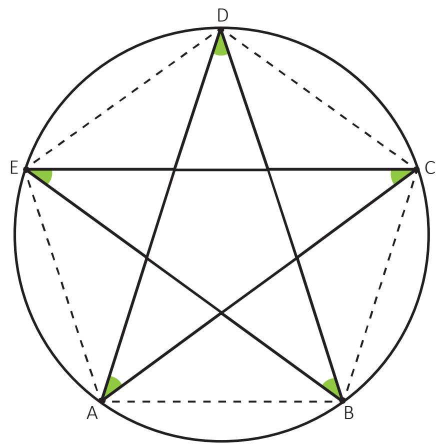
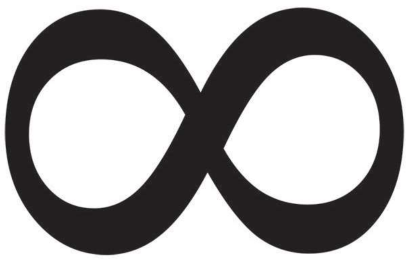
Unidad 1

Números Reales

Con la invención de la agricultura (15 000-10 000 a. C.) la humanidad tuvo que enfrentarse a la noción de número, que surgiría al contar las cabezas de ganado o al distribuir los distintos cultivos. Los pitagóricos atribuían un papel especial al número entero y definieron el número racional como la razón de las longitudes de dos segmentos conmensurables (uno está contenido un número entero de veces en el otro). El descubrimiento de números no conmensurables dio origen a los números irracionales, pero fue hasta el siglo XIX que el matemático francés Louis Cauchy ofreció la idea que un número irracional era la aproximación de varias fracciones racionales.



El pentágono regular es una figura en la que históricamente se ha estudiado la inconmensurabilidad de los segmentos.



El símbolo de "infinito" fue introducido por el matemático inglés John Wallis en el siglo XVII, y es uno de los conceptos básicos para la fundamentación de los números reales.

Desde las primeras nociones hasta la formalización matemática de los números reales en el siglo XIX, este conjunto numérico ha significado una herramienta indispensable para la comprensión y estudio de la naturaleza y la realidad, partiendo de la continuidad que poseen fenómenos como el tiempo o la materia, de modo que a partir del uso de los números reales se ha podido modelar matemáticamente de manera más certera el universo que rodea al ser humano, y a partir de ello intentar describirlo y comprenderlo.

Con el desarrollo de esta unidad recordarás los conceptos de raíz cuadrada, números reales, racionalización y valor absoluto. Conocerás el número Neperiano y el número Áureo, por último aprenderás acerca de la definición de intervalo.

1.1 Operaciones con raíces cuadradas (Repaso)

Problema inicial

Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$ b) $\sqrt{8} \div \sqrt{18}$ c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ d) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

Recuerda que:
1. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
3. $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

Solución

a) $\sqrt{6} \times \sqrt{10}$

$$\begin{aligned}\sqrt{6} \times \sqrt{10} &= \sqrt{6 \times 10}\\ &= \sqrt{(2 \times 3) \times (2 \times 5)}\\ &= \sqrt{2^2 \times 3 \times 5}\\ &= 2\sqrt{3 \times 5}\\ &= 2\sqrt{15}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{6} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{15}$.

b) $\sqrt{8} \div \sqrt{18}$

$$\begin{aligned}\sqrt{8} \div \sqrt{18} &= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}\\ &= \sqrt{\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{18}^{9}}}\\ &= \sqrt{\frac{4}{9}}\\ &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{8} \div \sqrt{18} = \frac{2}{3}$.

c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$

Se simplifican las raíces cuadradas

$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{2^2 \times 3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{75} &= \sqrt{3 \times 5^2}\\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

se efectúa la suma de términos semejantes:

$$\begin{aligned}\sqrt{12} + \sqrt{75} &= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}\\ &= 7\sqrt{3}\end{aligned}$$

d) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

Se simplifican las raíces cuadradas

$$\begin{aligned}\sqrt{18} &= \sqrt{2 \times 3^2}\\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{2 \times 5^2}\\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

se efectúa la resta de términos semejantes:

$$\begin{aligned}\sqrt{18} - \sqrt{50} &= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\\ &= -2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Conclusión

Un número b es raíz cuadrada de un número a si al elevar al cuadrado el número b se obtiene el número a, es decir $b^2 = a$.
Si $a \geq 0$, la raíz cuadrada no negativa de a se denota por $\sqrt{a}$.

Un número positivo a tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

- Al efectuar un producto o una división de raíces se utilizan las propiedades:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Se realizan las operaciones indicadas y por último se simplifica si es posible.

Para simplificar utiliza el hecho que $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

- Al efectuar una suma o una resta de raíces se simplifican las raíces cuadradas y luego se realiza la suma o resta de términos semejantes.

Problemas

Realiza las siguientes operaciones con raíces cuadradas:

a) $\sqrt{21} \times \sqrt{14}$ b) $\sqrt{6} \times \sqrt{12}$ c) $\sqrt{24} \div \sqrt{6}$ d) $\sqrt{15} \div \sqrt{27}$

e) $\sqrt{40} + \sqrt{90}$ f) $\sqrt{80} + \sqrt{45}$ g) $\sqrt{28} - \sqrt{63}$ h) $\sqrt{32} - \sqrt{8}$

Realiza la descomposición prima, para evitar cálculos grandes.

1.2 Operaciones combinadas con raíces cuadradas (Repaso)

Problema inicial

Realiza las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10})$ b) $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6})$

Solución

a) $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10}) = \sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{10}$ Aplicando la propiedad distributiva,

$= \sqrt{2\times 6}+\sqrt{2\times 10}$

$= \sqrt{12}+\sqrt{20}$ se puede hacer la descomposición prima de una sola vez,

$= \sqrt{2^2\times 3}+\sqrt{2^2\times 5}$

$= 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}.$

Por lo tanto, $\sqrt{2}\,(\sqrt{6}+\sqrt{10}) = 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}.$

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6}) = \sqrt{2}\times\sqrt{5}-\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{15}\times\sqrt{5}-\sqrt{15}\times\sqrt{6}$ Efectuando el producto,

$= \sqrt{2\times 5}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3^2\times 5\times 2}$ realizando la descomposición prima,

$= \sqrt{10}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{10}$

$= -2\sqrt{10}+3\sqrt{3}.$

Por lo tanto, $(\sqrt{2}+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{6}) = -2\sqrt{10}+3\sqrt{3}.$

Conclusión

En las operaciones combinadas con radicales se realizan los siguientes pasos:

1. Se efectúan las multiplicaciones y divisiones.
2. Se simplifican las raíces cuadradas.
3. Se efectúan las sumas y restas de raíces semejantes.

Recuerda la propiedad distributiva y los productos notables:

$$a(b+c) = ab+ac$$
$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{14}+\sqrt{5})$ b) $\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{8})$ c) $\sqrt{5}(4\sqrt{10}+7\sqrt{15})$

d) $(2-\sqrt{18})(2+\sqrt{18})$ e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ f) $(\sqrt{8}-\sqrt{6})^2$

g) $(\sqrt{5}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{24})$ h) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{21}-\sqrt{15})$ i) $(\sqrt{12}-4)(\sqrt{6}+9)$

1.3 Racionalización con denominador $\sqrt{a}$

Problema inicial

Racionaliza el denominador y simplifica si es posible:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{20}}$

Solución

a) $\dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} \times \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$= \dfrac{3 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$

$= \dfrac{\cancel{3}^{1}\sqrt{6}}{\cancel{6}_{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{2}.$

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{6}$, observa que $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1$,

Por lo tanto, $\dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

b) Simplificando la raíz cuadrada,

$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5}$
$= 2\sqrt{5}$

sustituyendo y racionalizando,

$\dfrac{2}{\sqrt{20}} = \dfrac{\cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}\sqrt{5}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{1 \times \sqrt{5}}{5}$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

Por lo tanto, $\dfrac{2}{\sqrt{20}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Conclusión

Para racionalizar el denominador de $\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ se realizan los siguientes pasos:

1. Se multiplica por: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.

2. Se simplifica el resultado cuando sea posible: $\dfrac{b}{\sqrt{a}} \times \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \dfrac{b\sqrt{a}}{a}$.

Racionalizar una fracción es encontrar una fracción equivalente con denominador entero.

Problemas

1. Racionaliza el denominador y simplifica siempre que sea posible.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{7}{\sqrt{14}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$ d) $\dfrac{4}{\sqrt{8}}$

e) $\dfrac{6}{\sqrt{18}}$ f) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$ g) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{10}}$ h) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{72}}$

Revisa si se simplifica antes de racionalizar.

2. Racionaliza el denominador y determina cuáles son iguales.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{21}}$

e) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{21}}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ g) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ h) $\dfrac{3\sqrt{7}}{7\sqrt{3}}$

1.4 Racionalización con denominador binomio

Problema inicial

¿De qué manera podrías racionalizar el denominador?

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Solución

Recordando el producto notable "Suma por diferencia de binomios": $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

Se puede efectuar este producto para una suma por diferencia de dos raíces cuadradas:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

El producto de una suma de raíces cuadradas, de números racionales, por su diferencia es un número racional.

Ahora se aplicará esto a los ejercicios propuestos.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ multiplicando y dividiendo por una resta de términos

$= \dfrac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$

$= \dfrac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$

$= \dfrac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$

$= \dfrac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$.

Por lo tanto, $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$.

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ multiplicando y dividiendo por una suma de términos

$= \dfrac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$= \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}$

$= \sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Por lo tanto, $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Definición

A la expresión $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ se le denomina la **conjugada** de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. La **conjugada** de una expresión de dos términos se obtiene cambiando el signo del segundo término. Dos expresiones son **conjugadas** si una es la **conjugada** de la otra.

Para **racionalizar** una fracción cuyo denominador sea suma o diferencia con raíces cuadradas, se multiplica y divide por la **conjugada** del denominador.

Ejemplo

Racionaliza el denominador $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2} \times \dfrac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}$ la conjugada de $\sqrt{7}-2$ es $\sqrt{7}+2$,

$= \dfrac{\sqrt{3}\times(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$ efectuando el producto notable, $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2) = (\sqrt{7})^2 - (2)^2 = 7-4 = 3$,

$= \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}+\sqrt{3}\times 2}{3}$

$= \dfrac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{3}$.

Por lo tanto, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2} = \dfrac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{3}$.

Problemas

Racionaliza el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{6}}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}$ f) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}$ g) $\dfrac{4}{\sqrt{10}+3}$ h) $\dfrac{\sqrt{14}+2}{1-\sqrt{7}}$

1.5 Los números neperiano y áureo

Problema inicial

El número neperiano e

Su valor es 2.718281828459045... y puede aproximarse mediante la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ donde n es un número natural muy grande.

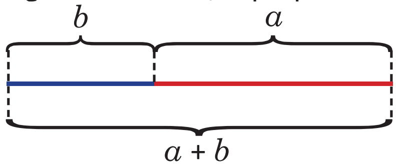
A partir de lo anterior realiza lo siguiente:

1. Observa que el valor numérico de la expresión anterior aumenta, si aumenta el valor de n.
2. Encuentra el valor numérico de la expresión anterior con los valores n = 1000, n = 10 000, n = 100 000.

El número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Es la razón de las longitudes de dos segmentos distintos a y b a través de la relación: La suma de las longitudes es al segmento mayor, como el segmento mayor es al segmento menor.

Algebraicamente, la proporción dada se escribe así:



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$

A partir de la proporción calcula ϕ.

Solución

1. Se evalúan los valores con una calculadora.

n	1	2	3	4
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.25	2.3703...	2.4414...

Al aumentar el valor de n aumenta el valor de la expresión.

2. Se elabora una tabla con los valores dados.

n	1000	10 000	100 000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2.71692...	2.71814...	2.71826...

Al tomar valores "muy grandes" de n, se aproxima al valor de e dado al principio.

$\phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$ y $\frac{a}{b} = \frac{\phi}{1}$, luego $\frac{b}{a} = \frac{1}{\phi}$

$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, sustituyendo en la proporción,

$\phi^2 = 1 + \phi$, multiplicando por ϕ,

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$, transponiendo los términos del miembro izquierdo.

Se aplica la fórmula general de la ecuación cuadrática para $a = 1$, $b = -1$ y $c = -1$

$$\phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

ϕ es positivo, pues es la razón de longitudes.

Por lo tanto, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Conclusión

El número e es irracional, por lo que su valor exacto solo es aproximable.

Leonard Euler, en Introductio in Analysin infinitorum de 1748, dio dos expresiones para aproximar el valor de e.

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y $e = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$

J.L. Coolidge. (1950). *The number e*.

El número ϕ es irracional pues no puede escribirse como el cociente de dos números enteros.

El número áureo es una constante que aparece con frecuencia en diversos campos de la naturaleza: crecimiento de las hojas, esqueletos de los mamíferos, etc. Además, tiene presencia en el arte y la música, pues tal proporción, se cree, tiene relación con la percepción de la armonía y belleza.

Casans, A. (2001). *Aspectos estéticos de la divina proporción*.

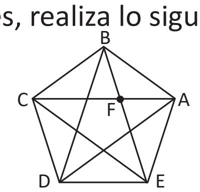
Problemas

1. Utilizando la expresión $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, con n un número natural y $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, aproxima el valor de e hasta n = 10.
2. En el pentágono regular ABCDE de lado 1 se han trazado todas las diagonales, realiza lo siguiente:

   a) Demuestra que $\Delta ABC \sim \Delta BFA$. b) Demuestra que ΔBCF es isósceles.

   c) Demuestra que FA = $a - 1$, donde a es la longitud de la diagonal $\overline{AC}$.

   d) Demuestra que $a = \frac{1}{a-1}$. e) Encuentra el valor de a.



1.6 Definición de los números reales: la recta numérica

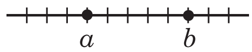
Problema inicial

1. Dibuja la recta numérica y ubica los siguientes números:

a) 3 b) −2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{9}{5}$ e) −2.5 f) 1.4 g) $\sqrt{5}$ h) ϕ i) −1 j) π

2. Clasifica cada uno de los números anteriores como racional e irracional.

En la recta numérica b está a la derecha de a si y solo si $a < b$.



Solución

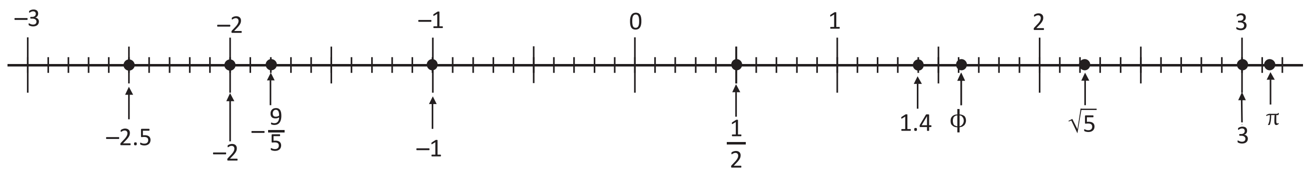
1. Se utilizan los valores aproximados en decimales de los números dados:

a) 3 = 3 b) −2 = −2 c) $\frac{1}{2} = 0.5$ d) $-\frac{9}{5} = -1.8$ e) −2.5 = −2.5

f) 1.4 g) $\sqrt{5} = 2.236...$ h) $\phi = 1.618...$ i) −1 j) $\pi = 3.141...$

Antes de colocar los números en la recta numérica, se ordenan de menor a mayor.

$-2.5 < -2 < -\frac{9}{5} < -1 < \frac{1}{2} < 1.4 < \phi < \sqrt{5} < 3 < \pi$



a) 3 es racional b) −2 es racional c) $\frac{1}{2}$ es racional d) $-\frac{9}{5}$ es racional

e) $-2.5 = -\frac{5}{2}$ es racional f) $1.4 = \frac{7}{5}$ es racional g) $\sqrt{5}$ es irracional h) ϕ es irracional

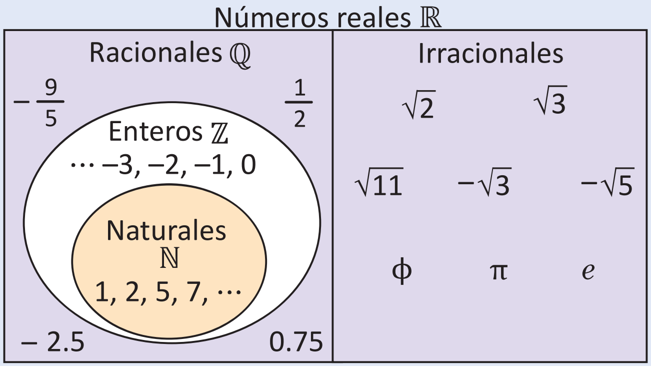
i) −1 es racional j) π es irracional

Definición

El conjunto de los **números reales** está formado por los números racionales y los números irracionales.

El símbolo utilizado para representar el conjunto de los números reales es $\mathbb{R}$.

La recta numérica es una representación del conjunto de los números reales: a cada número real le corresponde un único punto en la recta y viceversa.



Problemas

1. Ubica los siguientes números en la recta numérica.

a) $\frac{2}{5}$ b) 1 c) −3 d) $\sqrt{3}$

e) $-\frac{8}{5}$ f) $-0.\overline{5}$ g) 2.9 h) 0.15

i) $-\frac{11}{10}$ j) e k) $\sqrt{2}$ l) $\frac{7}{3}$

2. Determina a cuáles de los siguientes conjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ pertenece cada número del problema 1 o si es un número irracional.

1.7 Definición de los números reales: números decimales

Problema inicial

Escribe como un número decimal los siguientes números reales:

a) 3 b) –2 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\sqrt{7}$ g) e h) π

Solución

a) 3.000..., es un número decimal, su parte entera es 3 y su parte decimal es 0.000...

b) –2.000..., es un número decimal, su parte entera es –2 y su parte decimal es 0.000...

c) $\frac{3}{2}$, se divide $\frac{3}{2} = 3 \div 2 = 1.5$.

d) $\frac{5}{3}$, se divide $\frac{5}{3} = 5 \div 3 = 1.\overline{6}$.

e) $\frac{1}{6}$, se divide $\frac{1}{6} = 1 \div 6 = 0.1\overline{6}$.

f) $\sqrt{7} = 2.645751...$

g) $e = 2.7182818...$

h) $\pi = 3.141592...$

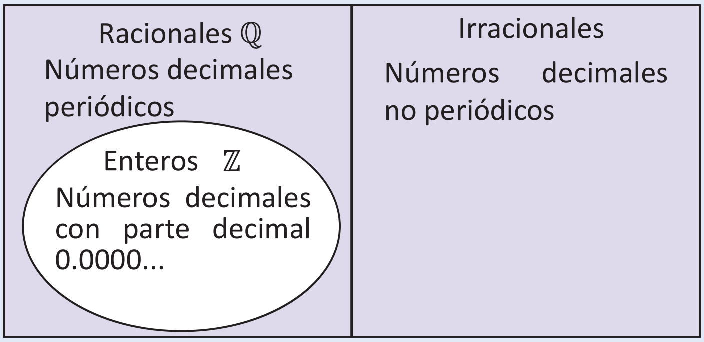
Definición

Los números decimales se utilizan para representar partes de la unidad, por lo que un número decimal se escribe de la forma $a.bcdefg\ldots$ donde a es un número entero y los números $b, c, d, e, f, g\ldots$ pueden ser los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Al número a se le denomina la **parte entera** y al número $0.bcdefg\ldots$ se le denomina **parte decimal**.

Así, el conjunto de los **números reales** $\mathbb{R}$ está formado por todos los números decimales:

Números Reales $\mathbb{R}$



Problemas

Clasifica cada uno de los siguientes números decimales como racional o irracional.

a) 0.125 b) 0.101001000100001... c) 0

d) 5.75757575... e) –7.321 f) 1.221212121212121...

g) –10 h) 3.333333... i) 3.141592653589...

j) 4.12666666 k) 0.123456789101112... l) –0.61803398874989...

1.8 El valor absoluto de un número real

Problema inicial

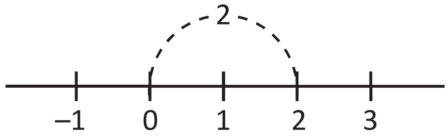
Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) 2 b) -3 c) $\sqrt{7}$ d) $-\frac{3}{4}$

Solución

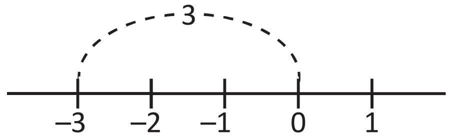
El valor absoluto de un número real es la distancia de ese número a cero en la recta numérica.

a) 2



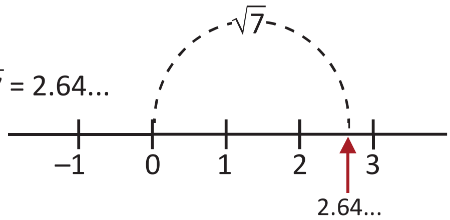
$|2| = 2$

b) -3



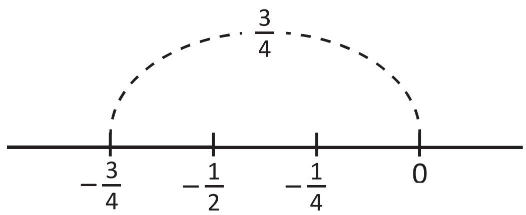
$|-3| = 3$

c) $\sqrt{7} = 2.64...$



$|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

d) $-\frac{3}{4}$



$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

El valor absoluto de un número positivo es el mismo número:

$|2| = 2$ $|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

El valor absoluto de un número negativo es igual a su número opuesto:

$|-3| = 3$ $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

Observa que:
$-(-3) = 3$ y $-\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

Definición

Se observa que:

- El valor absoluto de un número positivo es el mismo número, es decir, si $a > 0$ entonces $|a| = a$.
- El valor absoluto de cero es cero: $|0| = 0$.
- El valor absoluto de un número negativo es su número opuesto: si $a < 0$ entonces $|a| = -a > 0$.
- Cada número real determina un único valor absoluto, es decir, un número tiene un único valor absoluto.

El valor absoluto de un número real a se define de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a \ , & \text{si } a \geq 0 \\ -a \ , & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Recuerda que:
$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$, $\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$ y $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$
Por lo que, para todo número real a se cumple que:
$\sqrt{a^2} = |a|$

Problemas

1. Encuentra el valor absoluto de los siguientes números:

a) $\sqrt{6}$ b) $\frac{1}{70}$ c) -0.11111 d) -153

e) e f) $-\phi$ g) 0 h) $-\frac{1}{3}$

2. Sean a y b dos números positivos, demuestra que: si $a \geq b$ entonces $|a - b| = a - b$.

1.9 Definición de intervalo

Problema inicial

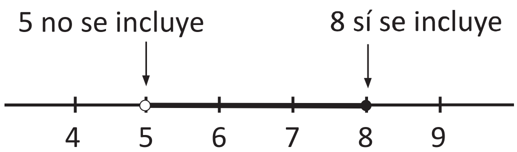
Escribe cómo se lee y representa en la recta numérica las siguientes desigualdades:

a) $5 < x \leq 8$ b) $-1 \leq x \leq 4$ c) $0 < x < 2$ d) $-3 \leq x < -1$

e) $x > 8$ f) $x < -4$ g) $x \leq 5$ h) $x \geq -2$

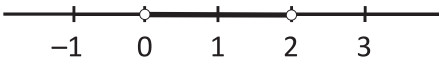
Solución

a) $5 < x \leq 8$, esta desigualdad se lee:
x mayor que 5 y menor o igual que 8.
Su representación en la recta es:

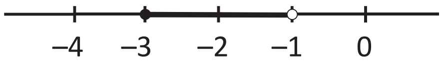


b) $-1 \leq x \leq 4$, esta desigualdad se lee:
x mayor o igual que -1 y menor o igual que 4.
Esta desigualdad se representa así:

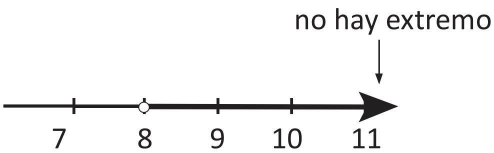
c) $0 < x < 2$, esta desigualdad se lee:
x mayor que 0 y menor que 2, por lo que su representación es:



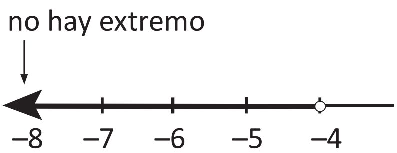
d) $-3 \leq x < -1$, esta desigualdad se lee:
x mayor o igual que -3 y menor que -1, por lo que su representación es:



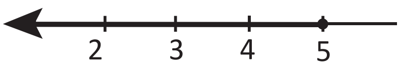
e) $x > 8$, esta desigualdad se lee:
x mayor que 8.
Se representa de la siguiente manera:



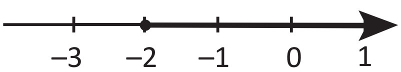
f) $x < -4$, esta desigualdad se lee:
x menor que -4.
Se representa de la siguiente manera:



g) $x \leq 5$, esta desigualdad se lee:
x menor o igual que 5.



h) $x \geq -2$, esta desigualdad se lee:
x mayor o igual que -2.



Definición

Un **intervalo** es una porción de la recta numérica representado por una semirrecta o un segmento de recta. Por ejemplo, los subconjuntos representados en el Problema inicial son intervalos: a), b), c) y d) son segmentos, y e), f), g) y h) son semirrectas.

Retomando el Problema inicial, la notación utilizada para representar un intervalo es:

a) $5 < x \leq 8 \Rightarrow\ ]5, 8]$ b) $-1 \leq x \leq 4 \Rightarrow [-1, 4]$ c) $0 < x < 2 \Rightarrow\ ]0, 2[$ d) $-3 \leq x < -1 \Rightarrow [-3, -1[$

A los números que aparecen en el intervalo se les llama **extremos del intervalo**.
Si el extremo del intervalo no se incluye, el corchete se escribe al revés : "]" al principio y "[" al final.

e) $x > 8 \Rightarrow]8, \infty[$ f) $x < -4 \Rightarrow]-\infty, -4[$ g) $x \leq 5 \Rightarrow]-\infty, 5]$ h) $x \geq -2 \Rightarrow [-2, \infty[$

El símbolo "∞" representa el infinito, mientras que "–∞" representa menos infinito. Estos símbolos en un intervalo indican que no existe otro número que sea extremo del intervalo.

El corchete correspondiente a –∞ o ∞ se coloca al revés, por ejemplo: "]–∞, 8]" y "]1, ∞[".

La siguiente tabla resume la notación de los tipos de intervalos, su representación en la recta numérica y la notación como conjunto utilizando desigualdades:

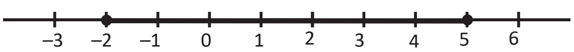
Tipo de intervalo	Notación de intervalo	Representación en la recta numérica	Notación de conjunto
Cerrado	$[a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Semiabierto por la derecha	$[a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
Semiabierto por la izquierda	$]a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
Abierto	$]a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Infinitos	$[a, \infty[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
	$]a, \infty[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
	$]-\infty, a]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
	$]-\infty, a[$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

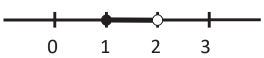
En la notación de conjunto, por ejemplo, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ se lee: los elementos x que pertenecen a los números reales tal que x es mayor o igual que a y menor o igual que b.

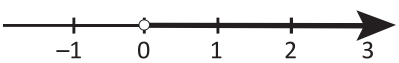
Problemas

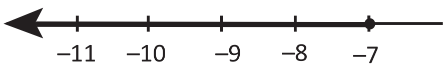
Representa los siguientes intervalos en las otras dos notaciones:

a) $]-3, 0]$ b) $]-\infty, -5[$ c) $[5, \infty[$ d) $]2, 6[$

e) 

f) 

g) 

h) 

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -5\}$ j) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq -2\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$ l) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

1.10 Practica lo aprendido

1. Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{4+\sqrt{7}}$ d) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{3}+2}{1-\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{27}-\sqrt{8}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ h) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}$

2. Sea n un número natural. Ubica en la recta numérica los números $\sqrt{n}$ tales que $2 < \sqrt{n} < 3$.

3. Encuentra el valor absoluto de los siguientes números:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$ d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

e) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ f) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ g) $\sqrt{10}-3$ h) $2\sqrt{7}-6$

Utiliza el resultado del problema 2 de la clase 1.8 y también que si a y b son números reales tales que $0 < a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

4. Justifica las siguientes afirmaciones:

a) Al efectuar la división $\sqrt{12} \div \sqrt{3}$ se obtiene un número entero.

b) Al efectuar la división $\sqrt{2} \div \sqrt{8}$ se obtiene un número racional.

c) El número áureo ϕ es menor que el neperiano e.

d) $\sqrt{2}+\sqrt{3} \neq \sqrt{5}$.

Utiliza la definición de raíz cuadrada.

e) Al efectuar la operación: $\phi^2 - \frac{1}{\phi}$ se obtiene un número entero.

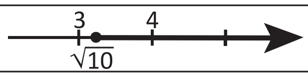
f) El valor absoluto de un número real nunca es un número negativo.

g) Sean a y b números reales, si $0 < b < a$ entonces $|b-a| = a-b$.

5. En los siguientes literales, ¿qué valores puede tomar la variable x para que la igualdad se cumpla?

a) $|x| = 1$ b) $|x| = 6$ c) $|x| = 0$ d) $|x+1| = 3$

6. Completa el siguiente cuadro sobre las representaciones de intervalos.

Intervalo	Notación de conjunto	Representación en la recta numérica
$]-4, 7]$		
		
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$	
$[\sqrt{2}, \phi]$		
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$	
$[0, 2\pi[$		
	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$