Unidad 7. Vectores y números complejos

Competencia de la unidad

Conocer los conceptos básicos sobre vectores, sus operaciones y relacionarlos con la representación geométrica de los números complejos, comparando la representación y las operaciones de vectores en el plano cartesiano con los números complejos en el plano complejo, para fundamentar los resultados más importantes sobre vectores y aplicarlos en otras áreas

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 1: Multiplicación de polinomios (9°)
- Multiplicación de polinomios
- Productos notables
- Factorización

Unidad 3: Ecuación cuadrática (9°)
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notables y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Unidad 6: Identidades y ecuaciones trigonométricas
- Identidades trigonométricas
- Ecuaciones trigonométricas

Unidad 7: Vectores y números complejos
- Vectores
- Producto escalar de vectores
- Números complejos
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Vectores	1	1. Vectores
	1	2. Suma y resta de vectores
	1	3. Producto por escalar
	1	4. Coordenadas de un vector en una base
	1	5. Operaciones con vectores en coordenadas
	1	6. Vectores y coordenadas de puntos
	1	7. Paralelismo
	1	8. Practica lo aprendido
2. Producto escalar de vectores	1	1. Proyección ortogonal
	1	2. Producto escalar de vectores paralelos
	1	3. Producto escalar de vectores no paralelos (no colineales)
	1	4. Forma trigonométrica del producto escalar
	1	5. Producto escalar de vectores en el plano cartesiano
	1	6. Practica lo aprendido
	1	Prueba de las lecciones 1 y 2.
3. Números complejos	1	1. Representación geométrica de los números complejos
	1	2. Operaciones con números complejos en el plano complejo
	1	3. Forma trigonométrica de los números complejos
	1	4. Multiplicación de números complejos en su forma trigonométrica
	1	5. División de números complejos en su forma trigonométrica
	1	6. Fórmula de Moivre

Lección	Horas	Clases
	1	7. Practica lo aprendido
	2	8. Problemas de la unidad
4. Práctica en GeoGebra	1	1. Conceptos básicos sobre vectores
	1	2. Resolución de problemas
	1	Prueba de la lección 3

25 horas clase + prueba de las lecciones 1 y 2 + prueba de la lección 3

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Vectores
Se establece el concepto de vector, se definen las operaciones de suma y resta de vectores, producto por escalar y coordenadas respecto a una base.

Lección 2: Producto escalar de vectores
Se define el producto escalar de dos vectores paralelos, luego se define para dos vectores cualesquiera utilizando la proyección ortogonal y se deduce también su forma trigonométrica.

Lección 3: Números complejos
En esta parte se estudia la representación geométrica de los números complejos en el plano complejo a partir de la representación de vectores en una base ortonormal. Se estudia la forma trigonométrica de un número complejo que se utiliza para la multiplicación y división de números complejos y su representación.

Lección 4: Práctica en GeoGebra
Se utilizan las herramientas básicas para trabajar con vectores y comprobar la solución de los problemas desarrollados a lo largo de la unidad.

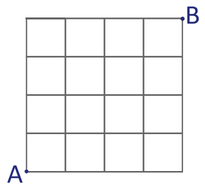
Lección 1 Vectores

1.1 Vectores

Problema inicial

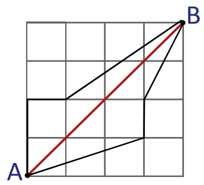
Una persona se encuentra en un punto A dentro de la ciudad de San Salvador y desea dirigirse hacia el punto B. Determina:

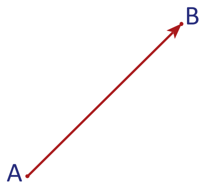
a) Al menos 3 formas para llegar de A a B.
b) El camino más corto para llegar de A hasta B.
c) Una forma para representar que el camino va de A a B y no de B a A.



Solución

a) Algunas opciones para llegar de A a B se muestran en la figura de la derecha.
b) El camino más corto para llegar de A a B es el que está en color rojo.
c) Para representar que este camino va de A hacia B se puede utilizar una flecha que lo indique como lo muestra la figura.

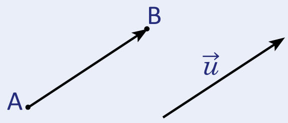




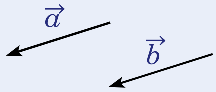
Definición

La flecha cuyo **punto inicial** es A y su **punto final** es B se conoce como **segmento dirigido**.

El conjunto de segmentos dirigidos que poseen la misma longitud, dirección (inclinación) y sentido (hacia donde apunta la flecha) se conoce como **vector**. Se representa un vector con cualquier segmento dirigido que pertenece a ese vector, si este segmento dirigido tiene su punto inicial A y su punto final B, se denota este vector por $\overrightarrow{AB}$; si no se expresan los vectores con sus puntos inicial y final se pueden usar las letras minúsculas a, b, c, ... por ejemplo, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

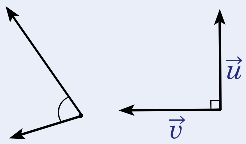


Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales si los segmentos dirigidos que los representan tienen la misma longitud, dirección y sentido, es decir, uno se obtiene del otro por medio de un desplazamiento paralelo.



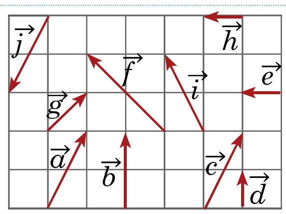
La longitud de un vector $\vec{u}$ se conoce por **norma** del vector $\vec{u}$, y se denota por $\|\vec{u}\|$. Un vector $\vec{u}$ es **unitario** si su norma es 1, es decir, $\|\vec{u}\| = 1$.

El **ángulo entre dos vectores** se mide al unir por los puntos iniciales ambos vectores y se utilizan valores de 0° hasta 180°. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales** si el ángulo formado entre ellos es de 90°.

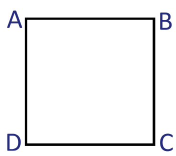


Problemas

1. Considerando los vectores en la cuadrícula donde el lado de cada cuadrado es 1, responde:
   a) ¿Cuáles vectores son iguales?
   b) ¿Cuáles vectores tienen la misma norma?
   c) ¿Cuáles vectores son unitarios?
   d) ¿Cuáles vectores son ortogonales?



2. Considerando el cuadrado ABCD de lado 1, determina:
   a) ¿Cuáles vectores son iguales?
   b) La norma del vector $\overrightarrow{AC}$.
   c) ¿Cuáles vectores son unitarios?
   d) ¿Cuáles vectores son ortogonales?



Indicador de logro:

1.1 Identifica la norma de un vector, vectores iguales, unitarios y ortogonales interpretando la definición.

Secuencia:

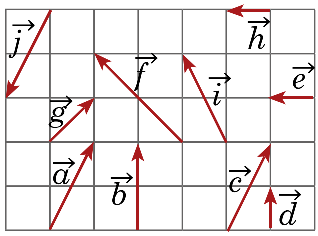
Se introduce la definición de vector y sus elementos a partir de conceptos geométricos conocidos como segmento dirigido, ángulo, longitud de un segmento, etc.

Propósito:

El Problema inicial induce la representación de un vector como segmento dirigido, con esta representación se realizará el estudio de los vectores.

Solución de problemas:

1a) $\vec{a} = \vec{c}$, $\vec{e} = \vec{h}$



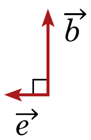
1b) Las de $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son iguales y las de $\vec{d}$, $\vec{e}$ y $\vec{h}$ son iguales:

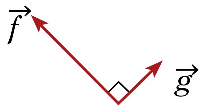
$\|\vec{a}\| = \|\vec{c}\| = \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\|\vec{d}\| = \|\vec{e}\| = \|\vec{h}\| = 1$

1c) $\vec{d}$, $\vec{e}$ y $\vec{h}$

1d) $\vec{b}$ y $\vec{e}$, $\vec{b}$ y $\vec{h}$, $\vec{d}$ y $\vec{e}$, $\vec{d}$ y $\vec{h}$, $\vec{g}$ y $\vec{f}$



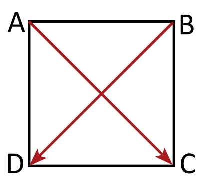


En el literal b) la igualdad de las normas se puede establecer al sobreponer dos vectores de tal manera que coincidan en longitud.

El ángulo entre los vectores se puede determinar midiendo con un transportador o por ángulos notables.

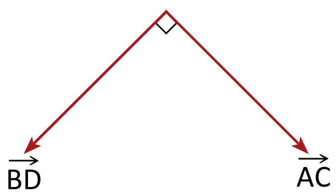
2a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

2b) $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



2c) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$

2d) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BC}$,
$\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{DB}$



En virtud de la igualdad de vectores la respuesta en 2c) se puede expresar utilizando únicamente los primeros 4 vectores, esto dependerá del nivel de comprensión de los estudiantes ya que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, por ejemplo.

En el literal d) no es necesario que se escriban todas las parejas de vectores ortogonales, por ejemplo no se ha escrito $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ ya que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

El estudiante debe observar que no solo los lados de los cuadros definen vectores ortogonales sino también sus diagonales.

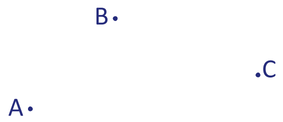
1.2 Suma y resta de vectores

Problema inicial

Resuelve los siguientes literales:

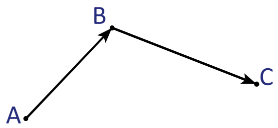
a) Representa con vectores la forma de ir de A hacia C pasando por B.

b) Representa con vectores la forma de ir de A hacia B pasando por C.

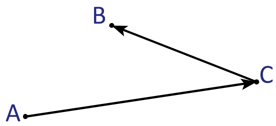


Solución

a) La representación sería:

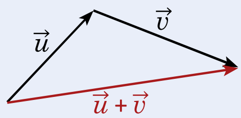


b) La representación sería:



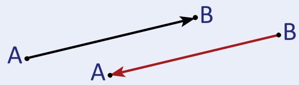
Definición

Al unir el punto final de un vector $\vec{u}$ con el punto inicial de otro vector $\vec{v}$, se define la operación **suma de vectores** como el vector determinado por el punto inicial de $\vec{u}$ con el punto final de $\vec{v}$, como lo muestra la figura. En el literal a) del Problema inicial se cumple que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

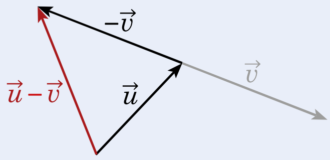


Dados 3 vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ se cumple que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (conmutatividad) y que $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (asociatividad).

Dado un vector $\overrightarrow{AB}$, se define el vector $\overrightarrow{BA}$ como **el opuesto** del vector $\overrightarrow{AB}$, y se denota por $-\overrightarrow{AB}$, es decir, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.



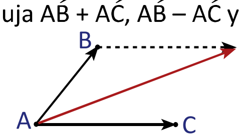
Se define la **resta** del vector $\vec{u}$ con el vector $\vec{v}$ como la suma del vector $\vec{u}$ con $-\vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ como lo muestra la figura. En el literal b) del Problema inicial se cumple que $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.



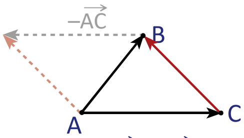
El vector que resulta de realizar la resta $\vec{u} - \vec{u} = \vec{u} + (-\vec{u})$ se conoce como **vector cero**, y se denota por $\vec{0}$ y cumple que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

Ejemplo

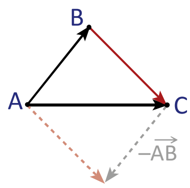
Dibuja $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Estas representaciones de vectores son muy importantes.

Problemas

Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa las operaciones de cada literal.

a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{a} + \vec{c}$

c) $\vec{c} + \vec{d}$

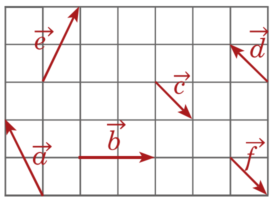
d) $\vec{a} + \vec{e} + \vec{c}$

e) $\vec{a} - \vec{b}$

f) $\vec{d} - \vec{f}$

g) $\vec{c} - \vec{f}$

h) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$



Unidad 7

179

Indicador de logro:

1.2 Dibuja el vector resultante de una suma o resta de vectores.

Secuencia:

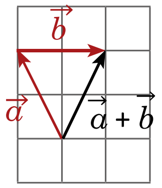
Se definen las operaciones entre vectores en las que se introducen los conceptos de vector opuesto y vector cero. Las operaciones se realizan utilizando los segmentos como tal, posteriormente se introducirán los conceptos de base y coordenadas que facilitan estas operaciones.

Propósito:

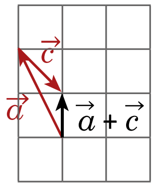
El Problema inicial proporciona una imagen de la suma de vectores. La imagen que representa la resta en la Definición se interpreta en términos de la suma de vectores y el vector opuesto, mientras que en el Ejemplo se interpreta a partir de los vectores originales.

Solución de problemas:

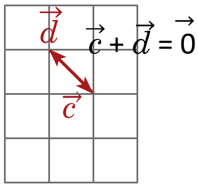
a)



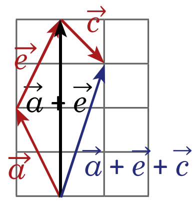
b)



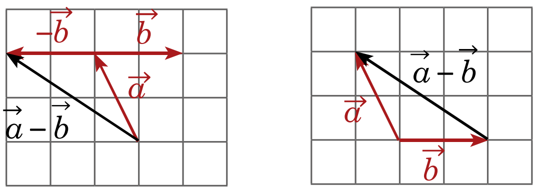
c)



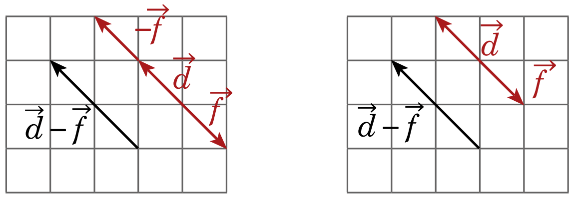
d)



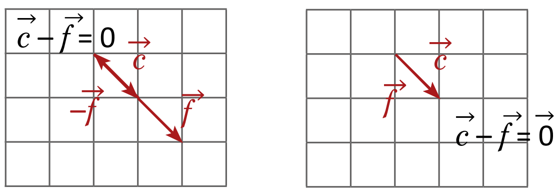
e)



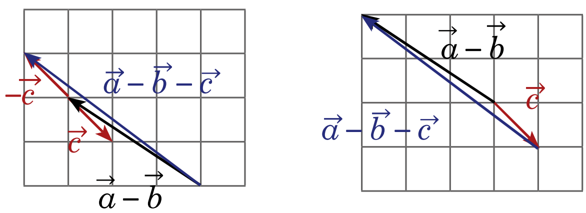
f)



g)



h)



En el literal d) se realiza asociando los primeros dos vectores y luego se suma el tercero. A partir del literal e) se muestra cómo realizar la resta de dos formas distintas, la primera es a partir de la suma del vector opuesto y la segunda aplicando el esquema del Ejemplo. En h) se ha retomado el resultado de e).

Lección 1

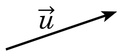
1.3 Producto por escalar

Problema inicial

Dibuja el vector que resulta en las siguientes sumas de vectores:

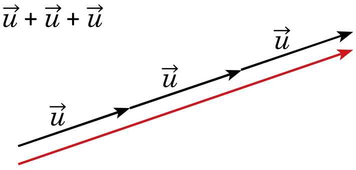
a) $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$

b) $-\vec{u} - \vec{u}$

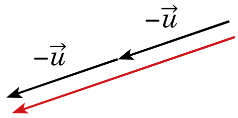


Solución

a) $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$



b) $-\vec{u} - \vec{u}$

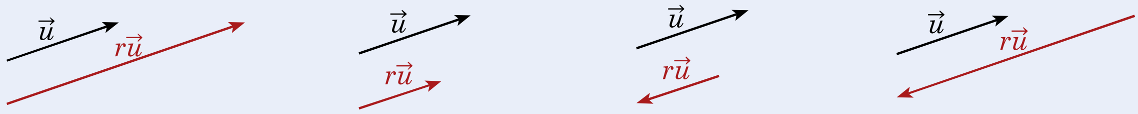


Definición

Para un vector $\vec{u}$ y un número real r, de modo que $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $r \neq 0$, se define el **producto por escalar** para representar dilataciones ($r > 1$) o contracciones ($0 < r < 1$) en el mismo sentido ($r > 0$) o en sentido contrario ($r < 0$), y se denota por $r\vec{u}$.

Para el producto por escalar se cumple que $\|r\vec{u}\| = |r|\,\|\vec{u}\|$. Se define que $0\vec{u} = \vec{0}$ y que $r\vec{0} = \vec{0}$.

$r > 1$ $\qquad$ $0 < r < 1$ $\qquad$ $-1 < r < 0$ $\qquad$ $r < -1$



Considerando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, los números reales r y s, se cumplen las siguientes propiedades del producto por escalar:

1. $r(s\vec{u}) = rs\vec{u}$ $\qquad$ 2. $(r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$ $\qquad$ 3. $r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$

Se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diferentes de $\vec{0}$ son **paralelos** (o colineales) cuando los segmentos dirigidos que representan estos vectores, son paralelos. Esto equivale a que existe un número real r tal que $\vec{u} = r\vec{v}$.

Ejemplo

Determina en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector resultante de la expresión $2(2\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(2\vec{u} - \vec{v})$.

$$\begin{aligned} 2(2\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(2\vec{u} - \vec{v}) &= 2(2\vec{u}) + 2(3\vec{v}) + (-3)(2\vec{u}) + (-3)(-\vec{v}) \\ &= 4\vec{u} + 6\vec{v} + (-6\vec{u}) + 3\vec{v} \\ &= -2\vec{u} + 9\vec{v} \end{aligned}$$

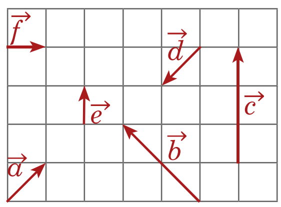
Recuerda que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Problemas

1. Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa cada literal.

a) $4\vec{e}$ $\qquad$ b) $4\vec{a}$ $\qquad$ c) $\frac{1}{3}\vec{c}$

d) $-3\vec{f}$ $\qquad$ e) $-\frac{3}{2}\vec{b}$ $\qquad$ f) $2\vec{d} + 3\vec{e}$



2. Determina en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector resultante de cada expresión.

a) $4\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{u} - 2\vec{v}$ $\qquad$ b) $(\vec{u} - 2\vec{v}) - (-3\vec{u} + 2\vec{v})$ $\qquad$ c) $3(2\vec{u} + 4\vec{v})$ $\qquad$ d) $3(-2\vec{u} + \vec{v}) - 2(3\vec{u} - 4\vec{v})$

Indicador de logro:

1.3 Dibuja el vector resultante de multiplicar un vector por un número escalar.

Secuencia:

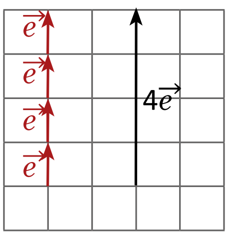
Ahora que ya se conocen las operaciones de suma y resta de vectores se define el producto por escalar que, en el caso que el escalar sea entero, generaliza la suma de un mismo vector un número entero de veces o la suma de su opuesto si el entero es negativo. Esta definición permite introducir el concepto de vectores paralelos.

Propósito:

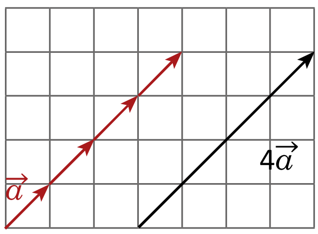
El Problema inicial permite inducir el producto por escalar al menos para números enteros. En la Definición el producto por escalar queda establecido para un número real cualquiera por medio de la noción de contracción y dilatación. Se establecen además propiedades del producto por escalar para operar los vectores como expresiones algebraicas.

Solución de problemas:

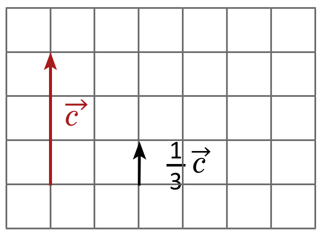
1a)



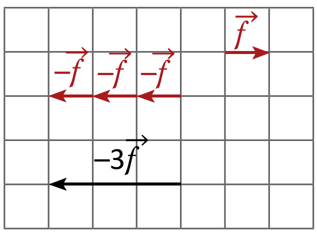
1b)



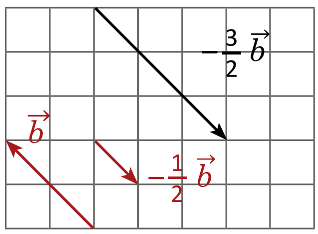
1c)



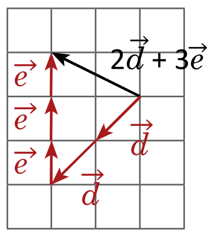
1d)



1e)



1f)



2a) $4\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{u} - 2\vec{v} = 3\vec{u} + \vec{v}$

2b) $(\vec{u} - 2\vec{v}) - (-3\vec{u} + 2\vec{v}) = 4\vec{u} - 4\vec{v}$

2c) $3(2\vec{u} + 4\vec{v}) = 6\vec{u} + 12\vec{v}$

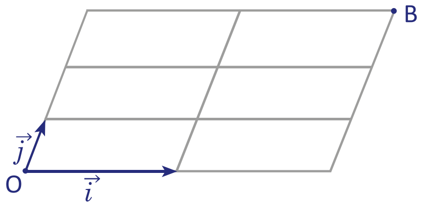
2d) $3(-2\vec{u} + \vec{v}) - 2(3\vec{u} - 4\vec{v}) = -12\vec{u} + 11\vec{v}$

Lección 1

1.4 Coordenadas de un vector en una base*

Problema inicial

La siguiente figura está formada por paralelogramos, expresa el vector $\overrightarrow{OB}$ con los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

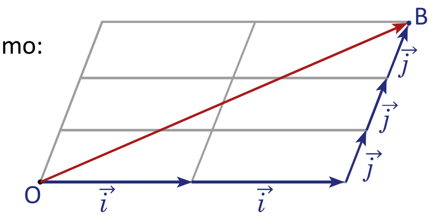


Solución

El vector $\overrightarrow{OB}$ se puede expresar como suma de vectores con $\vec{i}$ y $\vec{j}$ como:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{i} + \vec{j} + \vec{j} + \vec{j}.$$

Utilizando el producto por escalar, se cumple que $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.



Conclusión

A una pareja de vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ ambos diferentes de $\vec{0}$ y no paralelos (no colineales) se les llama **base vectorial**.

El punto O se conoce como **origen** de la base vectorial, y para todo vector $\vec{u}$ se cumple que, existe un punto M tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Además para todo vector $\overrightarrow{OM}$, existen dos números reales únicos x, y, tales que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, y se puede expresar el vector como un par ordenado $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, a este par ordenado (x, y) se le conoce como **coordenadas** del vector $\overrightarrow{OM}$ en la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Una base es **ortogonal** cuando $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son ortogonales, y se dice que una base es **ortonormal** cuando además de ser ortogonales, tanto $\vec{i}$ como $\vec{j}$ son unitarios (la norma es igual a 1).

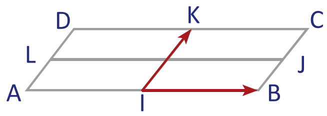
Ejemplo

Determina las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{ID}$ en la base $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IK})$.

$\overrightarrow{IC} = (1)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{IB} = (1)\overrightarrow{IB} + (0)\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IK} = (0)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{IJ} = (1)\overrightarrow{IB} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IA} = (-1)\overrightarrow{IB} + (0)\overrightarrow{IK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{ID} = (-1)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$



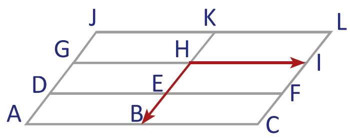
Por lo tanto, las coordenadas de los vectores son (1, 1), (1, 0), (0, 1), $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, (–1, 0), (–1, 1).

Problemas

Considerando la base $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HB})$, determina las coordenadas de los vectores de cada literal.

a) $\overrightarrow{HA}$ $\qquad$ b) $\overrightarrow{HK}$ $\qquad$ c) $\overrightarrow{HF}$ $\qquad$ d) $\overrightarrow{HJ}$

e) $\overrightarrow{HH}$ $\qquad$ f) $\overrightarrow{HI}$ $\qquad$ g) $\overrightarrow{HB}$ $\qquad$ h) $\overrightarrow{HE}$



Indicador de logro:

1.4 Determina las coordenadas de un vector utilizando una base vectorial.

Secuencia:

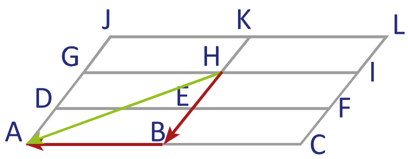
En esta clase se aborda el concepto de base vectorial para expresar un vector en términos de otros, esto servirá posteriormente para determinar una fórmula para la norma de un vector y describir los números complejos a partir de los vectores.

Propósito:

En el Problema inicial los estudiantes harán uso de la suma de vectores y del producto por escalar. En la Definición se observa que al escribir las coordenadas de un vector se debe hacer referencia a la base utilizada, así como en el Ejemplo donde se debe observar la importancia del orden de las coordenadas.

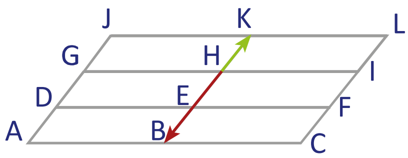
Solución de problemas:

a) $\overrightarrow{HA} = (-1)\overrightarrow{HI} + (1)\overrightarrow{HB}$



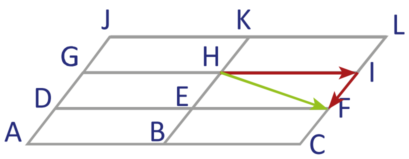
Coordenadas: $(-1, 1)$

b) $\overrightarrow{HK} = (0)\overrightarrow{HI} + \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{HB}$



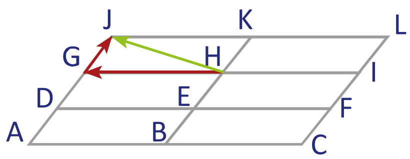
Coordenadas: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

c) $\overrightarrow{HF} = (1)\overrightarrow{HI} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{HB}$



Coordenadas: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

d) $\overrightarrow{HJ} = (-1)\overrightarrow{HI} + \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{HB}$



Coordenadas: $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

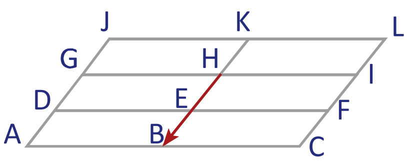
e) $\overrightarrow{HH} = (0)\overrightarrow{HI} + (0)\overrightarrow{HB}$

$(0, 0)$

f) $\overrightarrow{HI} = (1)\overrightarrow{HI} + (0)\overrightarrow{HB}$

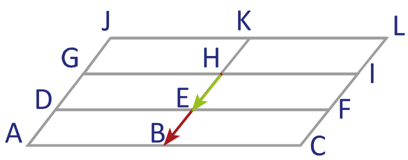
$(1, 0)$

g) $\overrightarrow{HB} = (0)\overrightarrow{HI} + (1)\overrightarrow{HB}$



Coordenadas: $(0, 1)$

h) $\overrightarrow{HE} = (0)\overrightarrow{HI} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{HB}$



Coordenadas: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

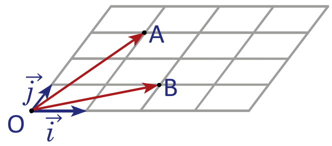
1.5 Operaciones con vectores en coordenadas

Problema inicial

Determina las coordenadas de los siguientes vectores en la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

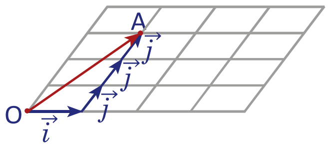
a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ e) $2\overrightarrow{OB}$ f) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$



Solución

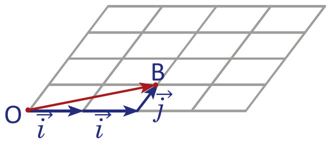
a)



$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} = (1, 3)$

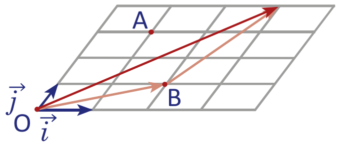
b)



$\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = (2, 1)$

c)



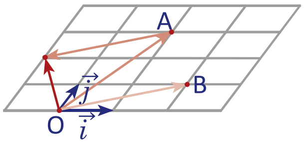
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (3, 4)$

Nota que $(3, 4) = (1 + 2, 3 + 1)$.

d)



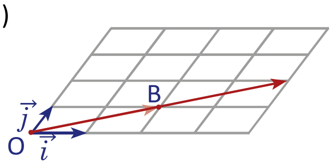
$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 3\vec{j} - (2\vec{i} + \vec{j})$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-1, 2)$

Nota que $(-1, 2) = (1 - 2, 3 - 1)$.

e)



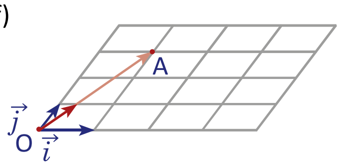
$2\overrightarrow{OB} = 2(2\vec{i} + \vec{j})$

$2\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

$2\overrightarrow{OB} = (4, 2)$

Nota que $(4, 2) = (2 \times 2, 2 \times 1)$.

f)



$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}(\vec{i} + 3\vec{j})$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{i} + \vec{j}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

Nota que $\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \left(\frac{1}{3} \times 1, \frac{1}{3} \times 3\right)$.

Conclusión

Dado dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con coordenadas $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$ y un número real r se cumple que

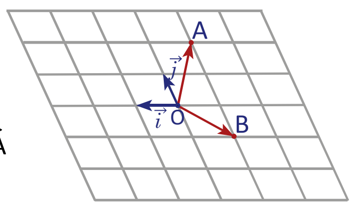
$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y') \qquad \vec{u} - \vec{v} = (x - x', y - y') \qquad r\vec{u} = (rx, ry)$$

Problemas

Determina las coordenadas de los siguientes vectores en la base $\vec{i}, \vec{j}$.

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

e) $-3\overrightarrow{OB}$ f) $\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ g) $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ h) $3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}$



Indicador de logro:

1.5 Determina las coordenadas del vector resultante de un producto por escalar, una suma o una resta de vectores.

Secuencia:

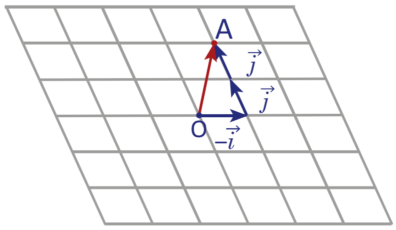
En esta clase se efectúan las operaciones entre vectores utilizando sus coordenadas en una base dada.

Propósito:

Con el Problema inicial se induce que la suma de vectores se puede realizar sumando ordenadamente las coordenadas entre los vectores, esto se consolida en la Conclusión.

Solución de problemas:

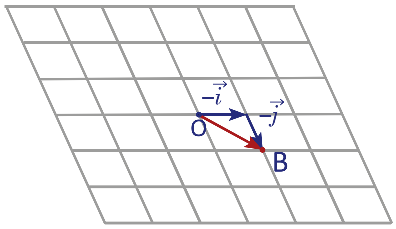
a)



$\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} = (-1, 2)$

b)



$\overrightarrow{OB} = -\vec{i} - \vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = (-1, -1)$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-1 + (-1), 2 + (-1))$
$= (-2, 1)$

d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-1 - (-1), 2 - (-1))$
$= (-1 + 1, 2 + 1)$
$= (0, 3)$

e) $-3\overrightarrow{OB} = (-3(-1), -3(-1))$
$= (3, 3)$

f) $\frac{3}{2}\overrightarrow{OA} = \left(\frac{3}{2}(-1), \frac{3}{2}(2)\right)$
$= \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$

g) $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = (-1, 2) + (-2, -2)$
$= (-3, 0)$

h) $3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} = (-3, -3) - (-2, 4)$
$= (-1, -7)$

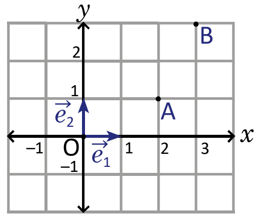
1.6 Vectores y coordenadas de puntos

Problema inicial

Sean A(2, 1) y B(3, 3) dos puntos en el plano, con coordenadas en la base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ que muestra la figura.

a) Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

b) Determina la norma del vector $\overrightarrow{AB}$.

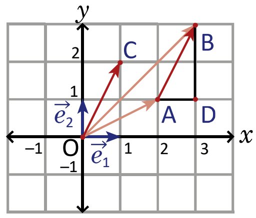


Solución

a) Considerando los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ con coordenadas (2, 1) y (3, 3) respectivamente en la base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Entonces se cumple que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{AB} = (3, 3) - (2, 1)$$
$$\overrightarrow{AB} = (1, 2) = \overrightarrow{OC}.$$



b) La norma de este vector se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras al ΔABD, de modo que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Conclusión

Considerando en el plano los puntos $E_1(1, 0)$ y $E_2(0, 1)$ que definen los vectores $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ y $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$. Se tiene que los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ forman una base ortonormal.

Dado un punto A(x, y) en el plano, se cumple que $\overrightarrow{OA} = (x, y)$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, y que $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si B(x', y') es otro punto, entonces se tiene que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x' - x, y' - y) \qquad \text{y que,}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

Problemas

1. Dados los puntos A y B, determina las coordenadas y la norma del vector $\overrightarrow{AB}$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ definida arriba.

a) A = (2, 1); B = (3, 1) b) A = (3, 0); B = (1, 2) c) A = (1, 1); B = (0, 2)

d) A = (0, 1); B = (–2, 1) e) A = (–1, –3); B = (–1, –2) f) A = (1, –1); B = (1, –1)

2. Considerando las coordenadas en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de un vector $\vec{u} = (2, 4)$ y un punto A = (1, 3), determina las coordenadas de un punto B que cumpla que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Indicador de logro:

1.6 Expresa las coordenadas de un vector cualquiera en el plano cartesiano como coordenadas de un punto.

Secuencia:

Ahora se estudia la base vectorial más simple del plano cartesiano y se establece la norma en términos de las coordenadas.

Propósito:

El Problema inicial permite escribir un vector a partir de dos puntos dados utilizando la diferencia de vectores; además permite determinar su norma por medio de sus coordenadas.

Solución de problemas:

1a) $\overrightarrow{OA} = (2, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (3, 1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (3, 1) - (2, 1)\\ &= (3 - 2, 1 - 1)\\ &= (1, 0)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

1b) $\overrightarrow{OA} = (3, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (1, 2) - (3, 0)\\ &= (1 - 3, 2 - 0)\\ &= (-2, 2)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

1c) $\overrightarrow{OA} = (1, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (0, 2) - (1, 1)\\ &= (0 - 1, 2 - 1)\\ &= (-1, 1)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$

1d) $\overrightarrow{OA} = (0, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (-2, 1)$

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (-2, 1) - (0, 1)\\ &= (-2 - 0, 1 - 1)\\ &= (-2, 0)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

1e) $\overrightarrow{OA} = (-1, -3)$, $\overrightarrow{OB} = (-1, -2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (-1, -2) - (-1, -3)\\ &= (-1 - (-1), -2 - (-3))\\ &= (0, 1)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

1f) $\overrightarrow{OA} = (1, -1)$, $\overrightarrow{OB} = (1, -1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (1, -1) - (1, -1)\\ &= (1 - 1, -1 - (-1)\\ &= (0, 0)\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$

2. $\vec{u} = (2, 4)$ y $A = (1, 3)$, el punto B es tal que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OB} = (2 + 1, 4 + 3)$

$\overrightarrow{OB} = (3, 7)$

Por lo tanto, B = (3, 7).

En este punto el estudiante debe percatarse de la facilidad de las operaciones de vectores utilizando las coordenadas, sin embargo es válido utilizar el recurso gráfico.

1.7 Paralelismo

Problema inicial

Considerando el vector $\vec{u} = (2, 3)$, determina el valor de x para que el vector $\vec{v} = (x, -9)$ sea paralelo a $\vec{u}$ ($\vec{u} \parallel \vec{v}$).

Solución

Se considera un número real r que cumple:

$$\vec{v} = r\vec{u}$$
$$(x, -9) = r(2, 3)$$
$$(x, -9) = (2r, 3r)$$

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diferentes de $\vec{0}$ son paralelos si existe un número real r que cumple $r\vec{u} = \vec{v}$.

Y entonces se debe cumplir que

$$\begin{cases} x = 2r \ldots (1) \\ -9 = 3r \ldots (2) \end{cases}$$

Luego se resuelve la ecuación (2), y se tiene: $r = (-9) \div 3 = -3$.

Finalmente se sustituye el valor de r en (1): $x = 2(-3) = -6$.

Por lo tanto las coordenadas del vector $\vec{v}$ son $(-6, -9)$.

Conclusión

Dado un vector $\vec{u} = (x, y) \neq \vec{0}$, se tiene que otro vector $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{u}$ si existe un número real r de modo que $\vec{v} = (rx, ry)$.

Además, en una base ortonormal, para la norma del vector $\vec{v}$ se cumple que

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = |r|\sqrt{x^2 + y^2} = |r|\,\|\vec{u}\|.$$

Un vector $u = (x, y)$ es distinto del vector cero si x o y son distintos de cero (ambos inclusive).

Para todo número real r se cumple que $\sqrt{r^2} = |r|$.

Ejemplo

Determina los vectores paralelos al vector $\vec{u} = (-3, 4)$ que tienen norma 15.

Si $\vec{v}$ es un vector paralelo a $\vec{u}$ se cumple que $\vec{v} = r\vec{u}$, entonces:

$$\|\vec{v}\| = |r|\,\|\vec{u}\|$$
$$15 = |r|\sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$
$$15 = 5|r|$$
$$|r| = 3$$
$$r = \pm 3,$$

por lo tanto los vectores son: $3\vec{u} = 3(-3, 4) = (-9, 12)$ y $-3\vec{u} = -3(-3, 4) = (9, -12)$.

Problemas

1. Calcula las coordenadas de $\vec{v}$ para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

   a) $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (x, 3)$ b) $\vec{u} = (3, 1)$, $\vec{v} = (x, -3)$ c) $\vec{u} = (6, 3)$, $\vec{v} = (2, x)$ d) $\vec{u} = (2, 4)$, $\vec{v} = (-1, x)$

2. Determina los vectores paralelos al vector $\vec{u}$ que tienen la norma indicada. Considera las coordenadas en una base ortonormal.

   a) $\vec{u} = (4, 3)$, norma 10 b) $\vec{u} = (-3, -4)$, norma 1 c) $\vec{u} = (1, 2)$, norma 5 d) $\vec{u} = (2, 2)$, norma 4

3. Encuentra las coordenadas del punto C de un paralelogramo ABCD, si se cumple que A = (1, 2), B = (3, 5) y D = (0, 0).

Indicador de logro:

1.7 Utiliza la definición de paralelismo entre vectores para resolver problemas con vectores expresados en coordenadas.

Secuencia:

Los vectores paralalelos se definieron en la clase 1.3 donde se trató el producto escalar. Para esta clase se estudia el paralelismo utilizando las coordenadas de los vectores y se demuestra la fórmula de la norma de un vector en términos de algún vector paralelo a este.

Propósito:

Para desarrollar el Problema inicial el estudiante debe utilizar la definición de paralelismo, la igualdad de pares ordenados. En el Ejemplo se muestra otro tipo de problemas sobre vectores paralelos y su solución.

Solución de problemas:

1a) $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (x, 3)$

$$v = r\vec{u}$$
$$(x, 3) = r(2, 1)$$
$$(x, 3) = (2r, r)$$
$$\begin{cases} x = 2r \ldots (1) \\ 3 = r \ldots (2) \end{cases}$$
$$r = 3$$
$$x = 2(3) = 6$$

Por lo tanto, $\vec{v} = (6, 3)$.

1b) $\vec{v} = (-9, -3)$

1c) $\vec{v} = (2, 1)$

1d) $\vec{v} = (-1, -2)$

2a) $\vec{u} = (4, 3)$, norma 10

$$\vec{v} = r\vec{u}$$
$$\|\vec{v}\| = |r|\,\|\vec{u}\|$$
$$10 = |r|\sqrt{4^2 + 3^2}$$
$$10 = 5|r|$$
$$|r| = 2$$
$$r = \pm 2$$

Por lo tanto los vectores son:
$2\vec{u} = (8, 6)$ y $-2\vec{u} = (-8, -6)$.

2b) $\vec{u} = (-3, -4)$, norma 1

Los vectores son: $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ y $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

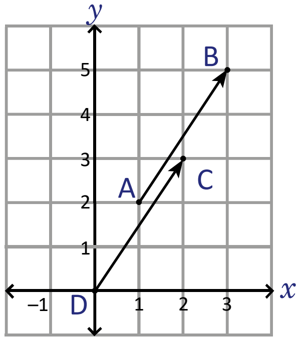
2c) $\vec{u} = (1, 2)$, norma 5

Los vectores son: $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

2d) $\vec{u} = (2, 2)$, norma 4

Los vectores son: $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ y $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

3. A = (1, 2), B = (3, 5), D = (0, 0).

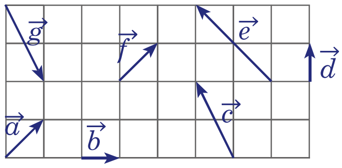


Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ deben ser paralelos e iguales:
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = (3, 5) - (1, 2) = (2, 3)$.
Ahora, ya que D = (0, 0), entonces C = (2, 3).

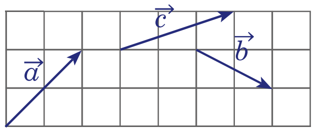
Lección 1

1.8 Practica lo aprendido

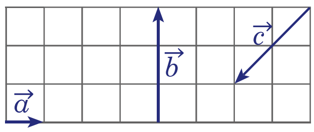
1. Considerando los vectores en la cuadrícula donde el lado de cada cuadrado es 1, responde:
   a) ¿Cuáles vectores son iguales?
   b) ¿Cuáles vectores tienen la misma norma?
   c) ¿Cuáles vectores son unitarios?
   d) ¿Cuáles vectores son ortogonales?



2. Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa la operación de cada literal.
   a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{c} - \vec{b}$
   c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ d) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

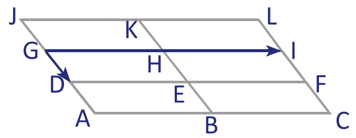


3. Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa cada literal.
   a) $4\vec{a}$ b) $\frac{1}{3}\vec{b}$
   c) $-\frac{3}{2}\vec{c}$ d) $-3\vec{a} + \vec{b}$

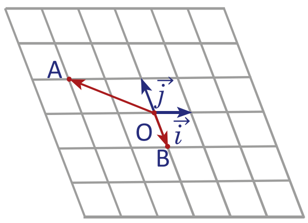


4. Determina en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector resultante de cada expresión.
   a) $2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{u} - \vec{v}$ b) $(3\vec{u} - \vec{v}) - (-2\vec{v} - 3\vec{u})$ c) $-2(3\vec{u} - 2\vec{v})$ d) $2(-\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(\vec{u} + 2\vec{v})$

5. Considerando la base $(\overrightarrow{GI}, \overrightarrow{GD})$, determina las coordenadas de los vectores de cada literal.
   a) $\overrightarrow{GC}$ b) $\overrightarrow{GL}$ c) $\overrightarrow{GB}$ d) $\overrightarrow{GK}$



6. Determina las coordenadas de los siguientes vectores en la base $\vec{i}, \vec{j}$.
   a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
   e) $-2\overrightarrow{OB}$ f) $\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$ g) $\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ h) $-2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$



7. Dados los puntos A y B, determina las coordenadas y la norma del vector $\overrightarrow{AB}$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
   a) A = (3, 1); B = (4, 2) b) A = (–2, 1); B = (–3, 2) c) A = (–1, –1); B = (–3, –2)

8. Considerando las coordenadas de un vector $\vec{u} = (-2, 1)$ y un vector $\overrightarrow{OA} = (3, 5)$. Determina las coordenadas de un vector $\overrightarrow{OB}$ que cumpla que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

9. Calcula las coordenadas de $\vec{v}$ para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.
   a) $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (x, 12)$ b) $\vec{u} = (3, 9)$, $\vec{v} = (x, -6)$

10. Determina los vectores paralelos al vector $\vec{u}$ que tienen la norma indicada. Considera las coordenadas en una base ortonormal.
    a) $\vec{u} = (3, 2)$, norma 13 b) $\vec{u} = (-2, -4)$, norma 10

Indicador de logro:

1.8 Resuelve problemas utilizando vectores.

Solución de problemas:

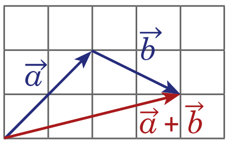
1a) $\vec{a}$ y $\vec{f}$.

1b) $\vec{a}$ y $\vec{f}$; $\vec{b}$ y $\vec{d}$; $\vec{c}$ y $\vec{g}$.

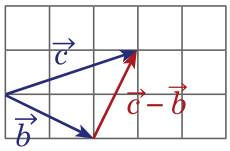
1c) $\vec{b}$ y $\vec{d}$.

1d) $\vec{a}$ y $\vec{e}$; $\vec{e}$ y $\vec{f}$; $\vec{b}$ y $\vec{d}$.

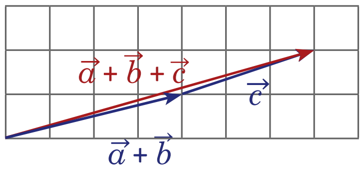
2a)



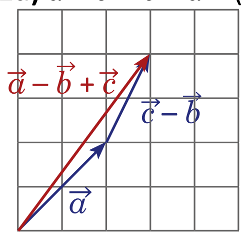
2b)



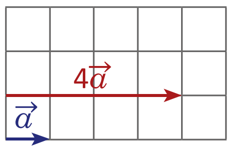
2c)



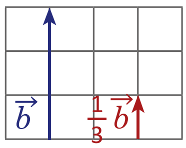
2d) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{c}-\vec{b})$



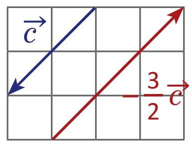
3a)



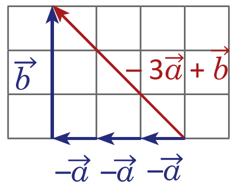
3b)



3c)



3d)



4a) $2\vec{u}+\vec{v}-3\vec{u}-\vec{v}=-\vec{u}$

4b) $(3\vec{u}-\vec{v})-(-2\vec{v}-3\vec{u})=6\vec{u}+\vec{v}$

4c) $-2(3\vec{u}-2\vec{v})=-6\vec{u}+4\vec{v}$

4d) $2(-\vec{u}+3\vec{v})-3(\vec{u}+2\vec{v})=-5\vec{u}$

5a) $(1, 2)$

5b) $(1, -1)$

5c) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

5d) $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

6a) $\overrightarrow{OA}=(-2, 1)$

6b) $\overrightarrow{OB}=(0, -1)$

6c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(-2, 1)+(0, -1)$
$=(-2, 0)$

6d) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(-2, 1)-(0, -1)$
$=(-2, 2)$

6e) $-2\overrightarrow{OB}=(0, 2)$

6f) $\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}=\left(0, -\frac{5}{3}\right)$

6g) $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=(-2, -2)$

6h) $-2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}=(4, 1)$

7a) A = (3, 1); B = (4, 2)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=(4, 2)-(3, 1)$
$=(1, 1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2}$
$=\sqrt{2}$

7b) A = (–2, 1); B = (–3, 2)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=(-3, 2)-(-2, 1)$
$=(-1, 1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}$
$=\sqrt{2}$

7c) A = (–1, –1); B = (–3, –2)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=(-3, -2)-(-1, -1)$
$=(-2, -1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}$
$=\sqrt{5}$

8. $\overrightarrow{AB}=(-2, 1)$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{OB}=(-2, 1)+(3, 5)$
$\overrightarrow{OB}=(1, 6)$

9a) $\vec{v}=(4, 12)$

9b) $\vec{v}=(-2, -6)$

10a) $(3\sqrt{13}, 2\sqrt{13})$ y $(-3\sqrt{13}, -2\sqrt{13})$

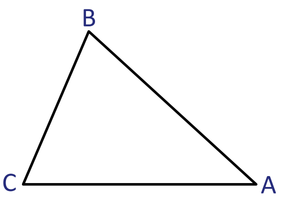
10b) $(2\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$ y $(-2\sqrt{5}, -4\sqrt{5})$

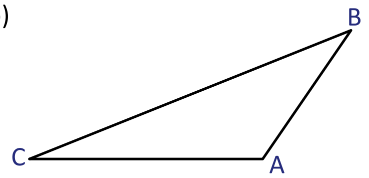
Lección 2 Producto escalar de vectores

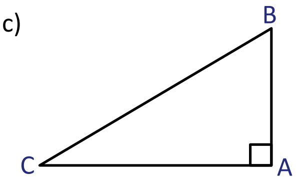
2.1 Proyección ortogonal

Problema inicial

Para cada uno de los siguientes triángulos determina el punto donde se interceptan la altura del vértice B a la base AC.

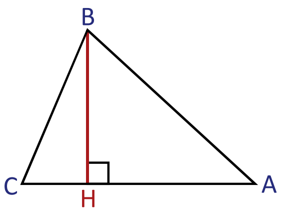
a) 

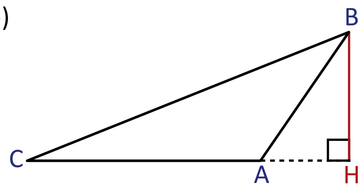
b) 

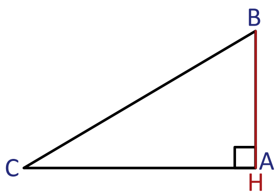
c) 

Solución

Trazando la altura de cada triángulo y localizando el punto de intercepción:

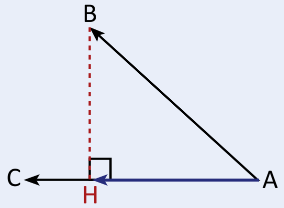
a) 

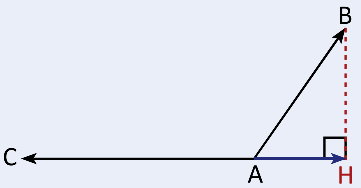
b) 

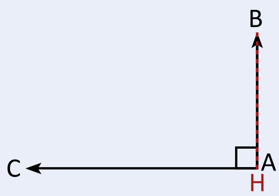
c) 

Conclusión

Dados dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se define **la proyección ortogonal** de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$, por el vector $\overrightarrow{AH}$, y se cumple que $\overrightarrow{BH}$ es ortogonal a $\overrightarrow{AC}$.

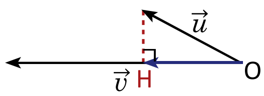


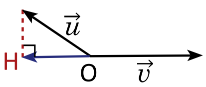


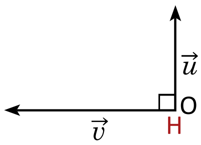


Ejemplo

Determina la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para cada caso.

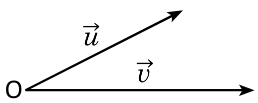
a) 

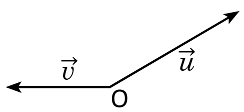
b) 

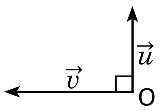
c) 

Problemas

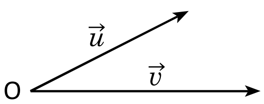
1. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para cada caso.

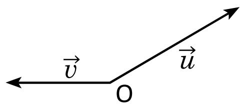
a) 

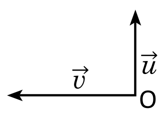
b) 

c) 

2. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ para cada caso.

a) 

b) 

c) 

Indicador de logro:

2.1 Dibuja la proyección ortogonal de un vector sobre otro en diferentes casos.

Secuencia:

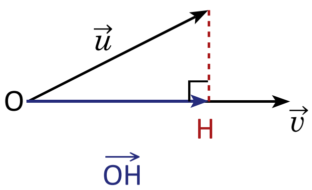
En esta lección se define la proyección ortogonal de un vector sobre otro, esta idea tiene como base el trazo de la altura de un triángulo. La proyección ortogonal permitirá definir el producto escalar para dos vectores cualesquiera.

Propósito:

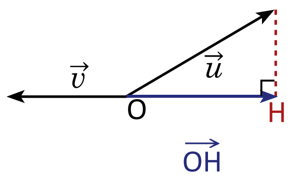
El problema inicial permitirá al estudiante conocer el proceso para determinar la proyección ortogonal de un vector a partir de la altura del triángulo definible por los vectores. En la Conclusión el estudiante debe apropiarse de la representación de la proyección ortogonal.

Solución de problemas:

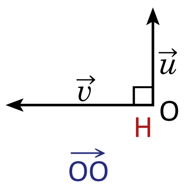
1a)



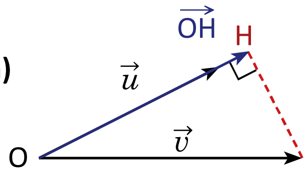
1b)



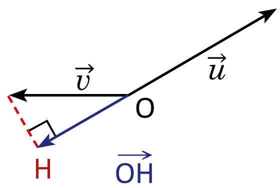
1c)



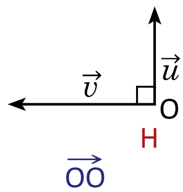
2a)



2b)



2c)



La proyección ortogonal en 1c) y 2c) es el vector cero.

Lección 2

2.2 Producto escalar de vectores paralelos

Definición

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores paralelos (colineales). Se denota el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y se define por:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|, \text{ si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen el mismo sentido.} \\ -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|, \text{ si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen diferente sentido.} \end{cases}$$

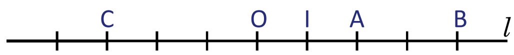
Cuando $\vec{u}=\vec{0}$ o $\vec{v}=\vec{0}$, se define $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{0}$.

Ejemplo 1

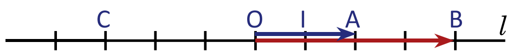
Las divisiones de la recta l son regulares y el vector $\overrightarrow{OI}$ es unitario, determina:

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

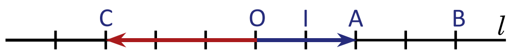
c) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}$　　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



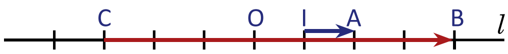
a) En este caso tanto $\overrightarrow{OA}$ como $\overrightarrow{OB}$ tienen el mismo sentido, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|=2\times 4=8$.



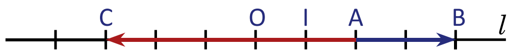
b) En este caso $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ tienen diferente sentido, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OC}\|=-(2\times 3)=-6$.



c) En este caso tanto $\overrightarrow{IA}$ como $\overrightarrow{CB}$ tienen el mismo sentido, $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}=\|\overrightarrow{IA}\|\|\overrightarrow{CB}\|=1\times 7=7$.



d) En este caso $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen diferente sentido, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|=-(2\times 5)=-10$.



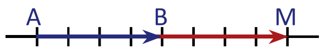
Ejemplo 2

Sean A y B dos puntos tales que AB = 4. Calcula $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ para cada una de las siguientes condiciones.

a) A es el punto medio de BM.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-(4\times 4)=-16$

b) B es el punto medio de AM.



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=4\times 8=32$

c) M es el punto medio de AB.

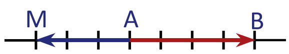
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=4\times 2=8$

Ejemplo 3

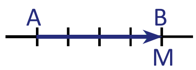
Sean A y B dos puntos tales que AB = 4. Representa el punto M en la recta AB que cumpla las condiciones de cada literal.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=8$

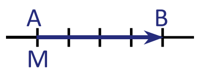
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-12$



c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=16$



d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

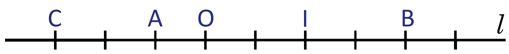


Problemas

1. Las divisiones de la recta l son regulares, y el vector $\overrightarrow{OI}$ es unitario, determina:

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}$　　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



2. Sean A y B dos puntos tales que AB = 2. Calcula $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ para cada una de las siguientes condiciones.

a) A es el punto medio de BM.　　b) B es el punto medio de AM.　　c) M es el punto medio de AB.

3. Sean A y B dos puntos tales que AB = 6. Dibuja el punto M en la recta AB para cada literal.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=24$　　b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-3$　　c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-36$　　d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

Indicador de logro:

2.2 Calcula el producto escalar de vectores paralelos.

Secuencia:

Ahora se estudia la definición de producto escalar de dos vectores para vectores paralelos, que guarda cierta relación con la multiplicación de números positivos y negativos, que se estudió en séptimo grado. En la siguiente clase se extenderá esta definición para dos vectores cualesquiera utilizando la proyección ortogonal.

Propósito:

La definición de producto escalar para vectores paralelos es parecida a la forma en la que se estableció la multiplicación de números positivos y negativos, en este caso el sentido del vector hace las veces de signo para los números: el producto escalar de dos vectores que tienen el mismo sentido es positivo y si es diferente es negativo.

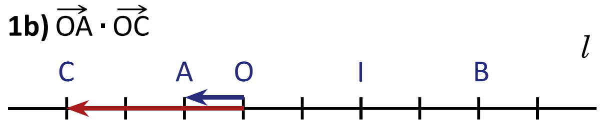
Solución de problemas:

1a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ tienen diferente sentido.

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\| = -\frac{1}{2} \times 2 = -1.$

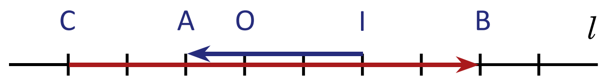
1b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$



$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ tienen el mismo sentido.

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OC}\| = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$

1c) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{CB}$



$\overrightarrow{IA}$ y $\overrightarrow{CB}$ tienen diferente sentido.

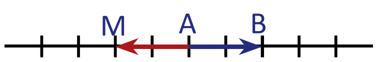
$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\|\overrightarrow{IA}\|\|\overrightarrow{CB}\| = -\left(\frac{3}{2} \times \frac{7}{2}\right) = -\frac{21}{4}.$

1d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen diferente sentido.

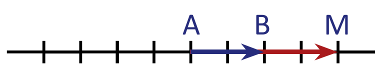
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| = -\left(\frac{5}{2} \times 1\right) = -\frac{5}{2}.$

2a) A es el punto medio de BM.



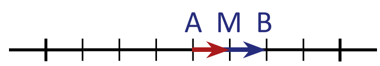
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -(2 \times 2) = -4$

2b) B es el punto medio de AM.



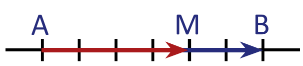
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \times 4 = 8$

2c) M es el punto medio de AB.

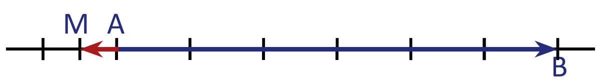


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \times 1 = 2$

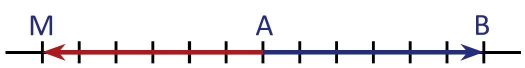
3a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 24$



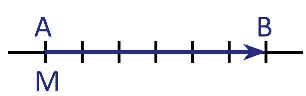
3b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -3$



3c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -36$



3d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

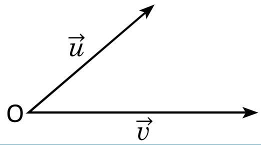


2.3 Producto escalar de vectores no paralelos (no colineales)

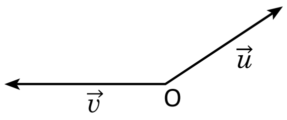
Problema inicial

Expresa el producto escalar del vector $\vec{v}$ con la proyección de $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$.

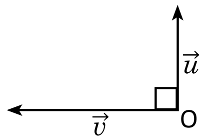
a)



b)



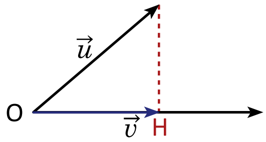
c)



Solución

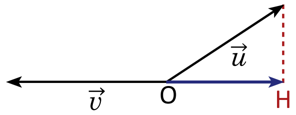
Se encuentra la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

a)



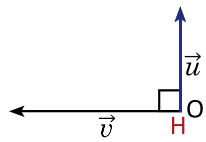
$\vec{v} \cdot \overrightarrow{OH} = \|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OH}\|$

b)



$\vec{v} \cdot \overrightarrow{OH} = -\|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OH}\|$

c)



$\vec{v} \cdot \overrightarrow{OH} = \vec{v} \cdot \vec{0} = 0$

Definición

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no paralelos, y sea $\vec{u}'$ la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, entonces $\vec{u}' \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$. Se define el **producto escalar** de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$$

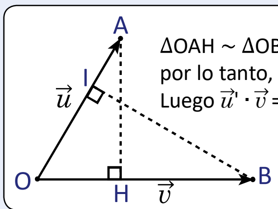
En el producto escalar se cumplen las siguientes propiedades para un número real r y tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

1) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

4) $\vec{u} \cdot (r\vec{v}) = (r\vec{u}) \cdot \vec{v} = r(\vec{u} \cdot \vec{v})$



ΔOAH ~ ΔOBI,
por lo tanto, OB·OH = OA·OI.
Luego $\vec{u}' \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$.

El producto escalar cumple que si dos vectores son ortogonales, entonces su producto escalar es 0 y viceversa (si el producto escalar de dos vectores diferentes de cero es 0 entonces los vectores son ortogonales).

Ejemplo

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, expresa los productos escalares:

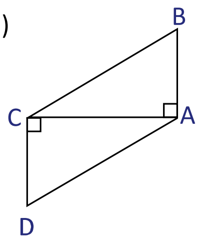
a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$
$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$
$= AC^2$

b) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AC}$
$= -AC^2$

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$
$= -AB^2$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{CA}$
$= \vec{0} \cdot \overrightarrow{CA}$
$= 0$

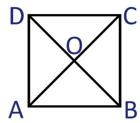
a)



Problemas

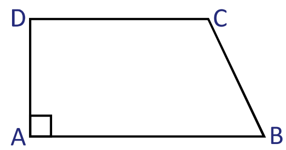
1. Considerando un cuadrado ABCD de lado 4. Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ e) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BO}$



2. Teniendo el trapecio rectángulo ABCD, con AB = 4, AD = 2 y CD = 3.
Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$



Indicador de logro:

2.3 Efectúa el producto escalar de vectores no paralelos utilizando proyección ortogonal.

Secuencia:

Se define el producto escalar para dos vectores cualesquiera relacionando el producto para vectores paralelos con la proyección ortogonal; además, se cumple que dos vectores son ortogonales si y solo si su producto escalar es cero.

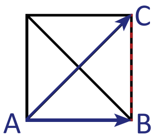
Propósito:

En el Problema inicial se observa el producto escalar de vectores analizando los tres casos de la proyección ortogonal vistos en la clase 2.1, es decir, cuando el ángulo entre los vectores es agudo, obtuso o recto. En la información adicional de la Definición se demuestra que el producto escalar está bien definido.

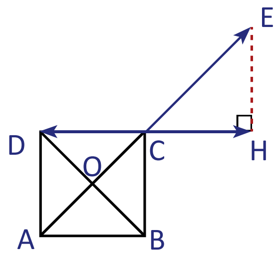
Solución de problemas:

Primero se dibujan los vectores con punto inicial común.

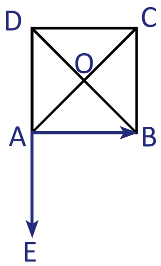
1a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$
$= \|AB\|^2$
$= 4^2$
$= 16$



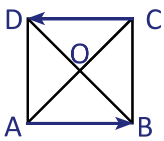
1b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}$
$= \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CH}$
$= -(4\times 4)$
$= -16$



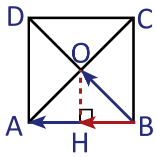
1c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$
$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA}$
$= \overrightarrow{AB}\cdot\vec{0}$
$= 0$



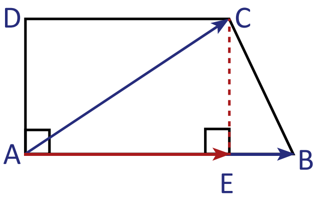
1d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -(4\times 4)$
$= -16$



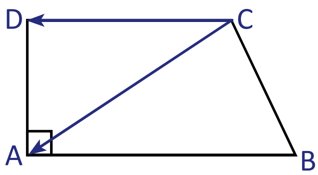
1e) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}$
$= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}$
$= 4\times 2$
$= 8$



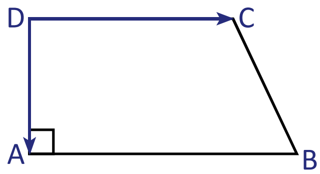
2a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}\cdot(-\overrightarrow{AC})$
$= -(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$
$= -(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE})$
$= -(4\times 3)$
$= -12$



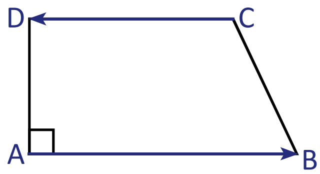
2b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}\cdot(-\overrightarrow{CA})$
$= -(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA})$
$= -(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD})$
$= -(3\times 3)$
$= -9$



2c) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DD} = \overrightarrow{DC}\cdot\vec{0} = 0$



2d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -(4\times 3) = -12$



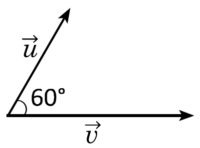
En los problemas 1c) y 2c) el estudiante puede observar inmediatamente que el producto escalar es cero por la perpendicularidad de los vectores.

2.4 Forma trigonométrica del producto escalar

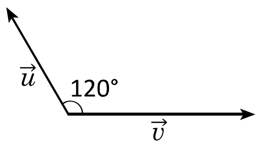
Problema inicial

Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si se sabe que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ y el ángulo entre los vectores es $\alpha = 60°$ o $120°$.

a)



b)



Puedes utilizar razones trigonométricas para calcular el producto escalar.

Las razones trigonométricas de ángulos notables son:

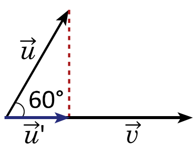
$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución

Se encuentra la proyección ortogonal $\vec{u}'$ de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

a)



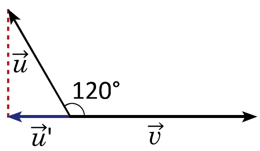
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\|$

Puesto que: $\cos 60° = \dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$

entonces: $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|\cos 60°$

por lo tanto $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 60°$
$= 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$

b)



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}'\|\ \|\vec{v}\|$

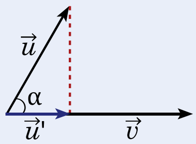
$\cos 120° = -\dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$,

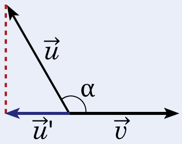
$\|\vec{u}'\| = -\|\vec{u}\|\cos 120°$,

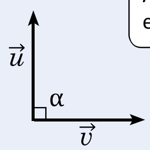
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\|\|\vec{v}\|\cos 120°$
$= 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$

Conclusión

Considerando dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se cumple que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha$.







A partir de la expresión $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha$ es sencillo demostrar que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

A α se le llama ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejemplo

En los siguientes vectores se cumple que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{3}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$. Determina el ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Se cumple que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha$ (α es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$) entonces para calcular el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$9 = 3(2\sqrt{3})\cos \alpha.$$

Luego $\quad \cos \alpha = \dfrac{9}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Como $0° < \alpha \leq 180°$, entonces $\alpha = 30°$.

De la clase 1.1 de esta unidad se sabe que el ángulo entre dos vectores está entre 0° y 180°.

Problemas

1. Calcula el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, considerando que α es el ángulo formado entre ambos vectores.
   a) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 60°$ $\quad$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 30°$ $\quad$ c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$

2. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para cada literal.
   a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ $\quad$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ $\quad$ c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

Indicador de logro:

2.4 Realiza el producto escalar de vectores utilizando la forma trigonométrica del producto escalar.

Secuencia:

En esta clase se establece la relación entre el producto escalar y el ángulo formado entre dos vectores dados.

Propósito:

En la Solución los estudiantes calcularán el producto escalar utilizando la definición y las razones trigonométricas del ángulo dado entre los vectores.

Solución de problemas:

1a) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 60°$

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 60° \\ &= 7 \times 4 \times \frac{1}{2} \\ &= 14 \end{aligned}$$

1b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 30°$

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 30° \\ &= \sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

1c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 45° \\ &= 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

2a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4$

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha \\ 4 &= 2(4)(\cos\alpha) \\ \cos\alpha &= \frac{1}{2} \\ \alpha &= 60° \end{aligned}$$

2b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha \\ 3 &= \sqrt{3}(2)(\cos\alpha) \\ \cos\alpha &= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha &= 30° \end{aligned}$$

2c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha \\ -3 &= \sqrt{2}(3)(\cos\alpha) \\ \cos\alpha &= \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha &= 135° \end{aligned}$$

2.5 Producto escalar de vectores en el plano cartesiano

Problema inicial

Considerando una base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$ dos vectores $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Determina $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) & \\
&= x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + x\vec{i} \cdot y'\vec{j} + y\vec{j} \cdot x'\vec{i} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j} & \text{por propiedad 3,} \\
&= xx'(\vec{i} \cdot \vec{i}) + xy'(\vec{i} \cdot \vec{j}) + yx'(\vec{j} \cdot \vec{i}) + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j}) & \text{por propiedad 4,} \\
&= xx'\|\vec{i}\|^2 + xy'(0) + yx'(0) + yy'\|\vec{j}\|^2 & \text{porque } \vec{i}, \vec{j} \text{ son ortogonales,} \\
&= xx'(1) + yy'(1) & \text{porque } \vec{i}, \vec{j} \text{ son normales.} \\
&= xx' + yy' &
\end{aligned}$$

Conclusión

Dados dos vectores $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ en una base ortonormal, se cumple que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Ejemplo

Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (3, 2)$, $\vec{v} = (1, 2)$ en una base ortonormal.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3 \times 1) + (2 \times 2)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 4$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$$

Problemas

1. Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

   a) $\vec{u} = (4, 1)$, $\vec{v} = (2, 3)$ b) $\vec{u} = (-2, 3)$, $\vec{v} = (-1, -2)$ c) $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (-3, -2)$

2. Encuentra el valor de x que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

   a) $\vec{u} = (-3, 1)$, $\vec{v} = (2, x)$ b) $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (x, -2)$

   c) $\vec{u} = (x, 2)$, $\vec{v} = (-1, x)$ d) $\vec{u} = (2, x)$, $\vec{v} = (x, 5)$

   e) $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (x, 3)$ f) $\vec{u} = (2 - x, 3)$, $\vec{v} = (1, 2 + x)$ g) $\vec{u} = (1 - x, x)$, $\vec{v} = (3x, 2x - 1)$

   Si el producto escalar de dos vectores diferentes de cero es 0, entonces los vectores son ortogonales.

3. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores de cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

   a) $\vec{u} = (4, 1)$, $\vec{v} = (2, 3)$ b) $\vec{u} = (-2, 3)$, $\vec{v} = (-1, -2)$ c) $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (-3, -2)$

   Aplica la forma en que se utilizó el producto escalar en el ejemplo de la clase anterior.

Indicador de logro:

2.5 Determina el producto escalar de vectores en coordenadas de una base ortonormal.

Secuencia:

Se determina el producto escalar a partir de las coordenadas del vector en una base ortonormal utilizando las propiedades de los vectores.

Propósito:

Escribir un vector en una base ortonomal facilitará el cálculo del producto escalar. Ahora el estudiante será capaz de determinar el ángulo entre dos vectores conociendo únicamente sus coordenadas.

Solución de problemas:

1a) $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (4 \times 2) + (1 \times 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 + 3$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 11$

1b) $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (-1, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \times (-1) + 3 \times (-2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 6$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$

1c) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (-3, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + (-3) \times (-2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 6$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2a) $\vec{u} = (-3, 1), \vec{v} = (2, x)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$-3(2) + 1(x) = 0$

$x = 6$

2b) $\vec{u} = (1, 0), \vec{v} = (x, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$x + 0(-2) = 0$

$x = 0$

2c) $\vec{u} = (x, 2), \vec{v} = (-1, x)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$x(-1) + 2(x) = 0$

$x = 0$

2d) $\vec{u} = (2, x), \vec{v} = (x, 5)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$2(x) + x(5) = 0$

$x = 0$

2e) $\vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (x, 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$2(x) + 1(3) = 0$

$x = -\frac{3}{2}$

2f) $\vec{u} = (2 - x, 3), \vec{v} = (1, 2 + x)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$(2 - x)(1) + 3(2 + x) = 0$

$x = -4$

2g) $\vec{u} = (1 - x, x), \vec{v} = (3x, 2x - 1)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$(1 - x)(3x) + x(2x - 1) = 0$

$-x^2 + 2x = 0$

$x = 0$ o $x = 2$

3a) $\vec{u} = (4, 1), \vec{v} = (2, 3)$

$u \cdot v = (4 \times 2) + (1 \times 3) = 11$

$\|u\| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$\|v\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \alpha$

$11 = \sqrt{17}\sqrt{13} \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{11}{\sqrt{221}}$

$\alpha = \cos^{-1} \frac{11}{\sqrt{221}}$

$\alpha \approx 42.27°$

3b) $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (-1, -2)$

$u \cdot v = -2(-1) + 3(-2) = -4$

$\|u\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \alpha$

$-4 = \sqrt{13}\sqrt{5} \cos \alpha$

$\cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{65}}$

$\alpha = \cos^{-1} \left(-\frac{4}{\sqrt{65}}\right)$

$\alpha \approx 119.74°$

3c) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (-3, -2)$

$u \cdot v = 2(-3) + (-3)(-2) = 0$

$\|u\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \alpha$

$0 = \sqrt{13}\sqrt{13} \cos \alpha$

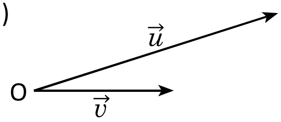
$\cos \alpha = 0$

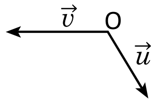
$\alpha = \cos^{-1} 0$

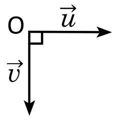
$\alpha = 90°$

2.6 Practica lo aprendido

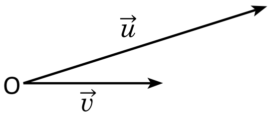
1. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para cada caso.

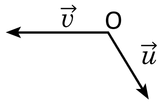
a) 

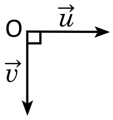
b) 

c) 

2. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ para cada caso.

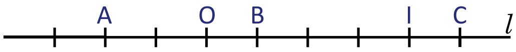
a) 

b) 

c) 

3. Las divisiones de la recta l son regulares, y el vector $\overrightarrow{OI}$ es unitario, determina:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$



4. Sean A y B dos puntos tales que AB = 1. Calcula $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ para cada una de las siguientes condiciones.

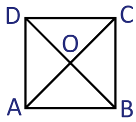
a) A es el punto medio de BM b) B es el punto medio de AM c) M es el punto medio de AB

5. Sean A y B dos puntos tales que AB = 3. Representa el punto M en la recta AB que cumpla las condiciones de cada literal.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

6. Considerando un cuadrado ABCD con centro O y lado 3. Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$



7. Calcula el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, considerando que α es el ángulo formado entre ambos vectores.

a) $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 5$, $\alpha = 60°$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 150°$

8. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para cada literal.

a) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

9. Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

a) $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (-1, 0)$ b) $\vec{u} = (-3, 4)$, $\vec{v} = (-4, -2)$

10. Encuentra el valor de x que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

a) $\vec{u} = (1 - 3x, 2)$, $\vec{v} = (2, 4 + 2x)$ b) $\vec{u} = (2 - 3x, 2x)$, $\vec{v} = (2x, 3x + 2)$

11. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores de cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

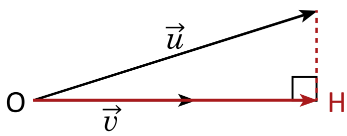
a) $\vec{u} = (-5, 3)$, $\vec{v} = (-6, -10)$ b) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{v} = (0 , 2)$

Indicador de logro:

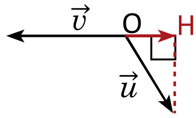
2.6 Resuelve problemas correspondientes al producto escalar de vectores.

Solución de problemas:

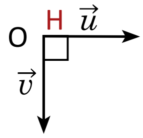
1a)



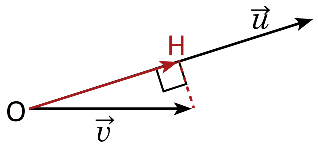
1b)



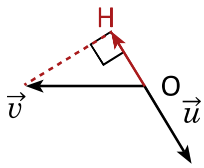
1c)



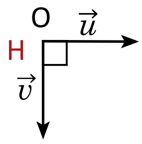
2a)



2b)



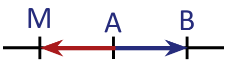
2c)



3a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

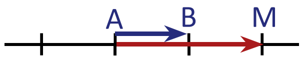
3b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{8}$

4a) A es el punto medio de BM



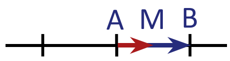
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -(1 \times 1) = -1$

4b) B es el punto medio de AM



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 1 \times 2 = 2$

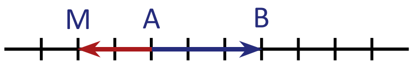
4c) M es el punto medio de AB



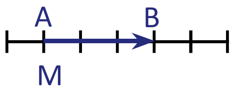
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

5a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$

5b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$



5c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$



6a)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{AD} \cdot (-\overrightarrow{AC}) \\ &= -(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &= -(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}) \\ &= -(3 \times 3) \\ &= -9\end{aligned}$$

6b)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{CD} \cdot (-\overrightarrow{CB}) \\ &= -(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CC}) \\ &= -(\overrightarrow{CD} \cdot \vec{0}) \\ &= 0\end{aligned}$$

6c) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Pues las diagonales del cuadrado son perpendiculares.

7a)
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 60° \\ &= 6 \times 5 \times \frac{1}{2} \\ &= 15\end{aligned}$$

7b)
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 150° \\ &= \sqrt{3} \times 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -6\end{aligned}$$

8a)
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha$$
$$15 = 5(6)(\cos \alpha)$$
$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = 60°$$

8b)
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \alpha$$
$$-3 = \sqrt{3}(2)(\cos \alpha)$$
$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\alpha = 150°$$

9a) $\vec{u} = (2, -1), \vec{v} = (-1, 0)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + (-1) \times 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$

9b) $\vec{u} = (-3, 4), \vec{v} = (-4, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3) \times (-4) + 4 \times (-2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12 - 8$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$

10a) $\vec{u} = (1 - 3x, 2), \vec{v} = (2, 4 + 2x)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$(1 - 3x)(2) + 2(4 + 2x) = 0$

$x = 5$

10b) $\vec{u} = (2 - 3x, 2x), \vec{v} = (2x, 3x + 2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$(2 - 3x)(2x) + 2x(3x + 2) = 0$

$x = 0$

11a) $\vec{u} = (-5, 3), \vec{v} = (-6, -10)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\|\cos \alpha$

$0 = \sqrt{34}\ (2\sqrt{34})\cos \alpha$

$\cos \alpha = 0$

$\alpha = 90°$

11b) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{v} = (0\ , 2)$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha = 30°$

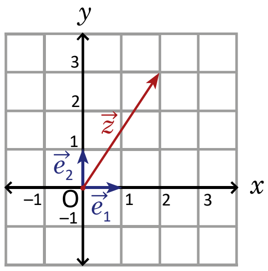
Lección 3 Números complejos

3.1 Representación geométrica de los números complejos

Problema inicial

Considerando el número complejo $z = 2 + 3i$, representa en el plano cartesiano el vector $\vec{z} = (2, 3)$ utilizando como base los vectores ortonormales $\vec{e}_1 = (1, 0)$ y $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

Solución

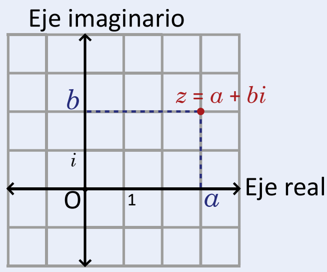


Conclusión

El plano cartesiano es una base de vectores ortonormales y las coordenadas de un punto A en el plano equivalen a las coordenadas del vector $\overrightarrow{OA}$ en la base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Un número complejo $z = a + bi$, se puede representar en un plano en donde la primera coordenada (eje x) es la parte real (a) del número z, y la segunda coordenada (eje y) es la parte imaginaria (b) del número z.

El plano donde se ubican los números complejos se conoce como **plano complejo**. El eje horizontal se conoce como **eje real** y el eje vertical se conoce como **eje imaginario**.



Se define el **módulo** del número complejo $z = a + bi$, como la norma del vector (a, b), y se denota por $|z|$, es decir:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ejemplo

Determina el módulo del número $z = 2 + 3i$.

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{13}$$

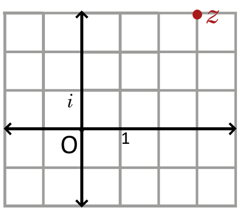
Problemas

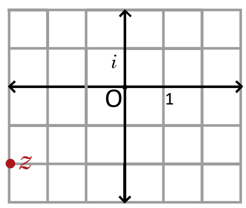
1. Representa los siguientes números complejos como puntos en el plano complejo y determina su módulo.

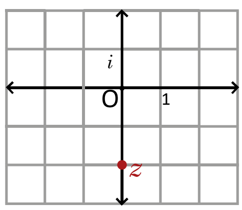
a) $z = 2 + 3i$ b) $z = -4 - 2i$ c) $z = -1 + 2i$

d) $z = 3 - i$ e) $z = 4$ f) $z = -4i$

2. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

a)


b)


c)


3. Demuestra que $|z|^2 = z\bar{z}$.

Recuerda que el conjungado de un número complejo $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$.

Indicador de logro:

3.1 Representa un número complejo en el plano complejo.

Secuencia:

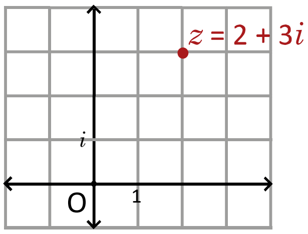
En esta lección se estudiarán las propiedades de los números complejos a partir de su representación en el plano complejo, estableciendo así la equivalencia entre números complejos y vectores.

Propósito:

En la Conclusión se establece que la representación de un número complejo es el punto final del vector cuyas coordenadas son la parte real e imaginaria, en la base ortonormal del plano.

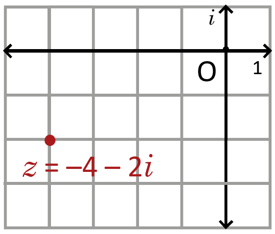
Solución de problemas:

1a)



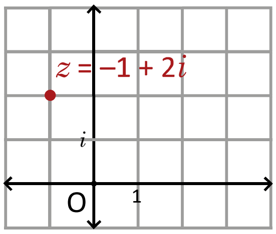
$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

1b)



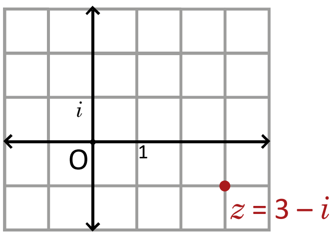
$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$

1c)



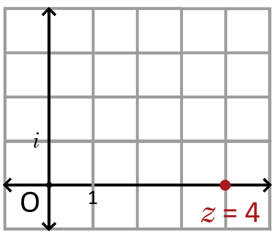
$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

1d)



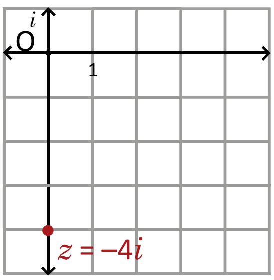
$|z| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

1e)



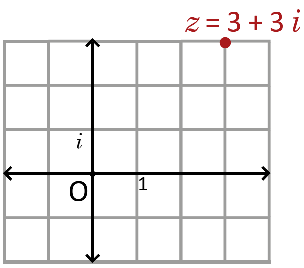
$|z| = \sqrt{4^2 + (0)^2} = 4$

1f)

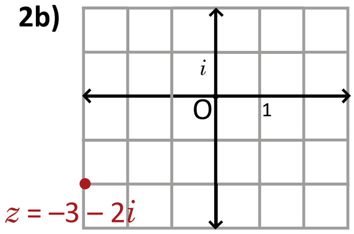


$|z| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$

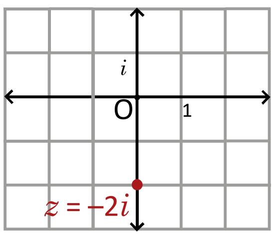
2a)



2b)



2c)



3. $|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$

$$
\begin{aligned}
z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi)\\
&= a^2 - (bi)^2\\
&= a^2 - b^2i^2\\
&= a^2 - b^2(-1)\\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $|z|^2 = z\bar{z}$.

Hacer énfasis al estudiante del porqué se utilizan puntos y no saetas.

Lección 3

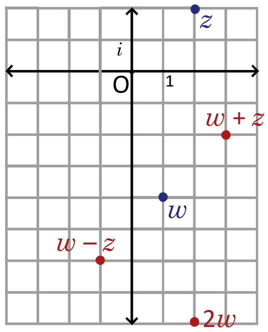
3.2 Operaciones con números complejos en el plano complejo

Problema inicial

Considerando los números complejos $z = 2 + 2i$ y $w = 1 - 4i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

a) z b) w c) $w + z$ d) $w - z$ e) $2w$

Solución



a) Se representa el punto (2, 2).

b) Se representa el punto (1, –4).

c) $w + z = 1 - 4i + 2 + 2i = 3 - 2i$, entonces se representa el punto (3, –2).

d) $w - z = 1 - 4i - (2 + 2i) = -1 - 6i$, entonces se representa el punto (–1, –6).

e) $2w = 2(1 - 4i) = 2 - 8i$, entonces se representa el punto (2, –8).

Conclusión

Dados dos números complejos $w = a + bi$ y $z = c + di$, se cumple que la suma de números complejos $w + z$ equivale al número complejo representado por las coordenadas $(a, b) + (c, d)$.

Análogamente, la resta de números complejos $w - z$ equivale al número complejo representado por las coordenadas $(a, b) - (c, d)$.

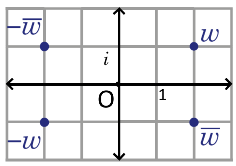
Y el número complejo que se representa en el plano por el vector (ra, rb) es rw.

Observar que las operaciones con números complejos en el plano complejo se comportan como las operaciones de vectores en el plano.

Ejemplo

Considerando $w = 2 + i$, representa en el plano complejo los números:

a) w b) $\overline{w}$ c) $-w$ d) $-\overline{w}$



Problemas

1. Considerando los números complejos $z = 2 - i$ y $w = 3 + 2i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

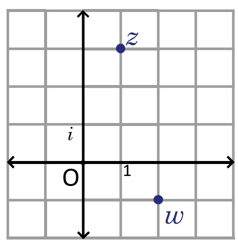
a) z b) w c) $w + z$ d) $w - z$ e) $z - w$

f) $2z$ g) $-w$ h) $\overline{z}$ i) $-\overline{w}$ j) $2w - 3z$

2. Utilizando los números complejos graficados en la figura, representa los siguientes números complejos.

a) $w + z$ b) $w - z$ c) $z - w$

d) $-w$ e) $-\overline{z}$ f) $2w - z$



Unidad 7

Indicador de logro:

3.2 Representa las operaciones básicas con números complejos en el plano complejo.

Secuencia:

La representación de números complejos de la clase anterior es válida para sus operaciones, por lo que se establece que la suma y resta de números complejos equivale a la suma y resta de vectores por sus coordenadas, respectivamente.

Propósito:

En el Problema inicial se representan los resultados de las operaciones realizadas con números complejos. En la Conclusión se establecen las operaciones de números complejos por su representación, operando coordenadas.

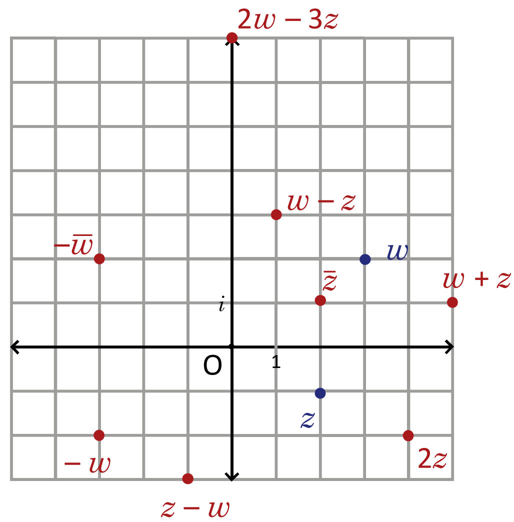
Solución de problemas:

1a) $z = 2 - i$ **1b)** $w = 3 + 2i$ **1c)** $w + z = 5 + i$

1d) $w - z = 1 + 3i$ **1e)** $z - w = -1 - 3i$ **1f)** $2z = 4 - 2i$

1g) $-w = -3 - 2i$ **1h)** $\bar{z} = 2 + i$ **1i)** $-\overline{w} = -3 + 2i$

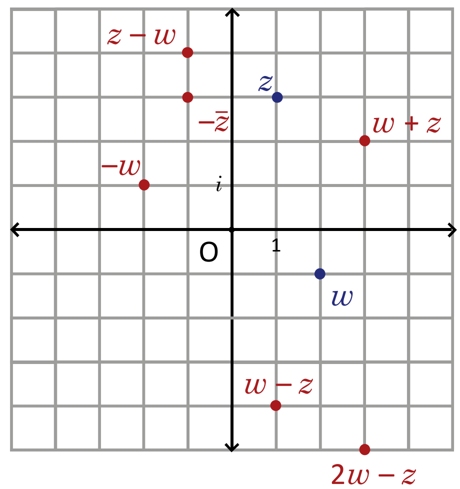
1j) $2w - 3z = 7i$



2. $z = 1 + 3i$, $w = 2 - i$

2a) $w + z = 3 + 2i$ **2b)** $w - z = 1 - 4i$ **2c)** $z - w = -1 + 4i$

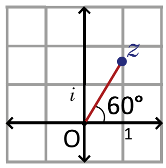
2d) $-w = -2 + i$ **2e)** $-\bar{z} = -1 + 3i$ **2f)** $2w - z = 3 - 5i$



3.3 Forma trigonométrica de los números complejos*

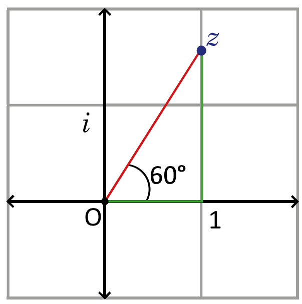
Problema inicial

Utiliza razones trigonométricas para expresar el número complejo representado por el punto cuyo módulo es 2 y el ángulo medido desde el eje real al segmento Oz es 60°.



Solución

Un número complejo z representado por el vector del plano, debe ser expresado en la forma $z = a + bi$ donde a es la coordenada del vector en x, y b es la coordenada del vector en y.



De la definición de seno y coseno se tiene que:

$\cos 60° = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{sen} 60° = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{2}$

Luego, $a = 2 \cos 60°$ y $b = 2 \operatorname{sen} 60°$.

Por lo tanto, el número complejo representado por este vector es $2\cos 60° + (2\operatorname{sen} 60°)i$, que puede ser expresado por:

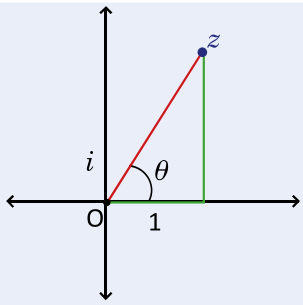
$$z = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = 1 + \sqrt{3}i.$$

Conclusión

El ángulo formado entre el eje real y el segmento Oz, tal que z es un número complejo, se conoce como **argumento** del número complejo, y se representa por arg(z). Si θ es argumento de z, entonces todos los ángulos de la forma $\theta + 360°n$ son argumento del mismo número complejo z.

Para un número complejo z con módulo $|z|$ y argumento θ, se cumple que:

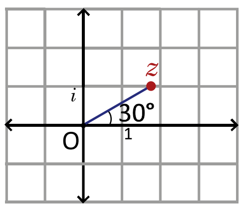
$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$



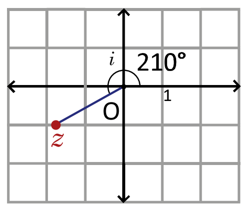
Problemas

1. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo y cuyo módulo es el que se indica.

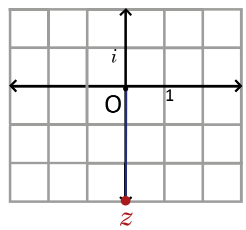
a) $|z| = 2$



b) $|z| = 2$



c) $|z| = 3$



2. Determina el número complejo z si su módulo y argumento es el que se indica en cada literal.

a) $|z| = 2, \theta = 45°$ $\qquad$ b) $|z| = 3, \theta = 30°$ $\qquad$ c) $|z| = 1, \theta = 135°$ $\qquad$ d) $|z| = 2, \theta = 150°$

Indicador de logro:

3.3 Expresa un número complejo en su forma trigonométrica utilizando su módulo y su argumento.

Secuencia:

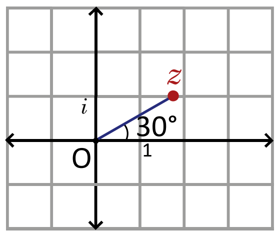
El estudiante debe recordar las razones seno y coseno para introducir en esta clase la representación trigonométrica de un número complejo dado. Otras propiedades como coseno y seno de la suma de ángulos también serán útiles.

Propósito:

En el Problema inicial el estudiante escribe el número complejo a partir de la norma y el argumento. En el Ejemplo y los Problemas se utilizan ángulos notables, por lo que en las respuestas deben dejar indicadas las raíces cuadradas y fracciones.

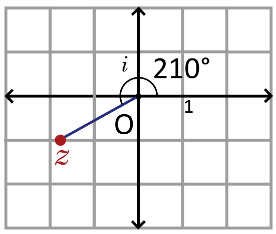
Solución de problemas:

1a) $|z| = 2$



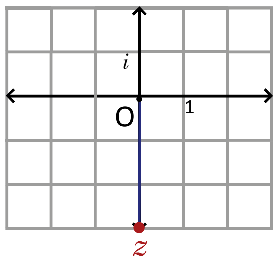
$z = 2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$
$= \sqrt{3} + i$

1b) $|z| = 2$



$z = 2(\cos 210° + i \text{ sen } 210°)$
$= -\sqrt{3} - i$

1c) $|z| = 3$



$z = 3(\cos 270° + i \text{ sen } 270°)$
$= -3i$

2a) $|z| = 2, \theta = 45°$

$z = 2(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$
$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

2b) $|z| = 3, \theta = 30°$

$z = 3(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$
$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$
$= \sqrt{3} + i$

2c) $|z| = 1, \theta = 135°$

$z = 1(\cos 135° + i \text{ sen } 135°)$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

2d) $|z| = 2, \theta = 150°$

$z = 2(\cos 150° + i \text{ sen } 150°)$
$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$
$= -\sqrt{3} + i$

3.4 Multiplicación de números complejos en su forma trigonométrica

Problema inicial

Considerando dos números complejos $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, y $w = |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$, determina zw.

Solución

$$zw = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \times |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$
$$= |z|\,|w|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$
$$= |z|\,|w|[(\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i\,(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)]$$
$$= |z|\,|w|[\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)] \quad \text{(aplicando el teorema de adición).}$$

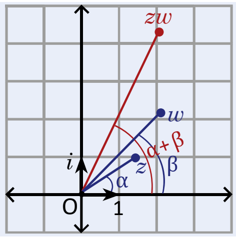
El teorema de adición es:
$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

El número complejo que resulta tiene como módulo la multiplicación de los módulos, y su argumento es igual a la suma de los argumentos de los dos complejos.

Conclusión

En la multiplicación de dos números complejos $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ y $w = |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ se cumple que el número complejo resultante tiene como módulo la multiplicación de los módulos y el argumento es la suma de los argumentos de los números multiplicados.

$$zw = |z|\,|w|[\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)]$$



Ejemplo

Realiza la multiplicación zw si $z = 2(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$ y $w = 3(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$.

$$zw = 2(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°) \times 3(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$$
$$= 2 \times 3\,[\cos(20° + 10°) + i \operatorname{sen}(20° + 10°)]$$
$$= 6(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$$
$$= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$= 3\sqrt{3} + 3i$$

Problemas

1. Determina el producto zw para cada literal.

   a) $z = \cos 14° + i \operatorname{sen} 14°$ y $w = 2(\cos 16° + i \operatorname{sen} 16°)$

   b) $z = 2(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$ y $w = 5(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$

   c) $z = 3(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)$ y $w = 4(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)$

   d) $z = 6(\cos 110° + i \operatorname{sen} 110°)$ y $w = \cos 160° + i \operatorname{sen} 160°$

   e) $z = 2(\cos 208° + i \operatorname{sen} 208°)$ y $w = 2(\cos 107° + i \operatorname{sen} 107°)$

   f) $z = 3(\cos 140° + i \operatorname{sen} 40°)$ y $w = 2(-\cos 170° + i \operatorname{sen} 10°)$

   g) $z = 5(\cos 170° + i \operatorname{sen} 10°)$ y $w = 3(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°)$

2. Grafica los números z, w y zw, para cada uno de los literales anteriores.

Indicador de logro:

3.4 Determina el producto de dos números complejos utilizando su forma trigonométrica.

Secuencia:

En la Unidad 6 se estudiaron el coseno y el seno de una suma de ángulos, estas fórmulas se utilizarán para explicar la propiedad del producto de número complejos utilizando su forma trigonométrica.

Propósito:

En la Conclusión se observa la representación del producto de números complejos, tal figura es útil en la resolución de problemas para ubicar la posición del resultado y constatar con la respuesta.

Solución de problemas:

1a) $zw = (\cos 14° + i \text{ sen } 14°) \times 2(\cos 16° + i \text{ sen } 16°)$

$= 1 \times 2\,[\cos (14° + 16°) + i \text{ sen } (14° + 16°)]$

$= 2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$

$= \sqrt{3} + i$

1b) $zw = 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°) \times 5(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$

$= 2 \times 5\,[\cos (40° + 20°) + i \text{ sen } (40° + 20°)]$

$= 10(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$

$= 10\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 5 + 5\sqrt{3}i$

1c) $zw = -6\sqrt{3} + 6i$

1d) $zw = -6i$

1e) $zw = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

1f) $\text{sen } 40° = \text{sen } (180° - 40°) = \text{sen } 140°$

$-\cos 170° = \cos (180° - 170°) = \cos 10°$

$zw = 3(\cos 140° + i \text{ sen } 140°) \times 2(\cos 10° + i \text{ sen } 10°)$

$= 6(\cos 150° + i \text{ sen } 150°)$

$= 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$

$= -3\sqrt{3} + 3i$

1g) $\text{sen } 10° = \text{sen } (180° - 10°) = \text{sen } 170°$

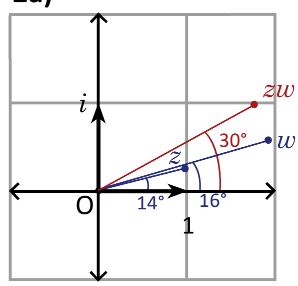
$zw = 5(\cos 170° + i\text{sen } 170°) \times 3(\cos 70° + i\text{sen } 70°)$

$= 15(\cos 240° + i \text{ sen } 240°)$

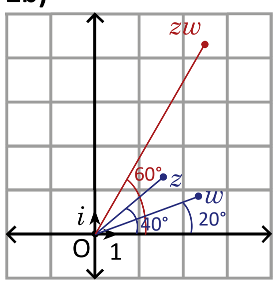
$= 15\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -\frac{15}{2} - \frac{15\sqrt{3}}{2}i$

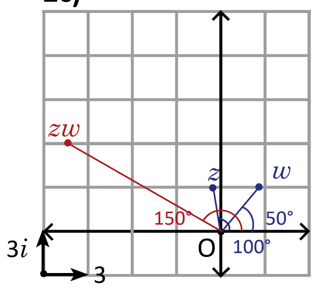
2a)



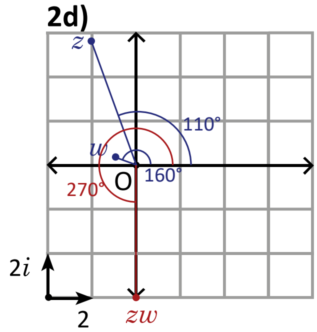
2b)



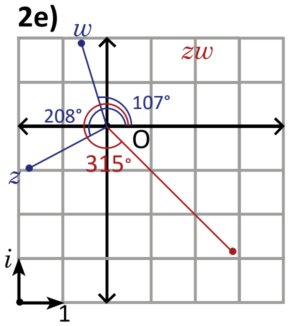
2c)



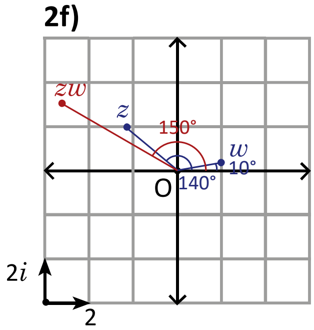
2d)



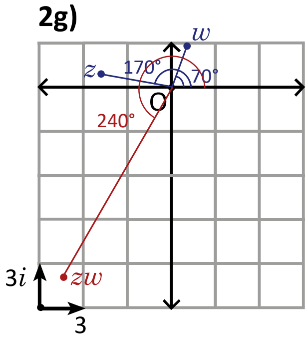
2e)



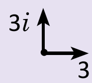
2f)



2g)



En cada gráfica se ha indicado la escala utilizada por medio de la representación:



3.5 División de números complejos en su forma trigonométrica

Problema inicial

Considerando w = 2(cos 40° + i sen 40°). Determina el valor de z que cumple que zw = 6(cos 60° + i sen 60°).

Solución

Tomando $z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, entonces:

$$zw = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta) \times 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$$
$$= 2|z|[\cos(40° + \theta) + i \text{ sen}(40° + \theta)],$$

además se sabe que zw = 6(cos 60° + i sen 60°),

luego:
$$2|z| = 6$$
$$40° + \theta = 60° + 360°n \text{ con } n \text{ un número entero.}$$

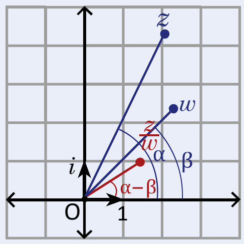
Por lo tanto, $z = \frac{6}{2}[\cos(60° - 40°) + i \text{ sen}(60° - 40°)] = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$.

Conclusión

En la división de 2 números complejos $z = |z|(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)$, y $w = |w|(\cos\beta + i \text{ sen } \beta)$ se cumple que el número complejo resultante tiene como módulo la división de los módulos y el argumento es igual al argumento del dividendo menos el argumento del divisor.

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}[\cos(\alpha - \beta) + i \text{ sen}(\alpha - \beta)]$$

Como caso especial, se tiene que $\frac{1}{w} = \frac{1}{|w|}[\cos(-\beta) + i \text{ sen}(-\beta)]$.



Ejemplo

Realiza la división $\frac{z}{w}$ si z = 4(cos 50° + i sen 50°) y w = cos 20° + i sen 20°.

$$\frac{z}{w} = 4(\cos 50° + i \text{ sen } 50°) \div (\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$$
$$= \frac{4}{1}[\cos(50° - 20°) + i \text{ sen}(50° - 20°)]$$
$$= 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$$
$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2}i$$
$$= 2\sqrt{3} + 2i$$

Problemas

1. Determina el cociente $\frac{z}{w}$ para cada literal.

   a) z = cos 42° + i sen 42° y w = 2(cos 12° + i sen 12°)

   b) z = 10(cos 40° + i sen 40°) y w = 2[cos (–20°) + i sen (–20°)]

   c) z = 5(cos 110° + i sen 110°) y w = cos 170° + i sen 170°

   d) z = 1 y w = cos 60° + i sen 60°

   e) z = 3(cos 207° + i sen 207°) y w = 3(cos 117° + i sen 117°)

   f) z = 3(cos 110° + i sen 70°) y w = 2(cos 20° + i sen 20°)

   g) z = 6(–cos 10° + i sen 10°) y w = 2(cos 80° + i sen 80°)

2. Grafica los números z, w y $\frac{z}{w}$, para cada uno de los literales anteriores.

Indicador de logro:

3.5 Determina el cociente de dos números complejos utilizando su forma trigonométrica.

Secuencia:

Se ha visto la suma, resta y producto de números complejos, en esta clase se estudia la división, en la que las operaciones realizadas son el cociente de las normas y la diferencia de los argumentos, que son números reales.

Propósito:

En el Problema inicial se deduce la forma de la división de números complejos a partir del producto. En los Problemas en los literales f y g será necesario utilizar otras identidades trigonométricas para determinar el argumento del complejo.

Solución de problemas:

1a) $\frac{z}{w} = (\cos 42° + i \text{ sen } 42°) \div 2(\cos 12° + i \text{ sen } 12°)$

$= \frac{1}{2}[\cos (42° - 12°) + i \text{ sen } (42° - 12°)]$

$= \frac{1}{2}(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

1b) $\frac{z}{w} = 10(\cos 40° + i \text{ sen } 40°) \div 2(\cos (-20°) + i \text{ sen } (-20°)$

$= \frac{10}{2}[\cos (40° - (-20°)) + i \text{ sen } (40° - (-20°)]$

$= 5(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$

$= 5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

1c) $\frac{z}{w} = 5\ [\cos (-60)° + i \text{ sen } (-60)°] = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$ **1d)** $\frac{z}{w} = \frac{1}{w} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **1e)** $\frac{z}{w} = \cos 90° + i \text{ sen } 90° = i$

1f) $\text{sen } 70° = \text{sen } (180° - 70°) = \text{sen } 110°$

$\frac{z}{w} = 3(\cos 110° + i \text{ sen } 110°) \div 2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$

$= \frac{3}{2}(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$

$= \frac{3}{2}i$

1g) $-\cos 10° = \cos (180° - 10°) = \cos 170°$

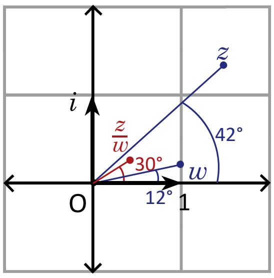
$\text{sen } 10° = \text{sen } (180° - 10°) = \text{sen } 170°$

$\frac{z}{w} = 6(\cos 170° + i \text{ sen } 170°) \div 2(\cos 80° + i \text{ sen } 80°)$

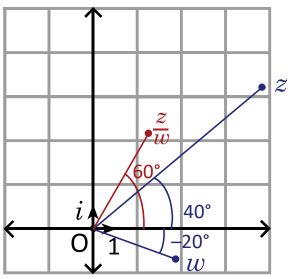
$= \frac{6}{2}(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$

$= 3i$

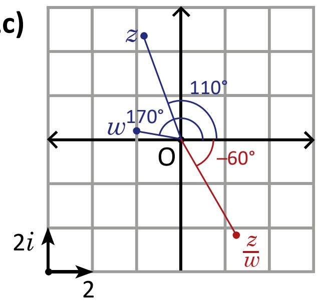
2a)



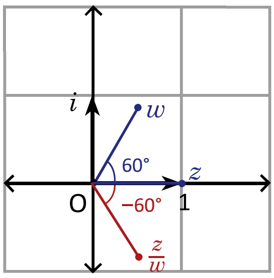
2b)



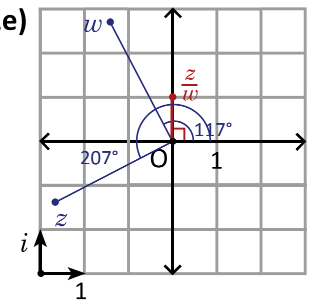
2c)



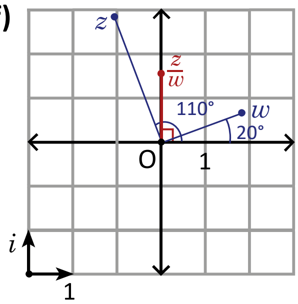
2d)



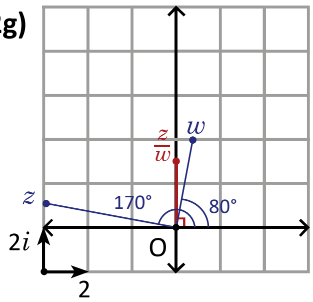
2e)



2f)



2g)



Lección 3

3.6 Fórmula de Moivre

Problema inicial

Considerando $z = 2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)$ determina z^2 y z^{-2}.

Se define $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n$.

Solución

$$\begin{aligned} z^2 &= [2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)][2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)] \\ &= 2^2[\cos(15° + 15°) + i \text{ sen}(15° + 15°)] \\ &= 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°) \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{-2} &= \left(\frac{1}{z}\right)^2 \\ &= \left\{\frac{1}{2}[\cos(-15°) + i \text{ sen } (-15°)]\right\}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2[\cos(-15° - 15°) + i \text{ sen}(-15° - 15°)] \\ &= \frac{1}{4}[\cos(-30°) + i \text{ sen } (-30°)] \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt{3} - i}{8} \end{aligned}$$

En general

Se cumple que dado un número complejo $z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$:

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \text{ sen } 2\theta).$$

Se define $z^0 = 1$.

Y para un número entero n se cumple que:

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta).$$

Esta expresión para la potencia n-ésima de un número complejo se conoce como **fórmula de Moivre**.

Ejemplo

Encuentra el valor (o valores) del número complejo z que hace cierta la igualdad $z^3 = 1$.

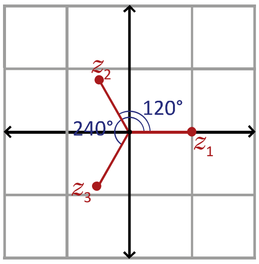
Considerando $z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$ con $0° \leq \theta < 360°$,
entonces $z^3 = |z|^3(\cos 3\theta + i \text{ sen } 3\theta) = 1(\cos 0° + i \text{ sen } 0°)$.

De lo cual se deduce que $|z|^3 = 1$, y por lo tanto $|z| = 1$.

Además como $3\theta = 360° \times n$ (n: número entero) y $0° \leq \theta < 360°$, $3\theta = 0°$, $3\theta = 360°$ o $3\theta = 720°$, de lo cual se tendrá que $\theta = 0°$, $\theta = 120°$ o $\theta = 240°$.

Por lo tanto, los valores de z que cumplen que $z^3 = 1$ son $z_1 = \cos 0° + i \text{ sen } 0°$, $z_2 = \cos 120° + i \text{ sen } 120°$, $z_3 = \cos 240° + i \text{ sen } 240°$; que se pueden expresar como:

$$z_1 = 1,\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$



Observa que el triángulo que forman z_1, z_2 y z_3 es un triángulo equilátero. Puedes comprobarlo calculando las longitudes de los lados de este.

Problemas

1. Para el número complejo $z = 2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)$. Determina:

   a) z^2 b) z^3 c) z^4 d) z^6 e) z^8

2. Para el número complejo $w = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$, determina w^{-3}.
3. Encuentra el valor (o valores) del número complejo z que hace cierta la igualdad $z^4 = 1$.
4. Encuentra el valor (o valores) del número complejo w que hace cierta la igualdad $w^6 = 1$.

Unidad 7

Indicador de logro:

3.6 Calcula el resultado de elevar un número complejo a una potencia utilizando la fórmula de Moivre.

Secuencia:

Se estudia la potencia de un número complejo. Los estudiantes deben recordar las razones trigonométricas de los ángulos notables así como de los ángulos sobre los ejes.

Propósito:

En la Solución se utilizará la regla del producto de números complejos para determinar las potencias dadas. En los Problemas no es necesario desarrollar las potencias mayores a 3.

Solución de problemas:

1a) $z^2 = 2^2[\cos(2 \times 15°) + i \text{ sen}(2 \times 15°)]$
$= 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$
$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$
$= 2\sqrt{3} + 2i$

1b) $z^3 = 2^3[\cos(3 \times 15°) + i \text{ sen}(3 \times 15°)]$
$= 8(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$
$= 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

1c) $z^4 = 2^4[\cos(4 \times 15°) + i \text{ sen}(4 \times 15°)]$
$= 16(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$
$= 16\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= 8 + 8\sqrt{3}i$

1d) $z^6 = 2^6[\cos(6 \times 15°) + i \text{ sen}(6 \times 15°)]$
$= 64(\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$
$= 64i$

1e) $z^8 = 2^8[\cos(8 \times 15°) + i \text{ sen}(8 \times 15°)]$
$= 256(\cos 120° + i \text{ sen } 120°)$
$= 256\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= -128 + 128\sqrt{3}i$

2. $w^{-3} = 3^{-3}[\cos(-3 \times 20°) + i \text{ sen}(-3 \times 20°)]$
$= \frac{1}{27}[\cos(-60°) + i \text{ sen}(-60°)]$
$= \frac{1}{27}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= \frac{1}{54} - \frac{\sqrt{3}}{54}i$

3. Sea $z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$ con $0° \leq \theta < 360°$,
$\Rightarrow z^4 = |z|^4(\cos 4\theta + i \text{ sen } 4\theta) = 1(\cos 0° + i \text{ sen } 0°)$.
Luego $4\theta = 360° \times n \Rightarrow \theta = 90° \times n$, con $0° \leq \theta < 360°$ y $|z|^4 = 1$,
para $n = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \theta = 0°, \theta = 90°, \theta = 180°$ o $\theta = 270°$ y $|z| = 1$
$\Rightarrow z_1 = \cos 0° + i \text{ sen } 0°, z_2 = \cos 90° + i \text{ sen } 90°, z_3 = \cos 180° + i \text{ sen } 180°, z_4 = \cos 270° + i \text{ sen } 270°$,
$\Rightarrow z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i$.

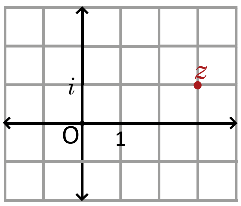
4. Se encuentra el valor (o valores) del número complejo w que hace cierta la igualdad $w^6 = 1$.
$\Rightarrow w^6 = |w|^6(\cos 6\theta + i \text{ sen } 6\theta) = 1(\cos 0° + i \text{ sen } 0°)$.
Luego $6\theta = 360° \times n \Rightarrow \theta = 60° \times n$, con $0° \leq \theta < 360°$ y $|w|^6 = 1$,
para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow \theta = 0°, \theta = 60°, \theta = 120°, \theta = 180°, \theta = 240°, \theta = 300°$ y $|w| = 1$,
$\Rightarrow w_1 = \cos 0° + i \text{ sen } 0°, w_2 = \cos 60° + i \text{ sen } 60°, w_3 = \cos 120° + i \text{ sen } 120°, w_4 = \cos 180° + i \text{ sen } 180°$,
$w_5 = \cos 240° + i \text{ sen } 240°$ o $w_6 = \cos 300° + i \text{ sen } 300°$
$\Rightarrow w_1 = 1, w_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, w_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, w_4 = -1, w_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ o $w_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

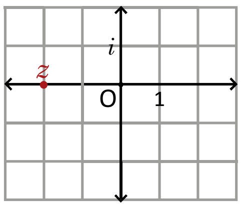
3.7 Practica lo aprendido

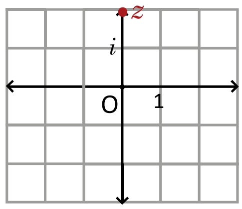
1. Representa los siguientes números complejos en el plano complejo y determina su módulo.

a) $z = -1 + 3i$ b) $z = -2i$ c) $z = -3$

2. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

a) 

b) 

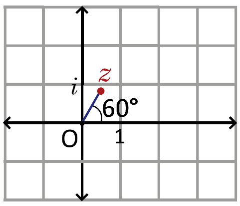
c) 

3. Considerando los números complejos $z = 1 - 2i$ y $w = -2 + 2i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

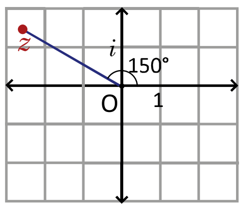
a) $z + w$ b) $w - z$ c) $z - w$ d) $-3z$ e) $\overline{w}$ f) $-w + 2z$

4. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

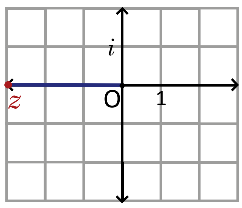
a) $|z| = 1$



b) $|z| = 3$



c) $|z| = 3$



5. Determina el número complejo que tiene módulo y argumento que indica cada literal.

a) $|z| = 4$, $\theta = 60°$ b) $|z| = 1$, $\theta = 45°$ c) $|z| = 2$, $\theta = 300°$ d) $|z| = 3$, $\theta = 180°$

6. Determina el producto zw para cada literal.

a) $z = 3(\cos 23° + i\,\text{sen}\, 23°)$ y $w = 4(\cos 37° + i\,\text{sen}\, 37°)$
b) $z = 2(\cos 41° + i\,\text{sen}\, 41°)$ y $w = 5[\cos(-11°) + i\,\text{sen}(-11°)]$
c) $z = 3(\cos 200° - i\,\text{sen}\, 160°)$ y $w = 2(\cos 20° - i\,\text{sen}\, 20°)$

7. Para el número complejo $z = \cos 10° + i\,\text{sen}\, 10°$. Determina:

a) z^3 b) z^6 c) z^9

8. Para el número complejo $w = 2(\cos 9° + i\,\text{sen}\, 9°)$. Determina w^{-5}.

9. Determina el cociente $\frac{z}{w}$ para cada literal:

a) $z = \cos 25° + i\,\text{sen}\, 25°$ y $w = 3[\cos(-35°) + i\,\text{sen}(-35°)]$
b) $z = 6(\cos 21° + i\,\text{sen}\, 21°)$ y $w = 3(\cos 9° - i\,\text{sen}\, 9°)$
c) $z = 2(\cos 115° + i\,\text{sen}\, 65°)$ y $w = 2(\cos 5° - i\,\text{sen}\, 5°)$

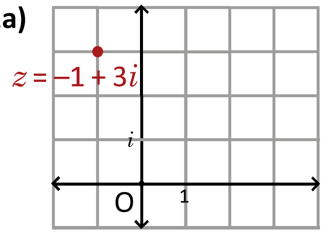
198

Indicador de logro:

3.7 Resuelve problemas correspondientes a números complejos.

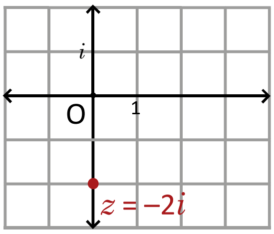
Solución de problemas:

1a)



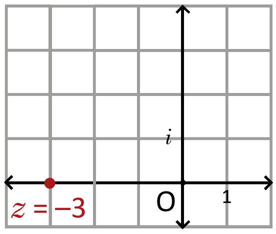
$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

1b)



$|z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

1c)



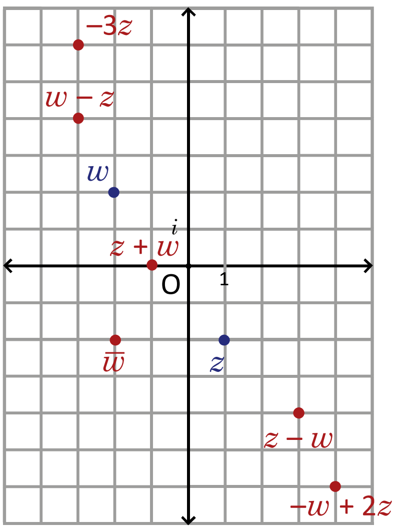
$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$

2a) $z = 3 + i$

2b) $z = -2$

2c) $z = 2i$

3. $z = 1 - 2i$ y $w = -2 + 2i$



4a) $z = \cos 60° + i \text{ sen } 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4b) $z = 3(\cos 150° + i \text{ sen } 150°) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

4c) $z = 3(\cos 180° + i \text{ sen } 180°) = -3$

5a) $z = 4(\cos 60° + i \text{ sen } 60°) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

5b) $z = \cos 45° + i \text{ sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

5c) $z = 2(\cos 300° + i \text{ sen } 300°) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$

5d) $|z| = 3\,(\cos 180° + i \text{ sen } 180°) = -3$

6a) $z = 3(\cos 23° + i \text{ sen } 23°)$

$w = 4(\cos 37° + i\text{sen } 37°)$

$zw = 3 \times 4(\cos 60° + i \text{ sen } 60°$

$= 12\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 6 + 6\sqrt{3}\,i$

6b) $z = 2(\cos 41° + i \text{ sen } 41°)$

$w = 5[\cos(-11°) + i\text{sen}(-11°)]$

$zw = 2 \times 5(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$

$= 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$

$= 5\sqrt{3} + 5i$

6c) $z = 3(\cos 200° + i \text{ sen } 200°)$

$w = 2(\cos(-20°)) + i\text{sen}(-20°)$

$zw = 3 \times 2(\cos 180° + i \text{ sen } 180°)$

$= 6(-1)$

$= -6$

7a) $z^3 = \cos 30° + i \text{ sen } 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ **7b)** $z^6 = \cos 60° + i \text{ sen } 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **7c)** $z^9 = \cos 90° + i \text{ sen } 90° = i$

8. $w = 2(\cos 9° + i\text{sen } 9°) \Rightarrow w^{-5} = 2^{-5}(\cos(-45°) + i\text{sen }(-45°)) = \frac{1}{32}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{64} - \frac{\sqrt{2}}{64}i.$

9a) $\frac{z}{w} = (\cos 25° + i\text{sen } 25°) \div 3[\cos(-35°) + i\text{sen}(-35°)] \;\; = \frac{1}{3}[\cos(25° - (-35°)) + i \text{ sen }(25° - (-35°))]$

$= \frac{1}{3}(\cos 60° + i \text{ sen } 60°) \;\; = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$

9b) $\frac{z}{w} = 6(\cos 21° + i\text{sen } 21°) \div 3[\cos(-9°) + i\text{sen}(-9°)] = \frac{6}{3}(\cos 30° + i \text{ sen } 30°) \;\; = \sqrt{3} + i$

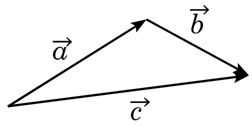
9c) $\frac{z}{w} = 2(\cos 115° + i\text{sen } 115°) \div 2[\cos(-5°) + i\text{sen}(-5°)] \; = \frac{2}{2}(\cos 120° + i \text{ sen } 120°) \;\; = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3.8 Problemas de la unidad

En los problemas del 1 al 4, determina la respuesta correcta.

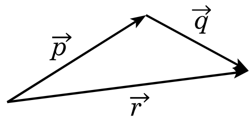
1. El vector que resulta de sumar los vectores $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ es:

   a) $2\vec{a}$ b) $2\vec{b}$ c) $\vec{0}$ d) $2\vec{c}$ e) $-2\vec{c}$



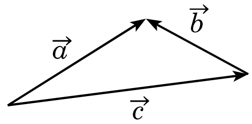
2. El vector que resulta de la operación $\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$ es:

   a) $2\vec{p}$ b) $2\vec{r}$ c) $\vec{0}$ d) $2\vec{q}$ e) $-2\vec{r}$



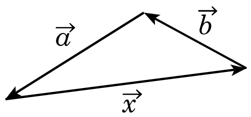
3. La norma del vector $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ si $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$ y $\|\vec{c}\| = 4$ es:

   a) 2 b) 4 c) 6 d) 9 e) 0



4. Determina la expresión con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuyo resultado sea el vector $\vec{x}$.

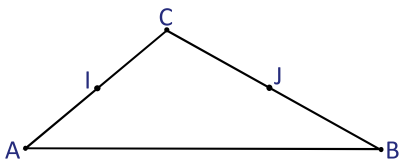
   a) $2\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} + \vec{b}$ c) $-(\vec{a} + \vec{b})$ d) $\vec{a} - \vec{b}$



5. Sean los vectores $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (1, 4)$ y $\vec{w} = (5, 6)$, verifica que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base vectorial y escribe las coordenadas de $\vec{w}$ respecto a esta base.

6. Dado el vector $\vec{u} = (2, 6)$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, determina las coordenadas del punto medio del vector $\vec{u}$.

7. Considerando el triángulo ABC, y siendo I el punto medio de AC y J el punto medio de BC, demuestra que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



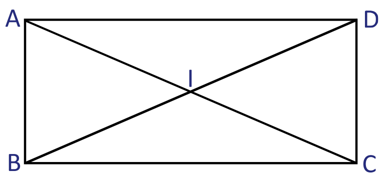
8. Considerando los puntos P y Q que cumplen:

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

Utiliza lo aprendido en la clase 1.3.

   Demuestra que $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{BC}$.

9. Sea ABCD un rectángulo tal que: AB = a y BC = b. Expresa $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DI}$ y $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA}$ con los valores a y b.

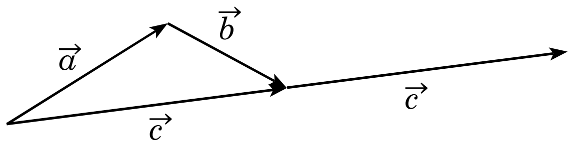


Indicador de logro:

3.8 Resuelve problemas correspondientes a vectores y números complejos

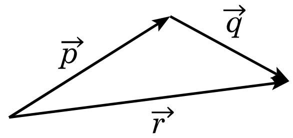
Solución de problemas:

1. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{c}+\vec{c}=2\vec{c}$



Respuesta correcta: d) $2\vec{c}$

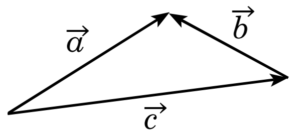
2. $\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}=(\vec{p}+\vec{q})-\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}=\vec{0}$



Respuesta correcta: c) $\vec{0}$

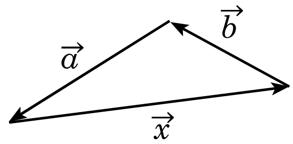
3. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+(\vec{c}+\vec{b})=\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$

$\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|=\|2\vec{a}\|=|2|\,\|\vec{a}\|=2(3)=6$



Respuesta correcta: c) 6

4. $\vec{x}+\vec{b}+\vec{a}=\vec{0}\Rightarrow\vec{x}=-(\vec{a}+\vec{b})$



Respuesta correcta: c) $-(\vec{a}+\vec{b})$

5. $\vec{u}=(2, 1)$, $\vec{v}=(1, 4)$ y $\vec{w}=(5, 6)$

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son distintos de $\vec{0}$.

Si los vectores son paralelos entonces el ángulo entre ellos es 0° o 180°.

$\vec{u}\cdot v=6$, $\|\vec{u}\|=\sqrt{5}$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{17}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\cos\alpha$

$6=\sqrt{5}\,\sqrt{13}\cos\alpha$

$\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{65}}$

Así, $\alpha\neq 0°, 180°$.

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, por lo tanto forman una base vectorial.

Otra forma para verificar que no son paralelos

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos existe un número real r tal que $\vec{u}=r\vec{v}$,

$\Rightarrow (2, 1)=r(1, 4)\Rightarrow(2, 1)=(r, 4r)\Rightarrow 2=r$ y $1=4r$

$\Rightarrow r=2$ y $r=\frac{1}{4}$ lo cual no es posible.

Por lo que no existe un número real r tal que $\vec{u}=r\vec{v}$.

Por lo tanto u y v no son paralelos.

Luego si las coordenadas de $\vec{w}$ en la base $\vec{u}$, $\vec{v}$ son (a, b) entonces $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$

$\Rightarrow (5, 6)=a(2, 1)+b(1, 4)=(2a+b, a+4b)$

$$\Rightarrow\begin{cases}5=2a+b & \text{--------------------} \quad (1)\\ 6=a+4b & \text{--------------------} \quad (2)\end{cases}$$

Despejando b en (1): $b=5-2a$.

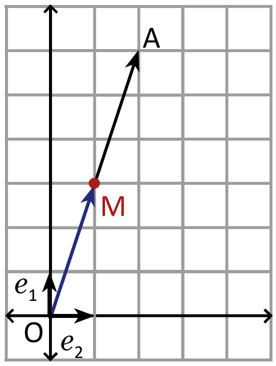
Sustituyendo en (2): $6=a+4(5-2a)\;\Rightarrow 6=-7a+20\;\Rightarrow a=2,\ b=1$.

Por lo tanto, $(a, b)=(2, 1)$.

6. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(2, 6) = \left(\frac{1}{2}(2), \frac{1}{2}(6)\right) = (1, 3)$

Si M es el punto medio del segmento $\overrightarrow{OA}$,

entonces $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = (1, 3)$.



7.

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

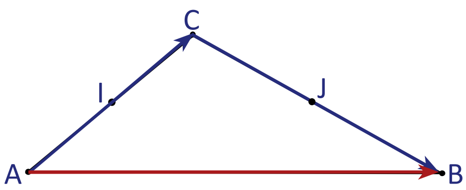
$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IC}$ y $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CJ}$

$2\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AB}$

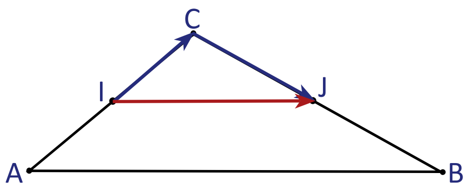
$2(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{AB}$

$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{IJ}$

8. $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AB} + 2AC$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$

$= 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - (2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

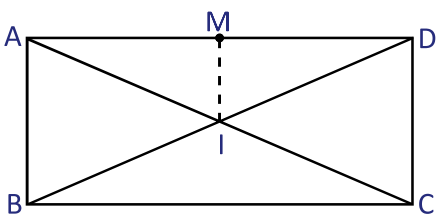
$= \overrightarrow{CB}$

$= -\overrightarrow{BC}$, por lo tanto PQ es paralela a BC.

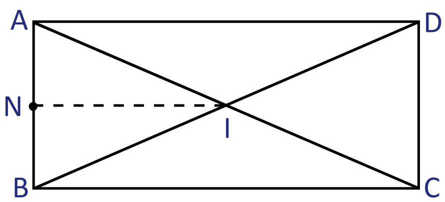
9. $\overrightarrow{AB} = a$ y $\overrightarrow{BC} = b$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$ $\quad$ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = b^2$ $\quad$ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DI} = -(\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DI}) = -(\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DM}) = -\left(\overrightarrow{DA} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\right) = -\frac{1}{2}b^2$

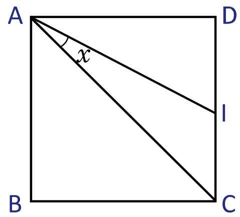


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA} = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}) = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN}) = -\left(\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{2}a^2$



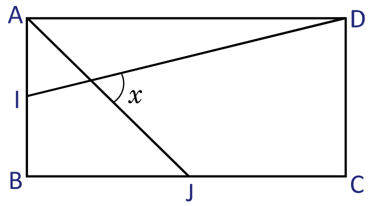
3.9 Problemas de la unidad

1. Considera un cuadrado ABCD de lado 1 y sea I el punto medio de $\overline{CD}$. Determina la medida del ángulo x.



Expresa $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ como suma de vectores que faciliten el cálculo. Utiliza la forma trigonométrica del producto escalar.

2. En la siguiente figura, ABCD es un rectángulo tal que AB = 2 y AD = 4.



a) Determina la longitud de AJ y DI, si J e I son puntos medios de los lados BC y AB respectivamente.

b) Determina la medida del ángulo x.

3. Sea $\vec{u} = (a, b)$ un vector diferente de cero, en una base ortonormal. Demuestra que el vector $\vec{u}$ es ortogonal a los vectores de la forma $(rb, -ra)$ para cualquier número real r diferente de cero.

4. Considerando los vectores $\overrightarrow{OA} = (1, 4)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 2)$ determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{OI}$ si I es el punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$.

5. Determina el resultado de las siguientes operaciones con número complejos.

a) $(i - 1)^8$

b) $(1 + i)^{-8}$

Utiliza la forma trigonométrica de un número complejo.

6. Determina el resultado de las siguientes operaciones con números complejos.

a) $(i - 1)(1 - i)$

b) $\frac{1-i}{1+i}$

Utiliza la forma trigonométrica de un número complejo.

7. Calcula las siguientes cantidades.

a) $|(i + 1)(2 - i)|$

b) $\left|\frac{2-3i}{1+2i}\right|$

c) $|(1 + i)^{20}|$

8. Demuestra que para 2 números complejos z y w se cumple que:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Utiliza $|z|^2 = z\bar{z}$ y que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

Indicador de logro:

3.9 Resuelve problemas correspondientes a vectores y números complejos.

Solución de problemas:

1. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{BC}$

$= 0 + 1 + \frac{1}{2} + 0$

$= \frac{3}{2}$

$\|AI\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad \|AC\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AI}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|\cos x$

$\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{2})\cos x$

$\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$x \approx 18.43°$

2a) $\overrightarrow{AJ} = \sqrt{AB^2 + BJ^2}$

$= \sqrt{2^2 + 2^2}$

$= 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{DI} = \sqrt{DA^2 + IA^2}$

$= \sqrt{4^2 + 1^2}$

$= \sqrt{17}$

2b) $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ})\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AD}$

$= -2 + 0 + 0 + 8$

$= 6$

$\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{ID} = \|\overrightarrow{AJ}\|\,\|\overrightarrow{ID}\|\cos x$

$6 = (2\sqrt{2})(\sqrt{17})\cos x$

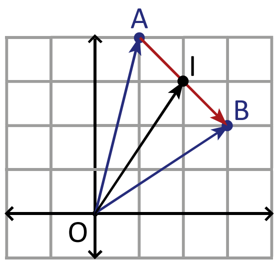
$\cos x = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$x \approx 59.04°$

3. $(a, b)\cdot(rb, -ra) = a(rb) + b(-ra) = arb - arb = 0.$

Por lo tanto $u = (a, b)$ y $(rb, -ra)$ son ortogonales para todo número real r distinto de cero.

4.



$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= (1, 4) + \frac{1}{2}[(3, 2) - (1,4)]$

$= (1,4) + \frac{1}{2}(2, -2)$

$= (1,4) + (1, -1)$

$= (2, 3)$

5a) $(i-1)^8$

$|i-1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow i - 1 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$\Rightarrow i - 1 = \sqrt{2}\,(\cos 135° + i \text{ sen } 135°)$

$\Rightarrow (i-1)^8 = \sqrt{2}^8\,[\cos(8\times 135°) + i \text{ sen}(8\times 135°)]$

$= 16\,(\cos 1\,080° + i \text{ sen } 1\,080°)$

$= 16$

5b) $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$

$(1+i)^{-8} = \sqrt{2}^{-8}\,[\cos(-8\times 45°) + i \text{ sen}(-8\times 45°)] = \frac{1}{16}[\cos(-360°) + i \text{ sen}(-360°)] = \frac{1}{16}$

6a) $(i-1)(1-i) = [\sqrt{2}(\cos 135° + i \text{ sen } 135°)][\sqrt{2}\,(\cos(-45°) + i \text{ sen}(-45°))] = 2(\cos 90° + i \text{ sen } 90°) = 2i$

6b) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}[\cos(-45°) + \text{sen}(-45°)]}{\sqrt{2}(\cos 45° + \text{sen } 45°)} = [\cos(-90°) + i \text{ sen}(-90°)] = -i$

7a) $|(i+1)(2-i)| = |i+1|\,|2-i| = \sqrt{1^2+1^2}\sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{10}$

7b) $\left|\frac{2-3i}{1+2i}\right| = \frac{|2-3i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+(-3)^2}}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{65}}{5}$

7c) $|(1+i)^{20}| = |1+i|^{20} = (\sqrt{1^2+1^2})^{20} = (\sqrt{2})^{20} = 1024$

8. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)(\overline{z}-\overline{w})$

$= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w + w\overline{w}$

$= 2(z\overline{z} + w\overline{w}) = 2(|z|^2 + |w|^2)$

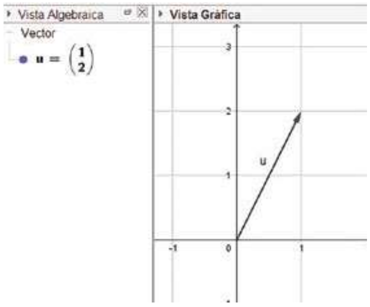
4.1 Práctica en GeoGebra: conceptos básicos sobre vectores

Para esta práctica se utilizarán las herramientas que posee GeoGebra para trabajar con vectores, desde la forma como se representan, hasta las operaciones y aplicaciones que se pueden hacer con estas herramientas para resolver problemas y verificar respuestas. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de Práctica. Luego trabaja en GeoGebra la parte Actividades que está al final de esta práctica.

Práctica

Conceptos de vectores en GeoGebra.

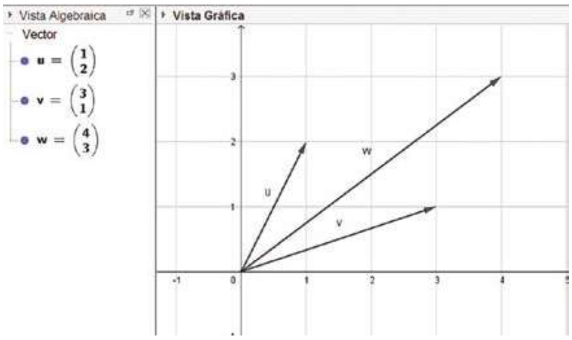
1. Grafica en la referencia ortonormal el vector $\vec{u} = (1, 2)$, digitando en la barra de entrada u = (1, 2). En GeoGebra, si se digita la letra en mayúscula grafica un punto y si se digita en minúscula, grafica un vector.



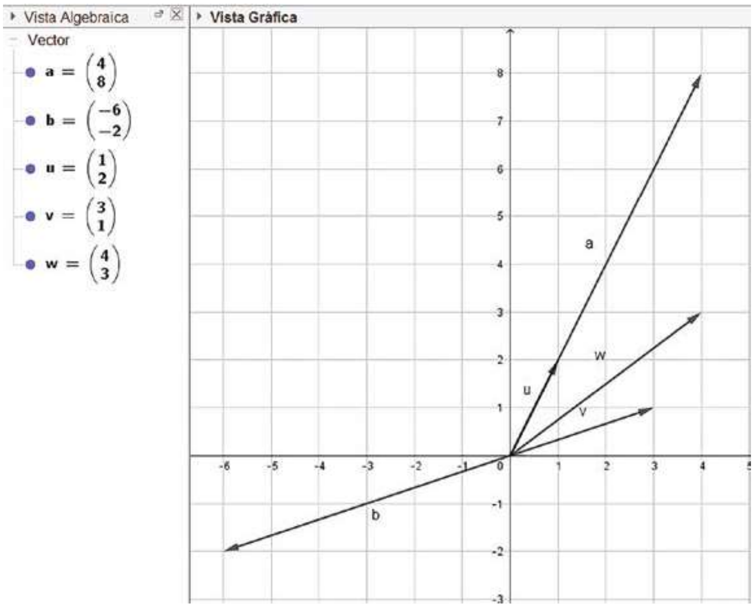
2. Grafica el vector $\vec{v} = (3, 1)$, escribiendo v = (3, 1).

3. Realiza la suma de vectores $\vec{u} + \vec{v}$, para ello digita en la barra de entrada u + v. En la Vista Gráfica se observará el vector resultante y en la Vista Algebraica sus coordenadas.

4. Realiza las operaciones $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} + \vec{u}$, utilizando la barra de entrada, tal como en el numeral 3.



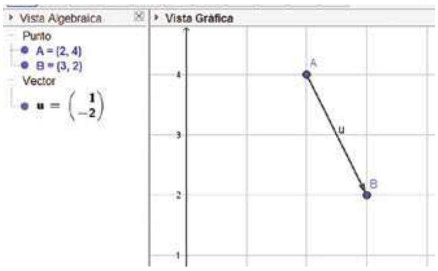
5. También es posible calcular el producto por escalar, por ejemplo, para determinar el vector $4\vec{u}$, se puede escribir en la barra de entrada 4u, o con números negativos, por ejemplo $-2\vec{v}$.



6. Verifica en GeoGebra las respuestas a los problemas planteados, y corrobora si están correctos.

Unidad 7

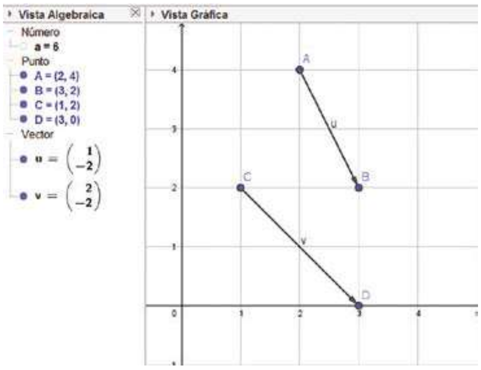
Uso de comandos para vectores en GeoGebra.



1. Grafica dos puntos con coordenadas A = (2, 4) y B = (3, 2). Para representar el vector $\overrightarrow{AB}$, digitar en la barra de entrada el comando vector (A, B).

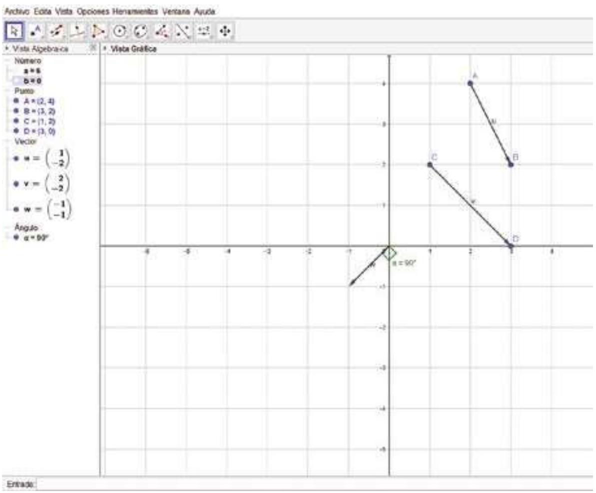
2. Grafica el vector $\overrightarrow{CD}$ con los puntos C = (1, 2) y D = (3,0) utilizando el procedimiento del numeral 1.

3. Es posible calcular el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, digitando "u v" o utilizando el comando ProductoEscalar(u, v) en la barra de entrada. En la Vista Algebraica aparece el valor del producto escalar guardado en la variable a.



4. Grafica el vector $\overrightarrow{w}$ = (–1, –1), y utiliza el comando Ángulo(w, v) el cual dará como resultado el ángulo de los vectores en la Vista Algebraica guardados en una variable α.

5. Del numeral 4 se sabe que los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son perpendiculares, verifica este resultado utilizando el comando de producto escalar en la barra de entrada. Al finalizar se obtendrán los siguientes resultados en GeoGebra.



Actividades

Verifica los resultados de los problemas de la unidad que se pueden constatar con GeoGebra, analiza cada caso y utiliza la herramienta más conveniente. Corrige los problemas que no fueron resueltos correctamente.

Indicador de logro:

4.1 Utiliza un software matemático para representar y efectuar operaciones con vectores.

Secuencia:

Se introduce la representación de vectores en GeoGebra y se trabaja con las operaciones entre estos: suma, resta y producto por escalar.

Propósito:

La práctica permitirá al estudiante comprobar las respuestas de los problemas de la clase 3.8; además, se pueden verificar las respuestas de los problemas desarrollados en otras clases.

Solución de problemas:

Problemas de la clase 3.8:

1. Se dibujan tres puntos A, B y C. Con A y C puntos en el eje x y B un punto por encima del eje x. Se grafican los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Se dibuja el vector $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

2. Se dibujan tres puntos A, B y C. Con A y C puntos en el eje x y B un punto por encima del eje x. Se grafican los vectores $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{q} = \overrightarrow{BC}$ y $\vec{r} = \overrightarrow{AC}$. Se dibuja el vector $\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$.

3. Se dibujan los puntos A(0,0), B(0,4), se construyen dos circunferencias de centro A y B, con radios 3 y 2 respectivamente. Se determina el punto de intersección de estas circunferencias y se renombra C. Se ocultan las circunferencias, además, será necesario renombrar como e la circunferencia c. Se grafican los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Compruebe que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$, $\|\vec{c}\| = 4$ Se dibuja el vector $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ y se calcula su norma escribiendo en la barra de entrada |a + b + c|.

4. Se dibujan tres puntos A, B y C. Con A y C puntos en el eje x y B un punto por encima del eje x. Se grafican los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ y $\vec{x} = \overrightarrow{AC}$. Se dibuja el vector que obtuvo como respuesta.

6. Se grafica el vector $\overrightarrow{OA} = (2, 6)$, luego en la barra de herramientas buscar Punto y seleccionar Punto medio, seleccionar los puntos inicial y final del vector en la vista gráfica, se graficará el punto B, luego se grafica el vector $\overrightarrow{OB}$.

7. Se grafican los puntos A(0, 0) y B(6, 0), se selecciona la opción polígono de la barra de herramientas y se grafica el triángulo ABC. Se localizan los puntos medios de los lados AC y BC, nombrándolos I y J.
Se grafican los vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$, luego se grafica el vector $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Al seleccionar y mover los puntos B y C se puede observar que las coordenadas de los vectores $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$ son las mismas.

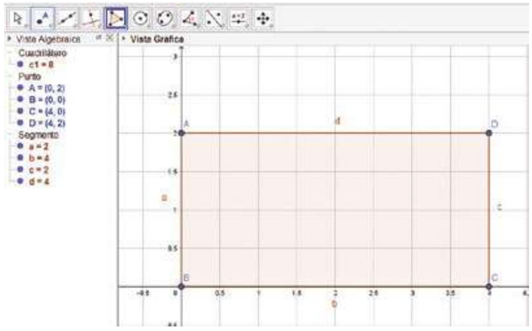
8. Se grafica el punto A(0, 0) y se selecciona otros dos puntos del plano nombrándolos B y C. Se grafican los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, luego graficar los vectores $\vec{p} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ y $\vec{q} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ (que son los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$ respectivamente). Para graficar los puntos finales de los vectores P y Q, se escribe en la barra de entrada P = p y Q = q, luego graficar los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{PQ}$, nombrándolos m y n. Se puede observar que las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son opuestas y, por lo tanto, los vectores son paralelos. Esto último se puede comprobar trazando la recta que pasa por BC y luego la paralela a esta que pasa por P, esta última recta contiene al punto Q.

4.2 Práctica en GeoGebra: resolución de problemas

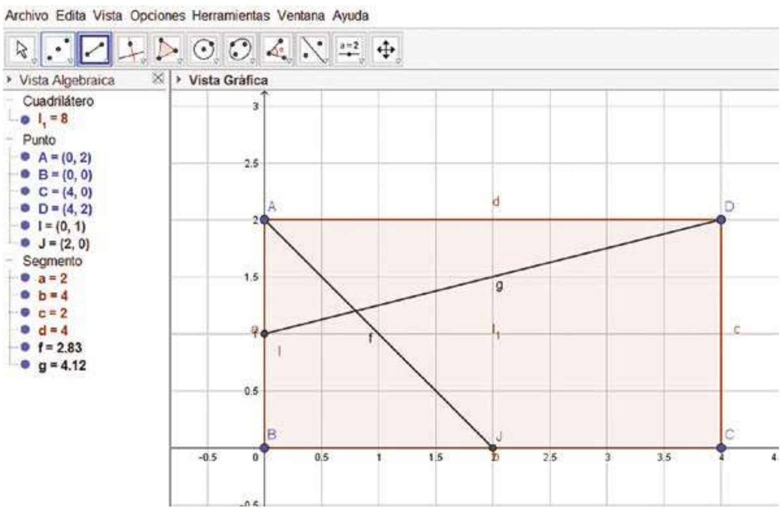
Para esta práctica se utilizarán las herramientas aprendidas en la clase anterior para solucionar algunos problemas de la clase 3.9 de los problemas de la unidad. Para ello, sigue los pasos indicados en la parte de Práctica. Luego trabaja en GeoGebra la parte Actividades que está al final de esta práctica.

Práctica

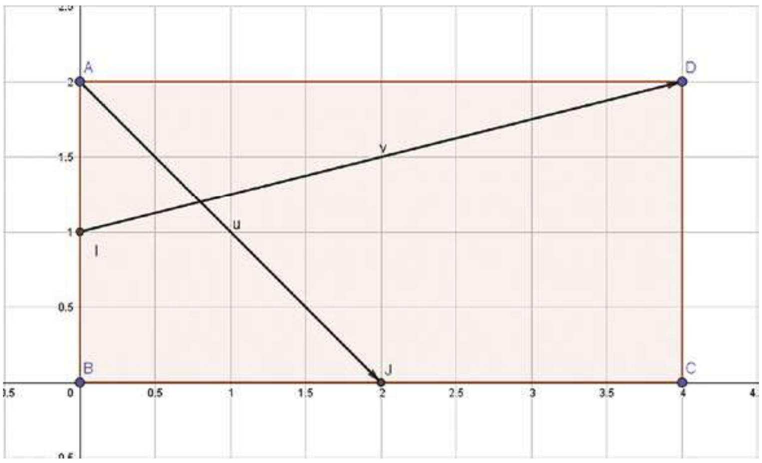
Resolución del problema 2 de la clase 3.9.



1. Grafica los puntos A = (0, 2), B = (0, 0), C = (4, 0) y D = (4, 2), luego utiliza el botón de Polígono y grafica el rectángulo indicado.
2. Luego grafica el punto medio de AB y de BC, utilizando el botón de Punto medio. Traza los segmentos DI y AJ como lo muestra la figura de abajo.

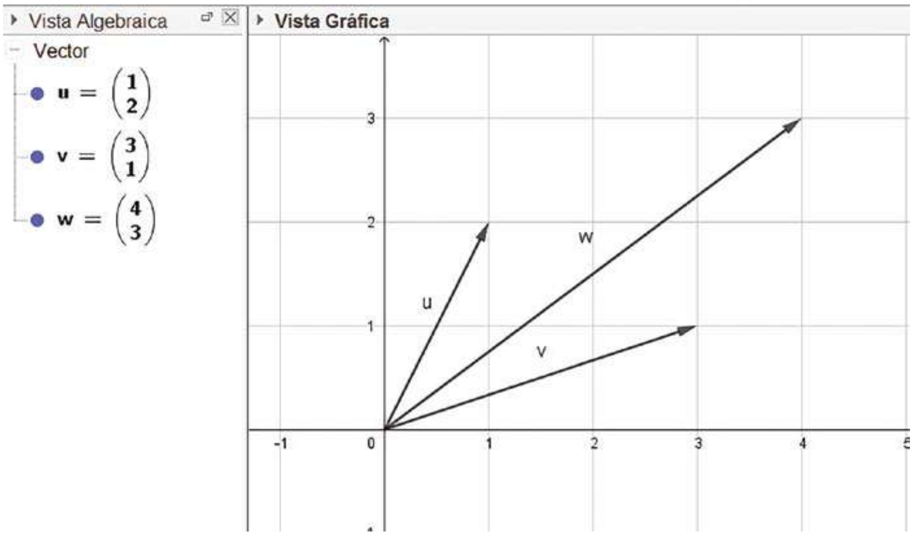


3. Utilizando los comandos para determinar el vector comprendido entre dos puntos, grafica los vectores $\overrightarrow{AJ}$ y $\overrightarrow{ID}$.



4. Utilizando el comando Ángulo(u, v) calcula el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

5. Para verificar la medida de este ángulo, grafica el punto que se encuentra en la intersección de los segmentos AJ e ID, y utiliza la opción de medir ángulo, para medir el ángulo JED. Verifica que ambos ángulos tienen igual medida.

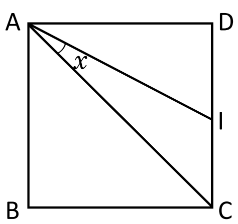


6. Finalmente puedes corroborar si fue resuelto correctamente el problema, contrastando tu respuesta de tu cuaderno.

Actividades

- Realiza una construcción que permita resolver el problema 1, 3 y 4 de la clase 3.9 sobre problemas de la unidad, luego verifica que lo resolviste correctamente comparando tu respuesta con la obtenida en GeoGebra.

- Considerando un cuadrado ABCD de lado 1, siendo I el punto medio de BC. Determina la medida del ángulo x.



- Sea $\vec{u} = (a, b)$ un vector diferente de cero, en una base ortonormal. Demuestra que el vector $\vec{u}$ es ortogonal a los vectores de la forma $(rb, -ra)$ para cualquier número real r diferente de cero.

- Considerando los vectores $\overrightarrow{OA} = (1, 4)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 2)$ determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{OI}$ si I es el punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$.

Descripción de la prueba:

4.2 Utiliza un software matemático para resolver problemas con vectores.

Secuencia:

Continuando con la resolución de problemas; se desarrolla el problema 2 de la clase 3.9 como ejemplo.

Propósito:

En esta clase se comprobarán mediante el uso de las herramientas de GeoGebra los problemas de la clase 3.9.

Solución de problemas:

1. Se grafican los puntos A(0, 0) y B(1, 0) y se utiliza la herramienta Polígono regular para graficar el cuadrado ABCD, seleccionando los puntos A y B y construyendo el polígono de 4 lados. Trazar el punto medio I y los segmentos AI y AC. Dibujar el ángulo CAI.

3. Construir un deslizador con nombre r, bastará colocar en mínimo –10 y 10 en máximo con incremento 0.1. Dibujar el vector (3, 2) y luego el vector (2r, -3r). Dibujar el ángulo entre los vectores seleccionando en la barra de herramientas Ángulo y luego dé clic sobre los dos vectores. Inicie animación y observe el valor del ángulo entre los vectores. Para visualizar un ángulo entre 0° y 180°, puede buscar en las propiedades de ángulo la opción básico y selección Ángulo entre 0° y 180°.

4. Graficar los vectores $\vec{u} = (1, 4)$, $\vec{v} = (3,2)$. Graficar los puntos A = (1, 4) y B = (3,2). Luego determine el punto medio de $\overrightarrow{AB}$.