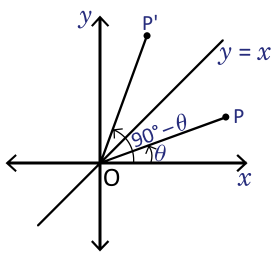
2. Se sabe que si P es un punto sobre el plano cartesiano con coordenadas (a, b), las coordenadas del punto P' simétrico respecto a la recta identidad es (b, a).

   Se considera P$(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$, entonces su simétrico respecto a la recta identidad es

   P'$(\text{sen}\,\theta, \cos\theta)$ ------------------ (3)

   Como P' es el simétrico de P, se tiene que $\overline{\text{OP'}}$ forma un ángulo de 90° – θ con el eje x; esto quiere decir que las coordenadas de P' son

   $(\cos(90° - \theta), \text{sen}(90° - \theta))$ ------------------ (4)



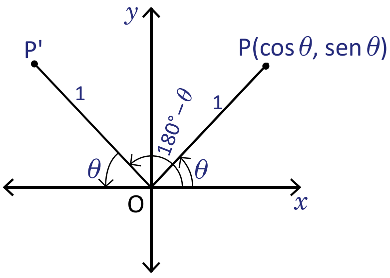
   De (3) y (4) puede determinarse que $\cos(90° - \theta) = \text{sen}\,\theta$ y $\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$.

3. Se sabe que si P(a, b) es un punto del plano cartesiano, entonces P'$(-a, b)$ es su simétrico con respecto al eje y.

Lección 1

Si se considera P un punto del plano cartesiano, tal que OP = 1 y $\overline{\text{OP}}$ forme un ángulo θ con el eje x, sus coordenadas son ($\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$). Entonces su simétrico respecto al eje y es

P'($-\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$) ------------------ (5)



Por otra parte, $\overline{\text{OP'}}$ forma un ángulo de $180° - \theta$ con el eje x. Así, las coordenadas de P' son

($\cos(180° - \theta)$, $\operatorname{sen}(180° - \theta)$) ------------------ (6)

Luego, de (5) y (6) se concluye que $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ y $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$.

Conclusión

Una **identidad trigonométrica** es una igualdad donde intervienen razones trigonométricas y es verdadera para cualquier valor del ángulo.

Para cualquier ángulo θ se cumplen las identidades de ángulos opuestos para el coseno y el seno

a) $\cos(-\theta) = \cos\theta$ b) $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

Para cualquier ángulo θ se cumplen las identidades de ángulos complementarios y suplementarios para el coseno y el seno

c) $\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ d) $\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$

e) $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ f) $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

Además, se cumplen las siguientes identidades para la tangente

g) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ h) $\tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$ i) $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

Ejemplo

Representa cada razón en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

1. cos ($-40°$) 2. sen 120° 3. tan 320°

1. Utilizando la identidad de ángulos opuestos, $\cos(-40°) = \cos 40°$.
2. Utilizando la identidad de ángulos suplementarios, $\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen}(180° - 120°) = \operatorname{sen} 60°$.
3. En este caso se aplica primero la identidad de ángulos suplementarios

$$\tan 320° = -\tan(180° - 320°) = -\tan(-140°) = \tan 140° = -\tan(180° - 140°) = -\tan 40°.$$

Es decir, $\tan 320° = -\tan 40°$.

Problemas

1. Representa cada razón trigonométrica en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$. Indica qué tipo de identidad o identidades hay que utilizar.

a) $\cos(-30°)$ b) sen 170° c) sen 110°

d) cos 250° e) $\tan(-60°)$ f) $\tan(-100°)$

2. Demuestra que $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.
3. Demuestra que $\tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$.
4. Demuestra que $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$.

Unidad 6

Indicador de logro:

1.1 Representa razones trigonométricas en términos de ángulos agudos utilizando las identidades trigonométricas de ángulos opuestos, complementarios y suplementarios.

Secuencia:

Se inicia la unidad con la deducción de tres identidades trigonométricas utilizando ángulos en el plano cartesiano y las simetrías de un punto respecto a los ejes coordenados, al origen y a la recta identidad.

Propósito:

Introducir identidades trigonométricas de ángulos opuestos, complementarios y suplementarios, para luego utilizarlas al reescribir una razón trigonométrica en términos de un ángulo agudo.

Solución de problemas:

1a) $\cos(-30°) = \cos 30°$

1b) $\operatorname{sen} 170° = \operatorname{sen}(180° - 170°) = \operatorname{sen} 10°$
O bien,
$\operatorname{sen} 170° = \cos(90° - 170°) = \cos(-80°) = \cos 80°$.

1c) $\operatorname{sen} 110° = \operatorname{sen}(180° - 110°) = \operatorname{sen} 70°$
O bien,
$\operatorname{sen} 110° = \cos(90° - 110°) = \cos(-20°) = \cos 20°$.

1d) $\cos 250° = -\cos(180° - 250°) = -\cos(-70°) = -\cos 70°$

Puede resolverse también con la identidad del ángulo complementario:

$\cos 250° = \operatorname{sen}(90° - 250°) = \operatorname{sen}(-160°) = -\operatorname{sen} 160° = -\operatorname{sen}(180° - 160°) = -\operatorname{sen}(20°)$.

1e) $\tan(-60°) = -\tan 60°$

1f) $\tan(-100°) = -\tan 100° = -[-\tan(180° - 100°)] = \tan 80°$.

Dependiendo de cómo se apliquen las identidades, puede obtenerse un resultado distinto, como puede observarse en los literales b, c y d del numeral 1.

2. $\tan(-\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \dfrac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$

3. $\tan(90° - \theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(90° - \theta)}{\cos(90° - \theta)} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$,

por otro lado,

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Por lo tanto, $\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$.

4. $\tan(180° - \theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(180° - \theta)}{\cos(180° - \theta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$

1.2 Identidades trigonométricas de los ángulos $\theta + 180°$, $\theta - 180°$ y $90° + \theta$

Problema inicial

Demuestra que

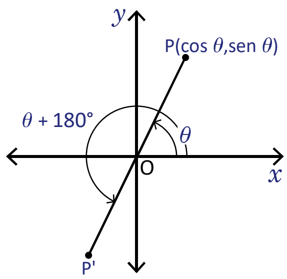
1. $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ y $\operatorname{sen}(\theta + 180°) = -\operatorname{sen}\theta$
2. $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$ y $\operatorname{sen}(\theta - 180°) = -\operatorname{sen}\theta$
3. $\cos(90° + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$

Utiliza la simetría respecto al origen y las identidades de la clase anterior.

Solución

a) Sea el punto P(a, b) tal que OP = 1 y $\overline{\text{OP}}$ forme un ángulo θ con el eje x. Las coordenadas de P son ($\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$). Entonces, las coordenadas de su simétrico respecto al origen son

$$\text{P}'(-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta) \quad \text{------------------} \ (1)$$



Pero $\overline{\text{OP}'}$ forma un ángulo de $\theta + 180°$ con el eje x, por lo que las coordenadas de P' son

$$(\cos(\theta + 180°), \operatorname{sen}(\theta + 180°)) \quad \text{------------------} \ (2)$$

Luego, de (1) y (2) se tiene que $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ y $\operatorname{sen}(\theta + 180°) = -\operatorname{sen}\theta$.

b) El ángulo $\theta - 180°$ puede reescribirse como $-(180° - \theta)$. Entonces,

$$\cos(\theta - 180°) = \cos(-(180° - \theta)) = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta \text{ y}$$
$$\operatorname{sen}(\theta - 180°) = \operatorname{sen}(-(180° - \theta)) = -\operatorname{sen}(180° - \theta) = -\operatorname{sen}\theta.$$

c) El ángulo $90° + \theta$ puede reescribirse como $180° - (90° - \theta)$. Entonces,

$$\cos(90° + \theta) = \cos(180° - (90° - \theta)) = -\cos(90° - \theta) = -\operatorname{sen}\theta \text{ y}$$
$$\operatorname{sen}(90° + \theta) = \operatorname{sen}(180° - (90° - \theta)) = \operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta.$$

Conclusión

Para cualquier ángulo θ se cumple que

a) $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$
b) $\operatorname{sen}(\theta + 180°) = -\operatorname{sen}\theta$
c) $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$
d) $\operatorname{sen}(\theta - 180°) = -\operatorname{sen}\theta$
e) $\cos(90° + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$
f) $\operatorname{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$

Además, se cumplen las siguientes identidades para la tangente

g) $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$
h) $\tan(\theta - 180°) = \tan\theta$
i) $\tan(90° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

Ejemplo

Representa cada razón en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

a) cos 200°
b) sen 130°
c) tan 250°

a) Como 200° = 20° + 180°, se tiene que cos 200° = −cos 20°.
b) Como 130° = 90° + 40°, se tiene que sen 130° = sen(90° + 40°) = cos 40°.
c) Como 250° = 70° + 180°, se tiene que tan 250° = tan(70°).

Problemas

Representa cada razón trigonométrica en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

a) sen 100°
b) sen 215°
c) cos 160°
d) cos 195°
e) tan 205°
f) tan 290°

Indicador de logro:

1.2 Representa razones trigonométricas en términos de ángulos agudos, utilizando las identidades trigonométricas de los ángulos $\theta + 180°$, $\theta - 180°$ y $90° + \theta$.

Secuencia:

Se continúa con la deducción de identidades trigonométricas básicas. En esta clase se utilizan las identidades que dedujeron en la clase anterior.

Propósito:

Introducir identidades trigonométricas de los ángulos $\theta + 180°$, $\theta - 180°$ y $90° + \theta$, para luego utilizarlas al reescribir una razón trigonométrica en términos de un ángulo agudo.

Posibles dificultades:

Identificar la forma correcta de aplicar las identidades, especialmente si hay cambio de signo. Por ejemplo, se puede observar lo siguiente:

$$\cos \underline{\mathbf{210°}} = -\cos(\underline{\mathbf{210°}} - 180°) = -\cos 30°.$$

En la identidad establecida en el literal c de la conclusión, el signo menos lo tiene $\cos\theta$ y no $\cos(\theta - 180°)$, distinto a como se ha utilizado en el ejemplo previo.

Solución de problemas:

a) *Forma 1.* $\text{sen } 100° = -\text{sen}(100° - 180°) = -\text{sen}(-80°) = \text{sen } 80°$.

Forma 2. Se observa que $100° = 90° + 10°$, entonces, $\text{sen } 100° = \text{sen}(90° + 10°) = \cos 10°$.

b) *Forma 1.* $\text{sen } 215° = \text{sen}(35° + 180°) = -\text{sen } 35°$.

Forma 2. $\text{sen } 215° = -\text{sen}(215° - 180°) = -\text{sen } 35°$.

c) *Forma 1.* $\cos 160° = -\cos(160° - 180°) = -\cos(-20°) = -\cos 20°$.

Forma 2. $\cos 160° = \cos(90° + 70°) = -\text{sen } 70°$.

d) *Forma 1.* $\cos 195° = -\cos(195° - 180°) = -\cos 15°$.

Forma 2. $\cos 195° = \cos(90° + 105°) = -\text{sen } 105° = \text{sen}(105° - 180°) = \text{sen}(-75°) = -\text{sen } 75°$.

e) *Forma 1.* $\tan 205° = \tan(205° - 180°) = \tan 25°$.

Forma 2. $\tan 205° = \tan(90° + 115°) = -\frac{1}{\tan 115°}$. Pero $\tan 115° = -\tan(180° - 115°) = -\tan 65°$, entonces

$$-\frac{1}{\tan 115°} = \frac{1}{\tan 65°}.$$

Por tanto, $\tan 205° = \frac{1}{\tan 65°}$.

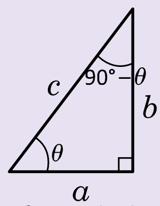
Aunque se dispone de la identidad $\tan(90° + \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{\tan \boldsymbol{\theta}}$ es preferible trabajar con una que no sea fraccionaria.

f) *Forma 1.* $\tan 290° = \tan 110° = \tan(110° - 180°) = \tan(-70°) = -\tan 70°$.

Forma 2. $\tan 290° = \tan(290° - 180°) = \tan 110° = \tan(90° + 20°) = -\frac{1}{\tan 20°}$.

En a), c) y d) se han obtenido dos soluciones. Puede observarse que los ángulos agudos obtenidos siempre suman 90°.

Al determinar el seno del ángulo θ utilizando el triángulo de la derecha, se obtiene que $\text{sen } \theta = \frac{b}{c}$, y al determinar el coseno del ángulo $90° - \theta$ se obtiene que $\cos(90° - \theta) = \frac{b}{c}$.



Por tanto, $\text{sen } \theta = \cos(90° - \theta)$. De igual forma se puede deducir para $\text{sen}(90° - \theta)$. Esta es otra forma de deducir las identidades de los ángulos complementarios; sin embargo, esta forma se limita a ángulos agudos.

Lección 1

1.3 Ángulo adición*

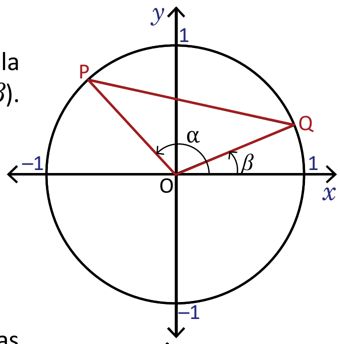
Problema inicial

Demuestra que

a) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ b) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

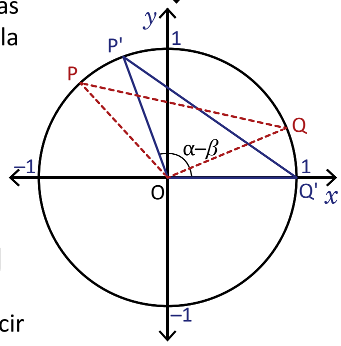
Solución

a) Se dibuja una circunferencia de radio 1 y el triángulo OPQ como muestra la figura. Las coordenadas de P son ($\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$) y las de Q son ($\cos\beta$, $\operatorname{sen}\beta$). El cuadrado de la distancia de P a Q es



$$\begin{aligned}(PQ)^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2\\ &= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta\\ &= (\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + (\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ &= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}$$

Si se rota el triángulo OPQ un ángulo $-\beta$ respecto al origen, las coordenadas de P y Q rotados son P'($\cos(\alpha-\beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$) y Q'(1, 0). El cuadrado de la distancia de P' a Q' es



$$\begin{aligned}(P'Q')^2 &= (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(\alpha-\beta) - 0)^2\\ &= \cos^2(\alpha-\beta) - 2(1)\cos(\alpha-\beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)\\ &= [\cos^2(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)] - 2\cos(\alpha-\beta) + 1\\ &= 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + 1\\ &= 2 - 2\cos(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

Por la identidad pitagórica, se sabe que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, para cualquier θ.

Pero una rotación conserva distancias, por lo que $d(P, Q) = d(P', Q')$, es decir

$$(d(P, Q))^2 = (d(P', Q'))^2$$

$$\Rightarrow \quad 2 - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad -2(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta) = -2\cos(\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta.$$

b) Para demostrar esta parte, como $\operatorname{sen}\theta = \cos(90° - \theta)$ y $\cos\theta = \operatorname{sen}(90° - \theta)$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \cos(90° - (\alpha+\beta))\\ &= \cos((90° - \alpha) - \beta)\\ &= \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \operatorname{sen}(90° - \alpha)\operatorname{sen}\beta\\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}$$

Teorema de la adición

Se satisfacen las siguientes identidades del ángulo adición:

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ b) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

c) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ d) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Además, se satisfacen las siguientes identidades de la tangente:

e) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ f) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Las identidades b, c, e y f se dejan como ejercicio.

Problemas

Demuestra los literales b, c, e y f del teorema de la adición.

Observa que $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. Para las identidades b) y c) utiliza a) y b) de la clase 1.1.

Indicador de logro:

1.3 Demuestra las identidades trigonométricas del ángulo adición.

Secuencia:

Continuando con las identidades trigonométricas, se deducen las identidades cos(α – β) y sen(α + β). El resto de las identidades se dejan como ejercicio para el estudiante.

Propósito:

Introducir las identidades trigonométricas del ángulo adición, las cuales se utilizan para calcular valores exactos de razones trigonométricas y para deducir las identidades del ángulo doble. Esta clase debe ser desarrollada por el docente.

Solución de problemas:

La numeración de los siguientes problemas es con base a cómo aparecen en la conclusión de la clase.

b) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta))$ reescribiendo el ángulo α – β,

$= \operatorname{sen}\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \operatorname{sen}(-\beta)$ aplicando la identidad del seno del ángulo α + β,

$= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$ aplicando la identidad del ángulo opuesto.

c) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$ reescribiendo el ángulo α + β,

$= \cos\alpha \cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(-\beta)$ aplicando la identidad del coseno del ángulo α – β,

$= \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$ aplicando la identidad del ángulo opuesto.

e)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha}\operatorname{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\right)}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

f)

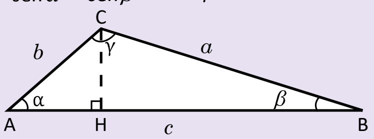
$$\tan(\alpha-\beta) = \tan(\alpha+(-\beta))$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Otra opción para abordar el Problema Inicial es analizando el caso particular cuando en la ley de los senos se cumple que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 1$$



a) Determina las longitudes de los lados del triángulo ABC a partir de la igualdad $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 1$.

b) Determine las longitudes de los segmentos AH y BH en términos del ángulo α y β.

c) Por la suma de ángulos en un triángulo se tiene $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. y que AB = AH + BH. Utilice esta información y concluya que: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$.

1.4 Valores exactos de las razones trigonométricas, parte 1

Problema inicial

Calcula el valor exacto de sen 75°, cos 75° y tan 75° utilizando el hecho que 75° = 45° + 30°.

Solución

Como 75° = 45° + 30°, entonces

$$\begin{aligned}\text{sen } 75° &= \text{sen}(45° + 30°) = \text{sen } 45° \cos 30° + \cos 45° \text{ sen } 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Puedes utilizar la tabla de la clase 2.6 de la Unidad 5.

Para calcular cos 75° se hace de la misma manera,

$$\begin{aligned}\cos 75° &= \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \text{sen } 45° \text{ sen } 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Para calcular tan 75° se utiliza el hecho que $\tan 75° = \frac{\text{sen}(75°)}{\cos(75°)}$, por lo que

$$\tan 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Conclusión

Se pueden utilizar las identidades del ángulo adición para calcular valores exactos de razones trigonométricas de ángulos no conocidos.

Problemas

1. Utilizando las identidades del ángulo adición, calcula el valor exacto del seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos utilizando los ángulos especiales.

   a) 15° b) 105°

   c) 165° d) 195°

Los ángulos especiales son aquellos para los cuales las razones trigonométricas son conocidas (0°, 30°, 45°, 60°, 90° y 180°). Los ángulos 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315° y 330° también son especiales pero pueden calcularse con los primeros valores mencionados.

2. Utilizando las identidades del ángulo adición demuestra que

   a) $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$ b) $\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen }\theta$

   c) $\cos(270° + \theta) = \text{sen }\theta$ d) $\text{sen}(270° + \theta) = -\cos\theta$

   e) $\cos(45° - \theta) = \text{sen}(45° + \theta)$ f) $\tan(45° + \theta) = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

   g) $\text{sen}(360° + \theta) = \text{sen }\theta$ h) $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$

Indicador de logro:

1.4 Calcula valores exactos de razones trigonométricas utilizando ángulos especiales y las identidades del ángulo adición.

Secuencia:

Luego de haber establecido la identidad del ángulo adición, se calculan valores exactos de razones trigonométricas aplicando esta identidad.

Propósito:

Establecer que se pueden calcular valores exactos de razones trigonométricas utilizando la identidad del ángulo adición y los ángulos especiales.

Solución de problemas:

1a) 15° = 45° – 30°

- $\text{sen } 15° = \text{sen}(45° - 30°) = \text{sen } 45° \cos 30° - \cos 45° \text{ sen } 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \text{sen } 45° \text{ sen } 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- tan 15°:

Forma 1. $\tan 15° = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + (1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$.

Al racionalizar se obtiene que $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$.

Forma 2. $\tan 15° = \frac{\text{sen } 15°}{\cos 15°} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Al racionalizar se obtiene que $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$.

También puede utilizarse que 15° = 60° – 45°.

Para resolver el problema 1 hay más de una forma de hacerlo, ya que un ángulo puede escribirse como la suma o resta de dos ángulos especiales de más de una forma. Por ejemplo,
15° = 75° – 60° = 45° – 30° = 60° – 45° = 135° – 120°
y así sucesivamente.

1b)
- $\text{sen } 105° = \text{sen}(60° + 45°) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
- $\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.
- $\tan 105° = -2 - \sqrt{3}$.

1c)
- $\text{sen } 165° = \text{sen}(180° - 15°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
- $\cos 165° = \cos(180° - 15°) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
- $\tan 165° = -2 + \sqrt{3}$.

105° = 90° + 15° = 150° – 45° = 180° – 75°, etc.

165° = 90° + 75° = 120° + 45° = 150° + 15°, etc.

1d)
- $\text{sen } 195° = \text{sen}(180° + 15°) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.
- $\cos 195° = \cos(180° + 15°) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
- $\tan 195° = 2 - \sqrt{3}$.

195° = 90° + 75° = 120° + 45° = 150° + 15° = 180° – 15°, etc.

2a) $\cos(180° + \theta) = \cos 180° \cos\theta - \text{sen } 180° \text{ sen }\theta = (-1)\cos\theta - (0)\text{sen }\theta = -\cos\theta$

2b) $\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen } 180° \cos\theta - \cos 180° \text{ sen }\theta = (0)\cos\theta - (-1)\text{sen }\theta = \text{sen }\theta$

2c) $\cos(270° + \theta) = \cos 270° \cos\theta - \text{sen } 270° \text{ sen }\theta = (0)\cos\theta - (-1)\text{sen }\theta = \text{sen }\theta$

2d) $\text{sen}(270° + \theta) = \text{sen } 270° \cos\theta + \cos 270° \text{ sen }\theta = (-1)\cos\theta + (0)\text{sen }\theta = -\cos\theta$

2e) $\cos(45° - \theta) = \cos 45° \cos\theta + \text{sen } 45° \text{ sen }\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen }\theta$.

Por otra parte, $\text{sen}(45° + \theta) = \text{sen } 45° \cos\theta + \cos 45° \text{ sen }\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen }\theta$.
Por lo tanto, $\cos(45° - \theta) = \text{sen}(45° + \theta)$.

2f) $\tan(45° + \theta) = \frac{\tan 45° + \tan\theta}{1 - \tan 45° \tan\theta} = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$.

2g) $\text{sen}(360° + \theta) = \text{sen } 360° \cos\theta + \cos 360° \text{ sen }\theta = (0)\cos\theta + (1)\text{sen }\theta = \text{sen }\theta$

2h) $\cos(360° + \theta) = \cos 360° \cos\theta - \text{sen } 360° \text{ sen }\theta = (1)\cos\theta - (0)\text{sen }\theta = \cos\theta$

1.5 Ángulo doble

Problema inicial

Demuestra que

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$

b) $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen }\theta \cos\theta$

Solución

a) Se utiliza la fórmula del ángulo adición del coseno:

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \text{sen }\theta\text{ sen }\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta. \qquad (1)$$

De la identidad pitagórica $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se deduce que $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$, sustituyendo en (1) se tiene:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta.$$

Si de la identidad pitagórica despejamos $\text{sen}^2\theta$ se tiene que $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Sustituyendo en (1) se tiene:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - 1.$$

b) Se utiliza la fórmula del ángulo adición del seno:

$$\text{sen } 2\theta = \text{sen}(\theta + \theta) = \text{sen }\theta\cos\theta + \cos\theta\text{ sen }\theta = \text{sen }\theta\cos\theta + \text{sen }\theta\cos\theta = 2\text{sen }\theta\cos\theta.$$

Teorema del ángulo doble

Para cualquier ángulo θ se satisfacen las identidades del ángulo doble

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$

b) $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen }\theta\cos\theta$

Además, para la tangente se tiene la siguiente identidad

c) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

Ejemplo 1

Si $90° < \theta < 180°$ y $\text{sen }\theta = \frac{3}{5}$, ¿cuál es el valor de $\text{sen } 2\theta$ y $\cos 2\theta$?

Si se observa la fórmula del ángulo doble del seno y coseno se necesita calcular $\cos\theta$. Como θ está entre 90° y 180°, $\cos\theta$ es negativo. De la identidad pitagórica,

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = -\frac{4}{5}.$$

Luego, $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen }\theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$.

Ejemplo 2

Si $\cos\theta = \frac{1}{4}$, ¿cuál es el valor de $\cos 2\theta$?

Como se conoce el valor de $\cos\theta$ se utiliza la identidad $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{1}{16}\right) - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}.$$

Problemas

1. Si $0° < \theta < 90°$ y $\cos\theta = \frac{7}{9}$, ¿cuál es el valor de $\text{sen } 2\theta$ y $\cos 2\theta$?
2. Si $\text{sen }\theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ determina el valor de $\cos 2\theta$.
3. Determina los valores de $\text{sen } 2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$ si $\tan\theta = \frac{12}{5}$ y θ está en el tercer cuadrante.
4. Demuestra que $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$.

Unidad 6

Indicador de logro:

1.5 Deduce y aplica las identidades trigonométricas del ángulo doble.

Secuencia:

La siguiente identidad trigonométrica que se aborda es la del ángulo doble, utilizando la identidad del ángulo adición. Además, se calculan razones trigonométricas del ángulo doble (2θ) si se conoce una razón del ángulo (θ).

Solución de problemas:

1. Como se conoce el valor de $\cos\theta$ se utiliza la identidad $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$:

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{7}{9}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{49}{81}\right) - 1 = \frac{17}{81}.$$

Para calcular $\operatorname{sen} 2\theta$ hay que calcular $\operatorname{sen}\theta$:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + \left(\frac{7}{9}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{49}{81} = \frac{32}{81}.$$

Como $0° < \theta < 90°$ entonces $\operatorname{sen}\theta$ es positivo. Por tanto, $\operatorname{sen}\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Luego, $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{56\sqrt{2}}{81}$.

2. Como se conoce el valor de $\operatorname{sen}\theta$, se utiliza $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$: $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\left(\frac{7}{9}\right) = -\frac{5}{9}$.

3. Se calculan primero los valores de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$. Como θ está en el tercer cuadrante, $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ son ambos negativos. Por el problema 4 de la clase 2.9 de la Unidad 5, página 141:

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{5}{13}.$$

Luego, $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{12}{5}\cos\theta = \frac{12}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}$.

Por tanto,

- $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = -\frac{119}{169}$,
- $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{120}{169}$,
- $\tan 2\theta = \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta} = -\frac{120}{119}$.

Para encontrar el valor de $\tan 2\theta$ en el problema 3 puede hacerse con la relación que hay con el seno y el coseno de 2θ o utilizar la identidad de c) en la conclusión de la clase.

4. $\tan 2\theta = \tan(\theta + \theta)$

$$= \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta}$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}.$$

1.6 Ángulo medio

Problema inicial

Demuestra que

a) $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$ b) $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$

Solución

a) Del teorema del ángulo doble se sabe que

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Si en esta expresión se hace $\alpha = \frac{\theta}{2}$ se obtendría

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad \text{despejando } \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

b) De igual forma que en a), del teorema del ángulo doble se tiene que

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Haciendo $\alpha = \frac{\theta}{2}$ se obtiene

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2},$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} \qquad \text{despejando } \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}.$$

Teorema del ángulo medio

Para cualquier ángulo θ se cumple que

a) $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$ b) $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$

Además, para la tangente se cumple la identidad

c) $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

Problemas

1. Demuestra el literal c) del teorema del ángulo medio.
2. Utilizando el resultado del Problema 1 demuestra que $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

Para el Problema 2, utiliza la relación de $\tan\frac{\theta}{2}$ con $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ y $\cos\frac{\theta}{2}$ y la identidad del ángulo doble del seno. Multiplica por un 1 conveniente.

3. Si se multiplica $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ por $\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$ se llega a que $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$. Esta última difiere del resultado del Problema 2 en el hecho que hay que elegir el signo + o –. Justifica por qué se elige solo el signo +.

Indicador de logro:

1.6 Deduce y aplica las identidades trigonométricas del ángulo medio.

Secuencia:

Se deduce la identidad del ángulo medio para el seno y el coseno. La identidad del ángulo medio de la tangente se propone como problema para el estudiante.

Propósito:

Las identidades que se establecen son el cuadrado de la razón trigonométrica del ángulo medio, para evitar la raíz cuadrada hasta que sea necesario el cálculo de razones trigonométricas.
Con respecto a la sección de Problemas, el Problema 1 es la deducción de la identidad del ángulo medio de la tangente. El Problema 2 establece otra forma de la identidad del ángulo medio de la tangente, identidad que puede utilizarse más adelante para la resolución de problemas.

Solución de problemas:

1. $\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1-\cos\theta}{2} \div \dfrac{1+\cos\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{\cancel{2}} \times \dfrac{\cancel{2}}{1+\cos\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$

2. $\tan\frac{\theta}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \times \dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$

Identidad del ángulo doble del seno

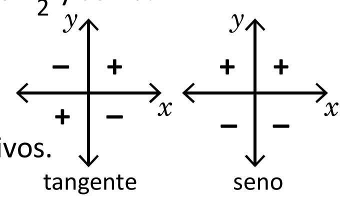
3. Partiendo del hecho que $\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$:

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta - 1$

Luego, $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\operatorname{sen}^2\theta}} = \pm\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$

Al analizar el signo de $\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ se observa que $1-\cos\theta$ es no negativo, para cualquier θ, por lo tanto, solo depende del signo de sen θ. Por otra parte, los signos de $\tan\frac{\theta}{2}$ y sen θ siempre coinciden, por lo tanto el signo que se debe elegir es el positivo (+). Se realiza un análisis de los signos de $\tan\frac{\theta}{2}$ y sen θ:



Si $0° < \frac{\theta}{2} < 90° \Rightarrow 0° < \theta < 180°$. Los signos de $\tan\frac{\theta}{2}$ y sen θ son ambos positivos.

Si $90° < \frac{\theta}{2} < 180° \Rightarrow 180° < \theta < 360°$. Los signos de $\tan\frac{\theta}{2}$ y sen θ son ambos negativos.

Se hace un análisis similar para los siguientes intervalos:

$$180° < \frac{\theta}{2} < 270°,\ 270° < \frac{\theta}{2} < 360°.$$

Por tanto, hay que tomar el signo positivo (+).

Lección 1

1.7 Valores exactos de las razones trigonométricas, parte 2

Problema inicial

1. Calcula los valores exactos de sen 22.5°, cos 22.5° y tan 22.5°.
2. Si $\cos\theta = \frac{3}{5}$, con θ en el cuarto cuadrante, determina el valor de $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$.

Solución

1. Observar que $22.5° = \frac{45°}{2}$. Además, 22.5° está en el primer cuadrante por lo que sen 22.5°, cos 22.5° y tan 22.5° son positivos.

$$\operatorname{sen}^2 22.5° = \operatorname{sen}^2\frac{45°}{2} = \frac{1-\cos 45°}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} 22.5° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos^2 22.5° = \cos^2\frac{45°}{2} = \frac{1+\cos 45°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22.5° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 22.5° = \frac{\operatorname{sen} 22.5°}{\cos 22.5°} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \div \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

2. Como θ está en el cuarto cuadrante significa que $270° < \theta < 360°$, por lo que $135° < \frac{\theta}{2} < 180°$; es decir, $\frac{\theta}{2}$ está en el segundo cuadrante y por lo tanto $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ es positivo y $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$ son negativos. Así,

$$\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{3}{5}}{2} = \frac{2}{5\times 2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{\cancel{8}}{5\times\cancel{2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \div \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{2\cancel{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusión

Se pueden utilizar las fórmulas del ángulo medio para calcular valores exactos de razones trigonométricas.

Problemas

1. Utilizando las identidades del ángulo medio calcula las razones trigonométricas de cada ángulo.

a) 67.5° b) 105° c) 112.5° d) 165°

2. Para cada valor de $\cos\theta$ determina $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$.

a) $\cos\theta = \frac{3}{4}$, $0° < \theta < 90°$
b) $\cos\theta = -\frac{5}{12}$, $90° < \theta < 180°$
c) $\cos\theta = -\frac{1}{9}$, $180° < \theta < 270°$
d) $\cos\theta = \frac{1}{8}$, $270° < \theta < 360°$

3. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ y $180° < \theta < 270°$ determina el valor de $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$.

Unidad 6

Indicador de logro:

1.7 Calcula valores exactos de razones trigonométricas utilizando las identidades del ángulo doble y del ángulo medio.

Secuencia:

Luego de haber deducido la identidad del ángulo medio, se calculan valores exactos de razones trigonométricas aplicando esta identidad. Además, se calculan razones trigonométricas del ángulo medio si se conoce alguna razón del ángulo y a qué cuadrante pertenece este último.

Solución de problemas:

1a) $67.5° = \frac{135°}{2}$ pertenece al primer cuadrante.

$$\text{sen}^2 67.5° = \text{sen}^2\frac{135°}{2} = \frac{1 - \cos 135°}{2} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div 2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \text{sen } 67.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos^2 67.5° = \cos^2\frac{135°}{2} = \frac{1 + \cos 135°}{2} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div 2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 67.5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 67.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \div \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4-2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

También puede utilizarse la identidad del Problema 2 de la clase 1.6:

$$\tan 67.5° = \frac{1 - \cos 135°}{\text{sen } 135°} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

Es conveniente utilizar la identidad del problema 2 en vez de la identidad c) de la Conclusión de la clase 1.6, ya que se evitan dos pasos: la racionalización y efectuar una raíz cuadrada.

1b) $$\text{sen}^2 105° = \text{sen}^2\frac{210°}{2} = \frac{1 - \cos 210°}{2} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \text{sen } 105° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

$$\cos^2 105° = \cos^2\frac{210°}{2} = \frac{1 + \cos 210°}{2} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 105° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$\tan 105° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \div \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = -\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}} = -\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = -2 - \sqrt{3}.$$

$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen } 210° = -\frac{1}{2}$

Si se utiliza la identidad $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\text{sen }\theta}$: $\tan 105° = \frac{1 - \cos 210°}{\text{sen } 210°} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 - \sqrt{3}.$

Compara el resultado del problema 1b) con el problema 1b) de la clase 1.4.

1c) $$\text{sen}^2 112.5° = \text{sen}^2\frac{225°}{2} = \frac{1 - \cos 225°}{2} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div 2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \text{sen } 112.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos^2 112.5° = \cos^2\frac{225°}{2} = \frac{1 + \cos 225°}{2} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div 2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 112.5° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 112.5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \div \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4-2}} = -\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -(\sqrt{2} + 1).$$

$\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Si se utiliza la identidad $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\text{sen }\theta}$: $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \div \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -(\sqrt{2} + 1).$

$\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen } 330° = -\frac{1}{2}$

1d) $$\text{sen}^2 165° = \text{sen}^2\frac{330°}{2} = \frac{1 - \cos 330°}{2} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \text{sen } 165° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$\cos^2 165° = \cos^2\frac{330°}{2} = \frac{1 + \cos 330°}{2} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \div 2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 165° = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

$$\tan 165° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \div \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = -\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = -2 + \sqrt{3}.$$

Al utilizar la identidad $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\text{sen }\theta}$ se tiene que $\tan 165° = -2 + \sqrt{3}$.

Hay que tener especial cuidado al determinar el signo de la razón trigonométrica. Podría haber confusión y determinar el signo de $\cos\theta$ y no el de $\text{sen}\frac{\theta}{2}$ o $\cos\frac{\theta}{2}$.

2a) Como $0° < \theta < 90°$ entonces $0° < \frac{\theta}{2} < 45°$; por lo tanto, todas las razones trigonométricas son positivas.

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{3}{4}\right)\div 2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{3}{4}\right)\div 2 = \frac{7}{8} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

2b) Como $90° < \theta < 180°$ entonces $45° < \frac{\theta}{2} < 90°$; por lo tanto, todas las razones trigonométricas son positivas.

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{5}{12}\right)\div 2 = \frac{17}{24} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{102}}{12}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{5}{12}\right)\div 2 = \frac{7}{24} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{42}}{12}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{102}}{12} \div \frac{\sqrt{42}}{12} = \frac{\sqrt{102}}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{119}}{7}.$$

2c) Como $180° < \theta < 270°$ entonces $90° < \frac{\theta}{2} < 135°$; por lo tanto, $\text{sen}\frac{\theta}{2}$ es positivo y $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$ son negativas.

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{1}{9}\right)\div 2 = \frac{5}{9} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{1}{9}\right)\div 2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\frac{2}{3}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \div \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

2d) Como $270° < \theta < 360°$ entonces $135° < \frac{\theta}{2} < 180°$; por lo tanto, $\text{sen}\frac{\theta}{2}$ es positivo y $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$ son negativas.

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{1}{8}\right)\div 2 = \frac{7}{16} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{1}{8}\right)\div 2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\frac{3}{4}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \div \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

3. Como $180° < \theta < 270°$ entonces $90° < \frac{\theta}{2} < 135°$; por lo tanto, $\text{sen}\frac{\theta}{2}$ es positivo y $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$ son negativas.

Como $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ entonces $\cos\theta = -\sqrt{1-\frac{5}{9}} = -\frac{2}{3}$. Luego,

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \left(1+\frac{2}{3}\right)\div 2 = \frac{5}{6} \Rightarrow \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1-\frac{2}{3}\right)\div 2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6} \div \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\sqrt{5}.$$

1.8 Practica lo aprendido

1. Escribe cada razón trigonométrica en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

a) sen(–45°) b) sen 210° c) sen 350°
d) cos(–130°) e) cos(–80°) f) tan 135°

2. Demuestra que:

a) $\sec(-\theta) = \sec$
b) $\csc(-\theta) = -\csc\theta$
c) $\cot(-\theta) = -\cot\theta$
d) $\sec(90° - \theta) = \csc\theta$
e) $\csc(90° - \theta) = \sec\theta$
f) $\tan(\theta + 45°)\tan(45° - \theta) = 1$

3. Verifica que $\cot 75° = 2 - \sqrt{3}$.

4. Demuestra que:

a) $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$
b) $\tan(\theta - 180°) = \tan\theta$

5. Demuestra que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$.

6. Determina sen 2θ, cos 2θ y tan 2θ en cada caso.

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ y $0° < \theta < 90°$
b) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{3}$ y $180° < \theta < 270°$
c) $\sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y $270° < \theta < 360°$
d) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $90° < \theta < 180°$

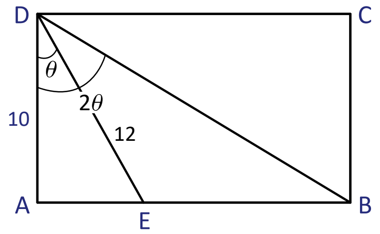
7. Calcula el valor exacto de cos 480° y sen 480°.

8. Para cada valor de sen θ determina sen $\frac{\theta}{2}$, cos $\frac{\theta}{2}$ y tan $\frac{\theta}{2}$.

a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$ y $180° < \theta < 270°$
b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{12}$ y $90° < \theta < 180°$

9. En la figura, ABCD es un rectángulo, donde AD = 10, DE = 12 y ∢BDA = 2∢EDA.

a) Determina el valor de cos θ.
b) Determina el valor de cos 2θ.
c) Calcula la medida de BD.



Indicador de logro:

1.8 Resuelve problemas correspondientes a la resolución de identidades trigonométricas.

Solución de problemas:

1a) $\operatorname{sen}(-45°) = -\operatorname{sen} 45°$

1b) $\operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen}(210° - 180°) = -\operatorname{sen} 30°$

1c) $\operatorname{sen} 350° = -\operatorname{sen}(350° - 180°) = -\operatorname{sen} 170° = -\operatorname{sen}(180° - 170°) = -\operatorname{sen} 10° = -\cos 80°$

1d) $\cos(-130°) = \cos 130° = -\cos(180° - 130°) = -\cos 50° = -\operatorname{sen} 40°$

1e) $\cos(-80°) = \cos 80°$

1f) $\tan 135° = -\tan(180° - 135°) = -\tan 45°$

O bien, $\tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45°$

2a) $\sec(-\theta) = \dfrac{1}{\cos(-\theta)} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

2b) $\csc(-\theta) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(-\theta)} = \dfrac{1}{-\operatorname{sen}\theta} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = -\csc\theta$

2c) $\cot(-\theta) = \dfrac{1}{\tan(-\theta)} = \dfrac{1}{-\tan\theta} = -\dfrac{1}{\tan\theta} = -\cot\theta$

2d) $\sec(90° - \theta) = \dfrac{1}{\cos(90° - \theta)} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$

2e) $\csc(90° - \theta) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(90° - \theta)} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

2f) $\dfrac{1}{\tan(\theta + 45°)} = \tan(90° - (\theta + 45°)) = \tan(45° - \theta)$

Entonces $\tan(\theta + 45°)\tan(45° - \theta) = 1$.

3. Se sabe que $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$, entonces

$$\cot 75° = \frac{1}{\tan 75°} = \underbrace{\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3}}_{\text{al racionalizar}} = 2 - \sqrt{3}.$$

4a) $\tan(\theta + 180°) = \dfrac{\tan\theta + \cancelto{0}{\tan 180°}}{1 - \tan\theta \cancelto{0}{\tan 180°}} = \tan\theta$

4b) $\tan(\theta - 180°) = \dfrac{\tan\theta - \cancelto{0}{\tan 180°}}{1 + \tan\theta \cancelto{0}{\tan 180°}} = \tan\theta$

Para los problemas 4a) y 4b) también puede utilizarse la relación que hay entre la tangente y el seno y el coseno.

5. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cancel{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}) + (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cancel{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

6a) $\cos 2\theta = 1 - 2\left(\dfrac{6}{9}\right) = -\dfrac{1}{3}$.

Por otra parte, $\cos\theta = \sqrt{1 - \dfrac{6}{9}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, entonces,

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\tan 2\theta = -2\sqrt{2}$.

6b) $\cos 2\theta = \dfrac{7}{9}$, $\operatorname{sen} 2\theta = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ y $\tan 2\theta = \dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

6c) $\cos 2\theta = -\dfrac{5}{13}$, $\operatorname{sen} 2\theta = -\dfrac{12}{13}$ y $\tan 2\theta = \dfrac{12}{5}$

6d) $\cos 2\theta = -\dfrac{1}{3}$, $\operatorname{sen} 2\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ y $\tan 2\theta = 2\sqrt{2}$

7. *Forma 1*. Como $480° = 360° + 120°$, por los Problemas 2g) y 2h) de la clase 1.4, se tiene que

$$\cos 480° = \cos 120° = -\frac{1}{2} \text{ y } \operatorname{sen} 480° = \operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Forma 2. Como $480° = 2(240°)$, puede utilizarse la identidad del ángulo doble.

8a) $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\dfrac{\theta}{2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ y $\tan\dfrac{\theta}{2} = -2$.

8b) $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{12+\sqrt{119}}{6}}$,

$\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{12-\sqrt{119}}{6}}$,

$\tan\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{12+\sqrt{119}}{12-\sqrt{119}}} = \dfrac{\sqrt{263+24\sqrt{119}}}{5}$.

9a) El ΔAED es rectángulo, entonces $\cos\theta = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$.

9b) Como $\cos\theta = \dfrac{5}{6}$ y $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, entonces

$$\cos 2\theta = 2\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7}{18}.$$

9c) El ΔABD es rectángulo, entonces

$$\cos 2\theta = \frac{10}{BD} \Rightarrow BD = \frac{10}{\cos 2\theta} = 10 \div \frac{7}{18} = \frac{180}{7}.$$

Lección 2 Ecuaciones trigonométricas

2.1 Ecuaciones trigonométricas, parte 1*

Problema inicial

Resuelve $\tan^2\theta = 1$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Para resolver $\tan^2\theta = 1$. Como está elevado al cuadrado, se saca la raíz cuadrada a ambos lados y se tiene que $\tan\theta = \pm 1$. Esto significa que $\tan\theta = 1$ o bien $\tan\theta = -1$. Así,

Si $\tan\theta$ es positivo entonces el ángulo está en el primer o tercer cuadrante. Si $\tan\theta$ es negativo entonces el ángulo está en el segundo o cuarto cuadrante.

- $\tan\theta = 1$ cuando $\theta = 45°$ o $\theta = 180° + 45° = 225°$.
- $\tan\theta = -1$ cuando $\theta = 180° - 45° = 135°$ o $\theta = 360° - 45° = 315°$.

Por lo tanto, las soluciones de $\tan^2\theta = 1$ son $\theta = 45°, 135°, 225°, 315°$ cuando θ está entre 0° y 360°.

Definición

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación donde la incógnita aparece como argumento de una razón trigonométrica.

Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar todas las soluciones que satisfacen la igualdad.

El número de soluciones de una ecuación trigonométrica depende de los valores en los que se limita la incógnita; por ejemplo, la ecuación $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ para $0° \leq \theta < 180°$ no tiene solución ya que $\operatorname{sen}\theta$ es positivo para ángulos que están entre 0° y 180°.

Ejemplo

Resuelve $2\cos\theta - 6 = -4$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Para resolver se despeja $\cos\theta$ y se obtiene

$$\begin{aligned} & 2\cos\theta - 6 = -4 \\ \Rightarrow\quad & 2\cos\theta = -4 + 6 \\ \Rightarrow\quad & 2\cos\theta = 2 \\ \Rightarrow\quad & \cos\theta = 1 \end{aligned}$$

Como $\cos\theta$ es igual a 1 cuando $\theta = 0°$ se tiene que la solución de la ecuación $2\cos\theta - 6 = -4$ es $\theta = 0°$ cuando θ está entre 0° y 360°.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{4}$

b) $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$

c) $\tan^2\theta = 3$

d) $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{3}{4}$

e) $2\operatorname{sen}\theta - \sqrt{3} = 0$

f) $2\cos\theta + 3 = 4$

g) $4\operatorname{sen}\theta + 5 = 7$

h) $7\tan\theta = 2\sqrt{3} + \tan\theta$

Unidad 6

171

Indicador de logro:

2.1 Resuelve ecuaciones trigonométricas utilizando razones trigonométricas conocidas.

Secuencia:

La lección 2 consiste en la resolución de ecuaciones trigonométricas, y se inicia con la resolución de ecuaciones que requieran del uso de razones ya conocidas y estudiadas en la Unidad 5 de Primer año de bachillerato.

Propósito:

Resolver ecuaciones trigonométricas utilizando la teoría y herramientas vistas en la Unidad 5 de Primer año de bachillerato. Esta clase no requiere del uso de la calculadora.

Posibles dificultades:

Determinar los ángulos de razones trigonométricas conocidas; puede hacer referencia a la Lección 2 de la Unidad 5 de Primer año de Bachillerato.

Solución de problemas:

a) $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{1}{2}$.

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ cuando $\theta = 30°$ o $\theta = 180° - 30° = 150°$.
- $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ cuando $\theta = 180° + 30° = 210°$ o $\theta = 360° - 30° = 330°$.

Luego, las soluciones de $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{4}$ son $\theta = 30°, 150°, 210°, 330°$.

b) $\cos^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cuando $\theta = 30°$ o $\theta = 360° - 30° = 330°$.
- $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ cuando $\theta = 180° - 30° = 150°$ o $\theta = 180° + 30° = 210°$.

Luego, las soluciones de $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$ son $\theta = 30°, 150°, 210°, 330°$.

c) $\tan^2\theta = 3 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3}$.

- $\tan\theta = \sqrt{3}$ cuando $\theta = 60°$ o $\theta = 180° + 60° = 240°$.
- $\tan\theta = -\sqrt{3}$ cuando $\theta = 180° - 60° = 120°$ o $\theta = 360° - 60° = 300°$.

Luego, las soluciones de $\tan^2\theta = 3$ son $\theta = 60°, 120°, 240°, 300°$.

d) $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Las soluciones de $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{3}{4}$ son $\theta = 60°, 120°, 240°, 300°$.

e) $2\operatorname{sen}\theta - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60°$ o $\theta = 120°$.

f) $2\cos\theta + 3 = 4 \Rightarrow 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60°$ o $\theta = 300°$.

g) $4\operatorname{sen}\theta + 5 = 7 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 30°$ o $\theta = 150°$.

h) $7\tan\theta = 2\sqrt{3} + \tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \theta = 30°$ o $\theta = 210°$.

2.2 Ecuaciones trigonométricas, parte 2 (uso de la identidad pitagórica)

Problema inicial

Resuelve $2\cos^2\theta - \text{sen }\theta - 1 = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Se reescribe la ecuación de modo que aparezca únicamente sen θ y para ello se utiliza la identidad pitagórica.

$$\begin{aligned} & 2\cos^2\theta - \text{sen }\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2(1 - \text{sen}^2\theta) - \text{sen }\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2 - 2\text{sen}^2\theta - \text{sen }\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow \quad & -2\text{sen}^2\theta - \text{sen }\theta + 1 = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2\text{sen}^2\theta + \text{sen }\theta - 1 = 0 \end{aligned}$$

De la identidad pitagórica $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ puede obtenerse que $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$ o bien $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

Si se hace el cambio de variable $y = \text{sen }\theta$, la ecuación se transforma en $2y^2 + y - 1 = 0$.

Al factorizar el polinomio con el método de las tijeras se obtiene que $2y^2 + y - 1 = (2y - 1)(y + 1) = 0$. Pero $y = \text{sen }\theta$ por lo que se tienen dos ecuaciones trigonométricas:

- $2\text{sen }\theta - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen }\theta = \frac{1}{2}$ y esto sucede cuando $\theta = 30°$ o $\theta = 180° - 30° = 150°$.
- $\text{sen }\theta + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen }\theta = -1$ y esto sucede cuando $\theta = 270°$.

También puede utilizarse la fórmula general para resolver $2y^2 + y - 1 = 0$.

Por lo tanto, las soluciones de $2\cos^2\theta - \text{sen }\theta - 1 = 0$ son $\theta = 30°, 150°, 270°$ cuando $0° \leq \theta < 360°$.

Conclusión

Algunas ecuaciones trigonométricas pueden transformarse en una ecuación cuadrática utilizando la identidad pitagórica, de modo que aparezca solo la razón seno o coseno.

Ejemplo

Resuelve $2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Se reescribe la ecuación de modo que aparezca únicamente cos θ y para ello se utiliza la identidad pitagórica.

$$\begin{aligned} & 2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow \quad & -2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0 \end{aligned}$$

Se factoriza $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1$ por el método de la tijera

$$\begin{array}{ccc} 2\cos\theta & -1 & -\cos\theta \\ \cos\theta & -1 & -2\cos\theta \\ \hline 2\cos^2\theta & 1 & -3\cos\theta \end{array}$$

Al considerar la ecuación con incógnita cos θ se tiene que $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$.

Así, $2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$, es decir, $\theta = 60°$ o $\theta = 360° - 60° = 300°$.

O bien $\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$, es decir, $\theta = 0°$.

Por lo tanto, las soluciones de $2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ tal que $0° \leq \theta < 360°$ son $\theta = 0°, 60°, 300°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $2\cos^2\theta + \text{sen }\theta - 1 = 0$

b) $-3\text{sen }\theta + \cos^2\theta = 3$

c) $4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\text{sen }\theta - 7 = 0$

d) $2\text{sen}^2\theta - 3 = \cos\theta - 2$

Recuerda que $-1 \leq \text{sen }\theta \leq 1$ y $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

Indicador de logro:

2.2 Resuelve ecuaciones trigonométricas utilizando la identidad pitagórica para transformarlas en ecuaciones cuadráticas donde intervenga una sola razón trigonométrica.

Secuencia:

Se continúa con la resolución de ecuaciones trigonométricas, en esta ocasión aplicando la identidad pitagórica para convertir la ecuación a una ecuación cuadrática donde interviene una sola razón trigonométrica del ángulo θ.

Solución de problemas:

Las ecuaciones pueden resolverse haciendo el cambio de variable, sin embargo, la idea es que las resuelvan directamente.

a)

$$\begin{aligned} 2\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta - 1 &= 0 \\ 2(1 - \text{sen}^2\theta) + \text{sen}\,\theta - 1 &= 0 \\ 2 - 2\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}\,\theta - 1 &= 0 \\ 2\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 &= 0 \\ (2\,\text{sen}\,\theta + 1)(\text{sen}\,\theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $2\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 210°$ o $\theta = 330°$.

O bien $\text{sen}\,\theta - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90°$.

Por lo tanto, las soluciones son $\theta = 90°, 210°, 330°$.

b)

$$\begin{aligned} -3\,\text{sen}\theta + \cos^2\theta &= 3 \\ -3\,\text{sen}\theta + 1 - \text{sen}^2\theta - 3 &= 0 \\ \text{sen}^2\theta + 3\,\text{sen}\theta + 2 &= 0 \\ (\text{sen}\,\theta + 2)(\text{sen}\,\theta + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $\text{sen}\,\theta + 2 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -2 < -1$.
Por tanto, no hay solución para este caso.

O bien, $\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -1 \Rightarrow \theta = 270°$.

Por lo tanto, la solución de $-3\,\text{sen}\theta + \cos^2\theta = 3$ es $\theta = 270°$.

c)

$$\begin{aligned} 4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta - 7 &= 0 \\ 4 - 4\,\text{sen}^2\theta + 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta - 7 &= 0 \\ 4\,\text{sen}^2\theta - 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta + 3 &= 0 \\ (2\,\text{sen}\,\theta - \sqrt{3})^2 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $2\,\text{sen}\,\theta - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60°$ o $\theta = 120°$.

Para el problema c), se puede observar que

$4\,\text{sen}^2\theta - 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta + 3 = (2\,\text{sen}\,\theta)^2 - 2(2\,\text{sen}\,\theta)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2$,

por lo tanto, es un trinomio cuadrado perfecto.

También puede observarse que

$$\begin{array}{ccc} 2\,\text{sen}\,\theta & -\sqrt{3} & -2\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta \\ 2\,\text{sen}\,\theta & -\sqrt{3} & +\ -2\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta \\ \hline 4\,\text{sen}^2\theta & 3 & -4\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta \end{array}$$

d)

$$\begin{aligned} 2\,\text{sen}^2\theta - 3 &= \cos\theta - 2 \\ 2 - 2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 &= 0 \\ 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 &= 0 \\ (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 60°$ o $\theta = 300°$.

O bien, $\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = 180°$.

Por lo tanto, las soluciones son $\theta = 60°, 180°, 300°$.

Lección 2

2.3 Ecuaciones trigonométricas, parte 3 (uso del ángulo doble del coseno)

Problema inicial

Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos 2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Recuerda que
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$.

Utilizando la identidad del ángulo doble del coseno,

$$\begin{aligned} &\cos 2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0 \\ \Rightarrow\ &(2\cos^2\theta - 1) - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0 \\ \Rightarrow\ &2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \end{aligned}$$

Puede utilizarse la fórmula general para resolver esta ecuación, pero también puede utilizarse el método de la tijera observando que

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{2}\cos\theta & -1 & -\sqrt{2}\cos\theta \\ \downarrow & \downarrow & \\ \sqrt{2}\cos\theta & -1 & -\sqrt{2}\cos\theta \\ \hline 2\cos^2\theta & 1 & -2\sqrt{2}\cos\theta \end{array}$$

Es decir, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)(\sqrt{2}\cos\theta - 1) = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2$. De aquí se tiene que

$$\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ahora, se sabe que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cuando θ toma el valor de 45° y de 315°. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación original son $\theta = 45°, 315°$ cuando θ está entre 0° y 360°.

Conclusión

Cuando en una ecuación trigonométrica aparece un término $\cos 2\theta$, esta debe transformarse a una ecuación donde resulten solo términos con ángulo θ utilizando la identidad del ángulo doble del coseno, de modo que aparezca una misma razón. Normalmente, para resolverlas, se debe factorizar y luego igualar a cero los dos factores que se obtengan, teniéndose dos ecuaciones trigonométricas las cuales hay que resolver.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\cos 2\theta + 6\operatorname{sen}^2\theta - 1 + (2\sqrt{2} - 2)\operatorname{sen}\theta - \sqrt{2} = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Sustituyendo la identidad $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$ se obtiene $4\operatorname{sen}^2\theta + (2\sqrt{2} - 2)\operatorname{sen}\theta - \sqrt{2} = 0$

Como en el Problema inicial, esta ecuación puede resolverse con la fórmula general, pero puede notarse que $\longrightarrow$

$$\begin{array}{ccc} 2\operatorname{sen}\theta & \sqrt{2} & 2\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta \\ \downarrow & \downarrow & \\ 2\operatorname{sen}\theta & -1 & -2\operatorname{sen}\theta \\ \hline 4\operatorname{sen}^2\theta & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}\theta \end{array}$$

Por lo que $4\operatorname{sen}^2\theta + (2\sqrt{2} - 2)\operatorname{sen}\theta - \sqrt{2} = (2\operatorname{sen}\theta + \sqrt{2})(2\operatorname{sen}\theta - 1) = 0$. Entonces, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ cuando θ toma los valores de 225° y 315°, o bien $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ cuando θ toma los valores de 30° y 150°. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\cos 2\theta + 6\operatorname{sen}^2\theta - 1 + (2\sqrt{2} - 2)\operatorname{sen}\theta - \sqrt{2} = 0$ son $\theta = 30°$, 150°, 225°, 315°.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$

b) $\cos 2\theta + 3\operatorname{sen}\theta - 2 = 0$

c) $\cos 2\theta + \operatorname{sen}\theta = 0$

d) $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$

e) $\cos 2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 0$

Indicador de logro:

2.3 Resuelve ecuaciones trigonométricas aplicando la identidad del ángulo doble del coseno para transformarlas en ecuaciones cuadráticas donde aparezcan razones con ángulo θ.

Secuencia:

Se resuelven ecuaciones trigonométricas donde aparece el coseno del ángulo doble, y se transforman de modo que aparezcan solo razones del ángulo θ.

Solución de problemas:

a)

$$\cos 2\theta + \cos\theta = 0$$
$$(2\cos^2\theta - 1) + \cos\theta = 0$$
$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$
$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \text{ o } \cos\theta = -1$$

Entonces, $\theta = 60°, 180°, 300°$.

b)

$$\cos 2\theta + 3\,\text{sen}\,\theta - 2 = 0$$
$$(1 - 2\,\text{sen}^2\theta) + 3\,\text{sen}\,\theta - 2 = 0$$
$$2\,\text{sen}^2\theta - 3\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0$$
$$(2\,\text{sen}\,\theta - 1)(\text{sen}\,\theta - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \text{ o } \text{sen}\,\theta = 1$$

Entonces, $\theta = 30°, 90°, 150°$.

c)

$$\cos 2\theta + \text{sen}\,\theta = 0$$
$$(1 - 2\,\text{sen}^2\theta) + \text{sen}\,\theta = 0$$
$$2\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$$
$$(2\,\text{sen}\,\theta + 1)(\text{sen}\,\theta - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2} \text{ o } \text{sen}\,\theta = 1$$

Entonces, $\theta = 90°, 210°, 330°$.

d)

$$\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$$
$$(2\cos^2\theta - 1) + 4\cos\theta + 3 = 0$$
$$2\cos^2\theta + 4\cos\theta + 2 = 0$$
$$\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$$
$$(\cos\theta + 1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \cos\theta = -1$$

Entonces, $\theta = 180°$.

e)

$$\cos 2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 0$$
$$(2\cos^2\theta - 1) - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 0$$
$$2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 3 = 0$$
$$(2\cos\theta + \sqrt{3})(\cos\theta - \sqrt{3}) = 0$$
$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ o } \cos\theta = \sqrt{3}$$

Cuando $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ se tiene que $\theta = 150°$ o $\theta = 210°$.

Cuando $\cos\theta = \sqrt{3}$, no hay solución ya que $\sqrt{3} > 1$.

Entonces, $\theta = 150°, 210°$.

2.4 Ecuaciones trigonométricas, parte 4 (uso del ángulo doble del seno)

Problema inicial

Resuelve la ecuación trigonométrica sen 2θ + cos $\theta = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Utilizando la identidad del ángulo doble para el seno, se tiene

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen} 2\theta + \cos\theta = 0 & \\ \Rightarrow \quad & 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0 & \text{aplicando la identidad del ángulo doble,} \\ \Rightarrow \quad & \cos\theta(2\operatorname{sen}\theta + 1) = 0 & \text{factorizando,} \\ \Rightarrow \quad & \cos\theta = 0 \text{ o bien } 2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0. & \end{aligned}$$

- Si $\cos\theta = 0$ entonces $\theta = 90°$ o $\theta = 270°$.
- Si $2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\theta = -1 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$. Luego, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ cuando $\theta = 180° + 30° = 210°$ o cuando $\theta = 360° - 30° = 330°$.

Luego, las soluciones de sen 2θ + cos $\theta = 0$ tal que $0° \leq \theta < 360°$ son $\theta = 90°, 210°, 270°, 330°$.

Conclusión

Cuando en una ecuación trigonométrica aparece un término sen 2θ se utiliza la identidad del ángulo doble del seno, sen $2\theta = 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta$, para transformarla a una ecuación donde aparezcan solo términos con ángulo θ. Normalmente, para resolverlas se factoriza, obteniendo dos valores trigonométricos para los cuales hay que determinar el ángulo que las satisface.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\operatorname{sen} 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Al utilizar la identidad del ángulo doble del seno, se tiene,

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen} 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0 \\ \Rightarrow \quad & 2\operatorname{sen}\theta(\cos\theta + 1) = 0 \end{aligned}$$

De aquí se tiene que $\operatorname{sen}\theta = 0$ o bien $\cos\theta + 1 = 0$.

- Si $\operatorname{sen}\theta = 0$ entonces θ debe ser $0°$ o $180°$.
- Si $\cos\theta + 1 = 0$ entonces $\cos\theta = -1$, por lo que $\theta = 180°$.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0$ son $\theta = 0°, 180°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen}\theta = 0$

b) $\operatorname{sen} 2\theta - \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta = 0$

c) $\operatorname{sen} 2\theta = \operatorname{sen}\theta$

d) $\operatorname{sen} 2\theta + \sqrt{2}\cos\theta = 0$

e) $\operatorname{sen} 2\theta - \cos\theta = 0$

f) $\operatorname{sen} 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0$

Indicador de logro:

2.4 Resuelve ecuaciones trigonométricas aplicando la identidad del ángulo doble del seno para transformarla en una donde aparezcan razones con ángulo θ.

Secuencia:

Se resuelven ecuaciones trigonométricas donde aparece el seno del ángulo doble, y se transforman de modo que aparezcan solo razones del ángulo θ.

Solución de problemas:

a)

$$\text{sen } 2\theta + \text{sen } \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta + \text{sen } \theta = 0$$
$$\text{sen } \theta(2 \cos \theta + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \text{ sen } \theta = 0 \text{ o } \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

Entonces, θ = 0°, 120°, 180°, 240°.

b)

$$\text{sen } 2\theta - \sqrt{3}\text{sen } \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta - \sqrt{3}\text{sen } \theta = 0$$
$$\text{sen } \theta(2 \cos \theta - \sqrt{3}) = 0$$
$$\Rightarrow \text{ sen } \theta = 0 \text{ o } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Entonces, θ = 0°, 30°, 180°, 330°.

c)

$$\text{sen } 2\theta = \text{sen } \theta$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta - \text{sen } \theta = 0$$
$$\text{sen } \theta(2 \cos \theta - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \text{ sen } \theta = 0 \text{ o } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

Entonces, θ = 0°, 60°, 180°, 300°.

d)

$$\text{sen } 2\theta + \sqrt{2}\cos \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta + \sqrt{2}\cos \theta = 0$$
$$\cos \theta(2 \text{ sen } \theta + \sqrt{2}) = 0$$
$$\Rightarrow \cos \theta = 0 \text{ o sen } \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces, θ = 90°, 225°, 270°, 315°.

e)

$$\text{sen } 2\theta - \cos \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta - \cos \theta = 0$$
$$\cos \theta(2 \text{ sen } \theta - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \cos \theta = 0 \text{ o sen } \theta = \frac{1}{2}$$

Entonces, θ = 30°, 90°, 150°, 270°.

f)

$$\text{sen } 2\theta + 2 \text{ sen } \theta = 0$$
$$2 \cos \theta \text{ sen } \theta + 2 \text{ sen } \theta = 0$$
$$2 \text{ sen } \theta(\cos \theta + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \text{ sen } \theta = 0 \text{ o } \cos \theta = -1$$

Entonces, θ = 0°, 180°.

Lección 2

2.5 Ecuaciones trigonométricas, parte 5*

Problema inicial

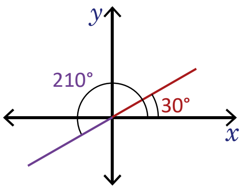
Resuelve la ecuación $\tan 2\theta = \cot \theta$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Se aplica la identidad del ángulo doble de tangente y además se utiliza el hecho de que $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$.

$$\begin{aligned}
\tan 2\theta = \cot \theta \quad &\Rightarrow \quad \frac{2\tan \theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{\tan \theta}\\
&\Rightarrow \quad (2\tan \theta)(\tan \theta) = 1-\tan^2 \theta\\
&\Rightarrow \quad 2\tan^2\theta = 1-\tan^2 \theta\\
&\Rightarrow \quad 3\tan^2\theta = 1 \ \Rightarrow \ \tan^2\theta = \frac{1}{3}\\
&\Rightarrow \quad \tan \theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Luego, se tienen dos casos: cuando $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y cuando $\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Así,



- Si $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ entonces $\theta = 30°$ o $\theta = 180° + 30° = 210°$.
- Si $\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ entonces $\theta = 180° - 30° = 150°$ o $\theta = 360° - 30° = 330°$.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación trigonométrica $\tan 2\theta = \cot \theta$ tal que $0° \leq \theta < 360°$ son $\theta = 30°, 150°, 210°, 330°$.

Conclusión

Cuando en una ecuación trigonométrica aparecen las razones secante, cosecante y cotangente se utilizan las relaciones entre estas y las razones coseno, seno y tangente para transformar la ecuación a una donde aparezcan únicamente estas últimas razones.

Ejemplo

Resuelve $\sec \theta \csc \theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec \theta = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Puede observarse que hay un factor común $\sec\theta$, por lo que se puede resolver por factorización.

$$\sec\theta \csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sec \theta\left(\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

De aquí se tiene que, $\sec\theta = 0$ o bien $\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$. Así,

- $\sec \theta = 0$ significa que $\frac{1}{\cos\theta} = 0$. Pero esto no es posible, ya que una fracción puede ser cero solo cuando el numerador es cero. Por lo que esta ecuación no tiene solución.
- O bien, $\csc \theta - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$, es decir $\csc \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Pero $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
  Esto sucede cuando θ toma los valores de 60° y 120°.

Por lo tanto, las soluciones de $\sec \theta \csc \theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec \theta = 0$ son $\theta = 60°, 120°$ cuando $0° \leq \theta < 360°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $2\sec \theta + 3 = \sec \theta + 5$

b) $\sec \theta \csc \theta + \sqrt{2}\csc \theta = 0$

c) $2\operatorname{sen} \theta + 1 = \csc \theta$

d) $3\csc \theta + 5 = \csc \theta + 9$

e) $4(\cot \theta + 1) = 2(\cot \theta + 2)$ $\quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

f) $\sec \theta + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Unidad 6

175

Indicador de logro:

2.5 Resuelve ecuaciones trigonométricas aplicando la relación entre las razones trigonométricas secante, cosecante y cotangente con las razones coseno, seno y tangente.

Secuencia:

Finaliza la unidad con la resolución de ecuaciones trigonométricas donde aparecen las razones cosecante, secante y cotangente; se resuelven utilizando la relación que hay con las razones seno, coseno y tangente.

Solución de problemas:

a) $2\sec\theta + 3 = \sec\theta + 5$

$\sec\theta = 2$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

Entonces, $\theta = 60°, 300°$.

b) $\sec\theta\csc\theta + \sqrt{2}\csc\theta = 0$

$\csc\theta(\sec\theta + \sqrt{2}) = 0$

$\csc\theta = 0$ o $\sec\theta = -\sqrt{2}$

Cuando $\csc\theta = 0$ significa que $\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = 0$, lo cual no es posible. Por tanto, no hay solución.

Si $\sec\theta = -\sqrt{2}$, entonces $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir, $\theta = 135°$ o $\theta = 225°$.

Por tanto, $\theta = 135°$ o $\theta = 225°$.

c) $2\operatorname{sen}\theta + 1 = \csc\theta$

$2\operatorname{sen}\theta + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$

$2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 1 = 0$

$(2\operatorname{sen}\theta - 1)(\operatorname{sen}\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ o $\operatorname{sen}\theta = -1$

Entonces, $\theta = 30°, 150°, 270°$.

d) $3\csc\theta + 5 = \csc\theta + 9$

$2\csc\theta = 4$

$\csc\theta = 2$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$

Entonces, $\theta = 30°, 150°$.

e) $4(\cot\theta + 1) = 2(\cot\theta + 2)$

$2\cot\theta = 0$

$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 0$

Entonces, $\theta = 90°, 270°$.

f) $\sec\theta + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\sec\theta = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Entonces, $\theta = 45°, 315°$.

Lección 2

2.6 Practica lo aprendido

Resuelve cada ecuación para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $5(\cos\theta + 1) = 5$

b) $4\text{sen}\,\theta - 1 = 2\text{sen}\,\theta + 1$

c) $3(\tan\theta - 2) = 2\tan\theta - 7$

d) $3\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

e) $\tan^2\theta - 3 = 0$

f) $\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta = 1$

g) $1 + \text{sen}\,\theta - \cos^2\theta = 0$

h) $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta = 0$

i) $\cos 2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$

j) $3\cos 2\theta - 4\cos^2\theta + 2 = 0$

k) $\text{sen}\,2\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$

l) $\text{sen}\,2\theta = \tan\theta$

m) $2\tan\theta = 1 + \tan^2\theta$

n) $\tan\theta - 3\cot\theta = 0$

2.7 Problemas de la unidad

Para el Problema 1, calcula el valor de $\text{sen}(\alpha + \beta)$ y utiliza la identidad del ángulo adición.

1. Si $0° < \alpha < 90°$, $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5}$, determina los valores de $\text{sen}\,\beta$, $\cos\beta$ y $\tan\beta$.

2. Si $0° \leq \theta < 360°$, resuelve cada ecuación.
   a) $\text{sen}\,2\theta - 3\cos\theta = 0$
   b) $\cos 2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$

3. Si $A + B + C = 180°$, demuestra que $\text{sen}(B + C) = \text{sen}\,A$.

4. Si $\tan 35° = x$, deduce que
$$\frac{\tan 145° - \tan 125°}{1 + \tan 145° \tan 215°} = \frac{1}{x}.$$

5. El ángulo θ cumple que $\text{sen}(\theta + 30°) = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$ y $\text{sen}(\theta - 30°) = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$. Determina los valores de $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$.

Indicador de logro:

2.6 Resuelve problemas correspondientes a la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Solución de problemas:

a) $5(\cos\theta + 1) = 5 \Rightarrow \cos\theta = 0$

Entonces, $\theta = 90°, 270°$.

b) $4\text{sen}\,\theta - 1 = 2\text{sen}\,\theta + 1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90°$

Entonces, $\theta = 90°$.

c) $3(\tan\theta - 2) = 2\tan\theta - 7 \Rightarrow \tan\theta = -1$

Entonces, $\theta = 135°, 315°$.

d) $3\tan\theta + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Entonces, $\theta = 150°, 330°$.

e) $\tan^2\theta - 3 = 0 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60°, 120°, 240°, 300°$

Entonces, $\theta = 60°, 120°, 240°, 300°$.

f) $\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta(\text{sen}\,\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0$ o $\text{sen}\,\theta = 1$

Entonces, $\theta = 0°, 90°, 180°$.

g) $1 + \text{sen}\,\theta - \cos^2\theta = 0 \Rightarrow \text{sen}^2\theta + \text{sen}\,\theta = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta(\text{sen}\,\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0$ o $\text{sen}\,\theta = -1$

Entonces, $\theta = 0°, 180°, 270°$.

h) $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta\left(\cos^2\theta - \frac{3}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 0$ o $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Entonces, $\theta = 30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°$.

i) $\cos 2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0$

Entonces, $\theta = 0°, 180°$.

j) $3\cos 2\theta - 4\cos^2\theta + 2 = 0$

$3(2\cos^2\theta - 1) - 4\cos^2\theta + 2 = 0$

$2\cos^2\theta - 1 = 0$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Entonces, $\theta = 45°, 135°, 225°, 315°$.

k) $\text{sen}\,2\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$

$2\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta + 2\cos^2\theta = 0$

$2\cos^2\theta(\text{sen}\,\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 0$ o $\text{sen}\,\theta = -1$

Entonces, $\theta = 90°, 270°$.

l) $\text{sen}\,2\theta = \tan\theta$

$2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

$2\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta = \text{sen}\,\theta$

$\text{sen}\,\theta(2\cos^2\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0$ o $\cos^2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Entonces, $\theta = 0°, 45°, 135°, 180°, 225°, 315°$.

m) $2\tan\theta = 1 + \tan^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow (\tan\theta - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = 1$

Entonces, $\theta = 45°, 225°$.

El m) también puede resolverse utilizando la relación de la tangente con el seno y el coseno, pero el proceso es más largo.

n) $\tan\theta - 3\cot\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta - \frac{3}{\tan\theta} = 0, \tan\theta \neq 0 \Rightarrow \tan^2\theta = 3 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3}$

Entonces, $\theta = 60°, 120°, 240°, 300°$.

Indicador de logro:

2.7 Resuelve problemas correspondientes a identidades y ecuaciones trigonométricas

1. Como sen α = $\frac{3}{5}$ y 0° < α < 90°, entonces cos α = $\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. Por otra parte,

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}\cos\beta - \frac{3}{5}\operatorname{sen}\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow 4\cos\beta - 3\operatorname{sen}\beta = -4 \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{4}\operatorname{sen}\beta - 1.$$

Como $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$ entonces, $\operatorname{sen}^2\beta + \left(\frac{3}{4}\operatorname{sen}\beta - 1\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\beta + \frac{9}{16}\operatorname{sen}^2\beta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\beta + 1 = 1$

$$\Rightarrow \frac{25}{16}\operatorname{sen}^2\beta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\beta = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\beta\left(\frac{25}{16}\operatorname{sen}\beta - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\beta = 0 \text{ o } \operatorname{sen}\beta = \frac{24}{25}$$

- Si sen β = 0 entonces cos β = –1 y tan β = 0.
- Si sen $\beta = \frac{24}{25}$ entonces cos $\beta = -\frac{7}{25}$ y tan $\beta = -\frac{24}{7}$.

2a) $\operatorname{sen} 2\theta - 3\cos\theta = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 3\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta(2\operatorname{sen}\theta - 3) = 0$

Es decir, $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90°$ o $\theta = 270°$, o bien, $2\operatorname{sen}\theta - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2}$, esta ecuación no tiene solución. Por lo tanto, las soluciones son θ = 90°, 270°.

2b) $\cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \Rightarrow 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta(2\operatorname{sen}\theta + 1) = 0$

Es decir, $\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0°$ o $\theta = 180°$, o bien, $2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 210°$ o $\theta = 330°$.

Por lo tanto, las soluciones son θ = 0°, 180°, 210°, 330°.

3. Como $A + B + C = 180°$ entonces $B + C = 180° - A$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen}(180° - A) = \operatorname{sen} A.$$

4. Se observa que 145° = 180° – 35°, 125° = 90° + 35° y 215° = 180° + 35°.

Luego, como $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta \Rightarrow \tan 145° = \tan(180° - 35°) = -\tan 35° = -x$.

De igual forma, $\tan(90° + \theta) = -\frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \tan 125° = \tan(90° + 35°) = -\frac{1}{\tan 35°} = -\frac{1}{x}$.

Y por último, como $\tan(180° + \theta) = \tan\theta \Rightarrow \tan 215° = \tan(180° + 35°) = \tan 35° = x$.

Sustituyendo en $\frac{\tan 145° - \tan 125°}{1 + \tan 145° \tan 215°}$ se tiene:

$$\frac{\tan 145° - \tan 125°}{1 + \tan 145° \tan 215°} = \frac{-x - \left(-\frac{1}{x}\right)}{1 + (-x)x} = \frac{-x^2 + 1}{x(1 - x^2)} = \frac{1 - x^2}{x(1 - x^2)} = \frac{1}{x}.$$

5. Por la identidad del ángulo adición del seno, se tiene,

$$\operatorname{sen}(\theta + 30°) = \operatorname{sen}\theta\cos 30° + \cos\theta\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta}{2} + \frac{\cos\theta}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10},$$

$$\operatorname{sen}(\theta - 30°) = \operatorname{sen}\theta\cos 30° - \cos\theta\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cos\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta}{2} - \frac{\cos\theta}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}.$$

Si se suman ambas expresiones se tiene que $\frac{2\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{10} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$.

Por otra parte, si se restan se tiene que $\frac{2\cos\theta}{2} = \frac{8}{10} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$.