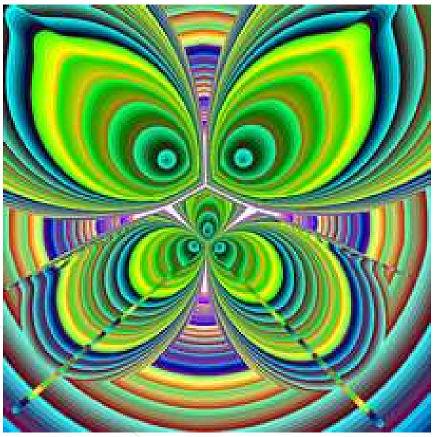
2 Unidad

Operaciones con polinomios y números complejos

El área de álgebra comenzó a convertirse en una rama cuyo desarrollo requirió estudios especiales en estas temáticas. Hacia el siglo XII, el matemático italiano Leonardo de Pisa (Fibonacci) divulgó por Europa lo que conocía acerca de polinomios, estos conocimientos fueron ampliados hacia el siglo XVI por los matemáticos italianos Cardano, Ferrari y Tartaglia, quienes presentaron resultados acerca de la solución de ecuaciones de grado 3 y 4. A partir de esto, en 1805 aproximadamente, el matemático italiano Paolo Ruffini presenta algunos resultados muy importantes acerca del trabajo con polinomios (uno de ellos, la regla de Ruffini o división sintética); en estos tiempos ya era conocida la relación existente entre las raíces de un polinomio y la solución de ecuaciones mediante la factorización (teorema del factor).



Área conocida como "polinomiografía" (polynomiography en inglés), que relaciona el arte y los polinomios a través de la computación.

Los contenidos de álgebra son una base fundamental para el desarrollo de cualquier aplicación en cualquier área, ya sea de la ingeniería, tecnología u otras áreas científicas. Los polinomios son utilizados como el medio para expresar los fenómenos de la naturaleza en un lenguaje matemático, para transformarlo mediante resultados matemáticos y luego interpretar la respuesta al fenómeno en cuestión.

Durante el desarrollo de la unidad se hará un repaso sobre la factorización de polinomios, además se profundizará en la división de polinomios, presentando los resultados sobre el teorema del factor, el teorema del residuo, así como la división sintética o regla de Ruffini. Por otro lado, se abordará la definición y características algebraicas de los números complejos como conjunto numérico.

1.1 Definición de monomio, polinomio y grado

Definición

A la expresión algebraica formada por una o más variables con exponentes enteros positivos, un número real llamado **coeficiente** y que solo involucra multiplicaciones se le llama **término**. La expresión formada por un término o por la suma de dos o más términos se conoce como **polinomio**, y al polinomio formado por un solo término se le llama **monomio**.

El término del polinomio que no posee variables se llama **término independiente**.

El **grado** es una característica relacionada con los exponentes de las variables, este se define de la siguiente forma:

1. El **grado de un término** es la suma de todos los exponentes de las variables. El grado del término independiente, es decir, aquel que no posee variable es igual a cero.
2. El **grado de un polinomio** puede dividirse en dos tipos:
   a) El **grado asociado a una variable** es el exponente mayor de la variable seleccionada.
   b) El **grado absoluto** es el mayor grado de los términos del polinomio.

Si en un polinomio aparece involucrada una sola variable entonces las definiciones a) y b) coinciden y el polinomio se llama **polinomio en una sola variable**.

Los términos de un polinomio pueden ordenarse de acuerdo al grado asociado a una variable o al grado de cada término. Ordenar de forma descendente es iniciar con el término de mayor grado hasta finalizar con el de menor grado, mientras que ordenar de forma ascendente es iniciar con el término de menor grado hasta finalizar con el de mayor grado.

Ejemplo 1

Para el polinomio $11 + 3xy - 5x^3y^2 + 8x^2y$ realiza lo siguiente:

1. Identifica las variables y los coeficientes del polinomio.
2. Identifica los términos del polinomio y calcula el grado de cada uno de ellos.
3. Calcula el grado asociado a cada una de las variables.
4. Calcula el grado absoluto del polinomio.

1. Las variables del polinomio son x y y; los coeficientes del polinomio son los siguientes:

   $11 \longrightarrow$ término independiente
   $3 \longrightarrow$ coeficiente de xy
   $-5 \longrightarrow$ coeficiente de x^3y^2
   $8 \longrightarrow$ coeficiente de x^2y

2. Los términos del polinomio son: 11, $3xy$, $-5x^3y^2$ y $8x^2y$. El grado de cada uno se calcula sumando los exponentes de las variables que aparecen en cada término, es decir:

   Grado de $11 \longrightarrow 0$, pues no aparece variable alguna.
   Grado de $3xy \longrightarrow 2$, pues las variables x y y tienen como exponente 1 y 1 respectivamente.

   El grado del término independiente siempre será igual a cero.

   Grado de $-5x^3y^2 \longrightarrow 5$, pues las variables x y y tienen como exponente 3 y 2 respectivamente.
   Grado de $8x^2y \longrightarrow 3$, pues x y y tienen exponentes 2 y 1 respectivamente.

3. El grado asociado a la variable x es 3, ya que es el mayor exponente de la misma. El grado asociado a y es 2, pues es el mayor exponente de la variable.

4. El grado absoluto del polinomio es el mayor grado de los términos del polinomio, del literal b) puede comprobarse que el término $-5x^3y^2$ es el que posee mayor grado. Por tanto, el grado absoluto es 5.

Ejemplo 2

Para el polinomio $11 + 3xy - 5x^3y^2 + 8x^2y$ realiza lo siguiente:

1. Ordena los términos en forma ascendente y descendente con respecto a la variable x.
2. Ordena los términos en forma ascendente y descendente con respecto a la variable y.
3. Ordena el polinomio en forma ascendente y descendente con respecto a los términos.

1. En la forma ascendente se ordenan los términos empezando con el término de menor grado de la variable hasta llegar al término con mayor grado de la variable seleccionada; la forma descendente es lo contrario. Así, el polinomio ordenado con respecto a la variable x queda de la siguiente forma:

   Forma ascendente $\longrightarrow 11 + 3xy + 8x^2y - 5x^3y^2$.

   Forma descendente $\longrightarrow -5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11$.

2. La variable y en los términos $3xy$ y $8x^2y$ tiene el mismo grado, entonces para ordenarlos se toma en consideración el exponente de la variable x. Así, en la forma ascendente irá primero el término cuyo exponente de x sea menor, y en la forma descendente irá primero el término cuyo exponente de x sea mayor.

   El polinomio ordenado con respecto a la variable y, de forma ascendente y descendente queda de la siguiente forma:

   Forma ascendente $\longrightarrow 11 + 3xy + 8x^2y - 5x^3y^2 = 11 + (3x + 8x^2)y - 5x^3y^2$.

   Forma descendente $\longrightarrow -5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11 = -5x^3y^2 + (8x^2 + 3x)y + 11$.

   Se observa que el término independiente 11, en la forma ascendente para cualquier variable siempre va primero, mientras que en la forma descendente para cualquier variable se coloca al final.

3. Para ordenar con respecto a los términos, en la forma ascendente se inicia con el término de menor grado, mientras que en la forma descendente se inicia con el término de mayor grado. Entonces, el polinomio ordenado en ambas formas queda de la siguiente manera:

   Forma ascendente $\longrightarrow \underbrace{11}_{\text{Grado 0}} + \underbrace{3xy}_{\text{Grado 2}} + \underbrace{8x^2y}_{\text{Grado 3}} - \underbrace{5x^3y^2}_{\text{Grado 5}}$.

   Forma descendente $\longrightarrow -5x^3y^2 + 8x^2y + 3xy + 11$.

   Generalmente, los términos de un polinomio se ordenan de forma descendente.

Problemas

1. En cada literal identifica las variables, los coeficientes y los términos del polinomio. Luego, calcula el grado de cada término, el grado asociado a cada variable y el grado absoluto del polinomio:
   a) $10xy + 5x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^3y^3$
   b) $-3a^2b^3 + 4a^3b - ab^2 + b$
   c) $9m^2 - 12m^2n^3 + 2mn - 5mn^2 + 1$
   d) $8x^3 - 10 + 3x + 5x^2$

2. Para cada uno de los polinomios del numeral 1 realiza lo siguiente:
   a) ordena los términos del polinomio con respecto a cada variable, tanto de forma ascendente como descendente;
   b) ordena el polinomio con respecto a sus términos.

3. Sin desarrollar los productos, calcula la suma de los coeficientes del siguiente polinomio: $(x - 3)^2 + (x + 2)^2 + 9x - 10$.

   No olvides que el término independiente también es un coeficiente.

1.2 Productos de binomio por binomio, parte 1

Problema inicial

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x+9)(x-5)$ b) $(x+3)^2$ c) $(x-7)^2$ d) $(x+4)(x-4)$

Solución

a) El producto es de la forma $(x+a)(x+b)$ cuyo desarrollo es:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x+9)(x-5) &= x^2 + (9-5)x + (9)(-5)\\ &= x^2 + 4x - 45\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x+9)(x-5) = x^2 + 4x - 45$.

b) El producto es el cuadrado de un binomio, cuyo desarrollo es:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= x^2 + 2(3)x + 3^2\\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

Luego, $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

c) También es el cuadrado de un binomio, cuyo desarrollo es:

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x-7)^2 &= x^2 - 2(7)x + 7^2\\ &= x^2 - 14x + 49\end{aligned}$$

Luego, $(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$.

d) Es un producto de la suma por la diferencia de binomios cuyo desarrollo es:

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$

utilizando lo anterior,

$$\begin{aligned}(x+4)(x-4) &= x^2 - 4^2\\ &= x^2 - 16\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x+4)(x-4) = x^2 - 16$.

Conclusión

Los productos notables son productos de polinomios cuyos resultados pueden identificarse y escribirse de manera directa. Sean a y b números reales cualesquiera:

Producto notable	Desarrollo
Producto de la forma $(x+a)(x+b)$	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
Cuadrado de un binomio	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma por la diferencia de binomios	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Problemas

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(x+3)(x+10)$ b) $(y-6)(y-4)$ c) $(x-8)(x+2)$

d) $(y+5)^2$ e) $(m-2)^2$ f) $(x+11)^2$

g) $(x+3)(x-3)$ h) $(10+y)(10-y)$ i) $(m-6)(m+6)$

j) $\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)$ k) $\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ l) $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$

m) $\left(x+\sqrt{5}\right)^2$ n) $\left(y+2\sqrt{3}\right)^2$ o) $\left(m+\frac{1}{5}\right)\left(m-\frac{1}{5}\right)$

p) $\left(\frac{4}{7}-x\right)\left(\frac{4}{7}+x\right)$ q) $\left(y+\sqrt{6}\right)\left(y-\sqrt{6}\right)$ r) $\left(x-2\sqrt{10}\right)\left(x+2\sqrt{10}\right)$

1.3 Productos de binomio por binomio, parte 2

Problema inicial

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(4x + 3)(4x - 5)$ b) $(2x + y)^2$ c) $(3x - 2y)^2$ d) $(5x + 6y)(5x - 6y)$

Solución

a) El desarrollo del producto es similar al de $(x + a)(x + b)$, pues el término $4x$ aparece en cada binomio:

$$\begin{aligned}(4x + 3)(4x - 5) &= (4x)^2 + (3 - 5)(4x) + (3)(-5)\\ &= 16x^2 + (-2)(4x) - 15\\ &= 16x^2 - 8x - 15\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(4x + 3)(4x - 5) = 16x^2 - 8x - 15$.

b) El producto es el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(2x + y)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(y) + y^2\\ &= 4x^2 + 4xy + y^2\end{aligned}$$

Luego, $(2x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$.

c) El producto es, como el literal anterior, el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(3x - 2y)^2 &= (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2\\ &= 9x^2 - 12xy + 4y^2\end{aligned}$$

Luego, $(3x - 2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$.

d) El producto es una suma por diferencia de binomios, y se desarrolla:

$$\begin{aligned}(5x + 6y)(5x - 6y) &= (5x)^2 - (6y)^2\\ &= 25x^2 - 36y^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(5x + 6y)(5x - 6y) = 25x^2 - 36y^2$.

En general

Sean a, b y m números reales cualesquiera. Entonces:

1. El producto $(mx + a)(mx + b)$ se desarrolla de forma similar al de la forma $(x + a)(x + b)$, es decir:
$(mx + a)(mx + b) = (mx)^2 + (a + b)(mx) + ab$.

2. Los productos $(ax + by)^2$ y $(ax - by)^2$ son el cuadrado de un binomio y se desarrollan:
$(ax + by)^2 = (ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2$
$(ax - by)^2 = (ax)^2 - 2(ax)(by) + (by)^2$.

3. El producto $(ax + by)(ax - by)$ es una suma por diferencia de binomios y se desarrolla:
$(ax + by)(ax - by) = (ax)^2 - (by)^2$.

Los babilonios resolvían problemas como el siguiente: "encontrar dos números cuya suma (o diferencia) y producto fuesen conocidos" utilizando el producto notable del literal c). Por ejemplo, el "razonamiento babilónico" para encontrar dos números cuya suma sea 14 y producto sea 45, escrito en el lenguaje matemático actual es el siguiente:

14 corresponde a la suma de los números $7 + x$ y $7 - x$, el producto de ellos debe ser igual a 45:

$$(7 + x)(7 - x) = 45$$

de lo anterior se obtiene $49 - x^2 = 45$ cuya solución es $x = \pm 2$. Entonces, los números son 9 y 5.

Bunt, N. H., Jones, P. S. y Bedient, J. D. (1988). *The historical roots of elementary mathematics.*

Problemas

Desarrolla los siguientes productos notables:

a) $(2x + 9)(2x + 1)$ b) $(3x - 1)(3x + 5)$ c) $(5y - 4)(5y - 2)$

d) $(4x + 5y)^2$ e) $(2x - 7y)^2$ f) $(3y - 10x)^2$

g) $(2x + 5y)(2x - 5y)$ h) $(6w + z)(6w - z)$ i) $(8y - 3x)(8y + 3x)$

j) $\left(2n - \frac{1}{2}\right)\left(2n - \frac{1}{4}\right)$ k) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{9}{2}\right)$ l) $\left(\frac{2}{3}y + 11\right)\left(\frac{2}{3}y - 5\right)$

m) $\left(\sqrt{2}\,x + y\right)^2$ n) $\left(\sqrt{3}\,w + \sqrt{5}\,z\right)^2$ o) $\left(4 - 3\sqrt{2}\,x\right)^2$

p) $\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{9}y\right)\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{9}y\right)$ q) $\left(\sqrt{5}\,x - \frac{3}{4}y\right)\left(\sqrt{5}\,x + \frac{3}{4}y\right)$ r) $\left(2\sqrt{2}\,x - 3\sqrt{3}y\right)\left(2\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{3}\,y\right)$

1.4 Productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$

Problema inicial

Desarrolla el producto $(2x + 5)(3x + 4)$. Encuentra una regla para productos de la forma $(ax + b)(cx + d)$.

Solución

Se multiplica cada uno de los términos del primer binomio por cada uno de los términos del segundo:

$$\begin{aligned} (2x + 5)(3x + 4) &= 2x(3x) + 2x(4) + 5(3x) + 5(4) && \text{multiplicar término a término,} \\ &= 2(3)x^2 + [2(4) + 5(3)]x + 5(4) && \text{propiedad conmutativa y distributiva,} \\ &= 6x^2 + [8 + 15]x + 20 && \text{desarrollar productos,} \\ &= 6x^2 + 23x + 20. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x + 5)(3x + 4) = 6x^2 + 23x + 20$. Un producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$ se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned} (ax + b)(cx + d) &= ax(cx) + ax(d) + b(cx) + bd \\ &= acx^2 + (ad + bc)x + bd. \end{aligned}$$

Luego, $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$.

Conclusión

El producto de binomios de la forma $(ax + b)(cx + d)$ se desarrolla de la siguiente forma:

$$(ax + b)(cx + d) = \overbrace{ac}^{\text{Producto de } a \text{ y } c}x^2 + (\underbrace{ad + bc}_{\text{Producto de } a \text{ y } d \text{ más el producto de } b \text{ y } c})x + \overbrace{bd}^{\text{Producto de } b \text{ y } d}.$$

Ejemplo

Desarrolla el producto $(5x - 6)(2x + 7)$.
En este caso, $a = 5$, $b = -6$, $c = 2$ y $d = 7$. Luego:

$$\begin{aligned} (5x - 6)(2x + 7) &= 5(2)x^2 + [5(7) + (-6)(2)]x + (-6)(7) \\ &= 10x^2 + (35 - 12)x - 42 \\ &= 10x^2 + 23x - 42. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(5x - 6)(2x + 7) = 10x^2 + 23x - 42$.

Problemas

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 9)(3x + 1)$
b) $(4x + 1)(2x + 1)$
c) $(2x + 7)(3x - 2)$
d) $(4x + 3)(x - 2)$
e) $(-x + 7)(6x + 4)$
f) $(x - 8)(-2x - 5)$
g) $(3x - 10)(-2x + 3)$
h) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(3x + \frac{5}{2}\right)$
i) $\left(5x - \frac{1}{4}\right)\left(6x - \frac{1}{10}\right)$

2. Para cada caso, determina el valor de los enteros a, b, c o d para que sea verdadera la igualdad:

a) $(ax - 7)(4x + d) = 12x^2 - 25x - 7$
b) $(5x + 4)(cx + d) = 10x^2 + 33x + 20$
c) $(ax + b)(cx + 6) = 2x^2 + 5x - 42$
d) $(ax + b)(cx + d) = 5x^2 + 23x + 12$

Dos polinomios de grado 2, $ex^2 + fx + g$ y $mx^2 + nx + p$ son iguales si $e = m$, $f = n$ y $g = p$.

1.5 Cubo de un binomio, parte 1

Problema inicial

Desarrolla el producto:

$$(a + b)^3.$$

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2(a + b)$

Solución

El producto $(a + b)^3$ es la potencia cúbica de $a + b$, y es igual a:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

asociando los primeros dos factores se obtiene:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= [(a + b)(a + b)](a + b)\\ &= (a + b)^2(a + b).\end{aligned}$$

Se desarrolla $(a + b)^2$ y se efectúa el producto de trinomio por binomio:

$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$	desarrollar el cuadrado de un binomio,
$= a^2(a) + a^2(b) + 2ab(a) + 2ab(b) + b^2(a) + b^2(b)$	multiplicar término a término,
$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$	desarrollar los productos de monomios,
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$	reducir términos semejantes.

Por lo tanto, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Conclusión

El producto de la forma $(a + b)^3$ se llama **cubo de un binomio** y se desarrolla de la siguiente forma:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

Ejemplo

Desarrolla el producto $(2x + y)^3$.

El producto $(2x + y)^3$ también es el cubo de un binomio, por tanto se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(2x + y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(y) + 3(2x)y^2 + y^3\\ &= 8x^3 + 3(4x^2)y + 6xy^2 + y^3\\ &= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

Luego, $(2x + y)^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$.

Problemas

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 1)^3$
b) $(y + 4)^3$
c) $(m + 5)^3$
d) $(x + 2y)^3$
e) $(3x + y)^3$
f) $(m + 4n)^3$
g) $\left(m + \frac{1}{3}\right)^3$
h) $\left(y + \frac{1}{2}\right)^3$
i) $(3x + 2y)^3$
j) $\left(\frac{1}{3}x + 3y\right)^3$
k) $\left(\frac{2}{3}x + y\right)^3$
l) $\left(\frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n\right)^3$

Unidad 2

1.6 Cubo de un binomio, parte 2

Problema inicial

Desarrolla el producto:

$$(a-b)^3.$$

$(a-b)^3 = [a + (-b)]^3$

Solución

Se escribe $(a-b)^3$ como $[a+(-b)]^3$ y se desarrolla como el cubo de un binomio:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= [a+(-b)]^3\\ &= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Conclusión

El producto de la forma $(a-b)^3$ también es el **cubo de un binomio** y se desarrolla:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

En general, $(ax+by)^3$ y $(ax-by)^3$ también son productos notables y se les llama cubo de un binomio; se desarrollan de la siguiente forma:

$$(ax \overset{\text{Positivo}}{+} by)^3 = (ax)^3 \overset{\text{Positivo}}{+} 3(ax)^2(by) \overset{\text{Positivo}}{+} 3(ax)(by)^2 \overset{\text{Positivo}}{+} (by)^3.$$

$$(ax \underset{\text{Negativo}}{-} by)^3 = (ax)^3 \underset{\text{Negativo}}{-} 3(ax)^2(by) \underset{\text{Positivo}}{+} 3(ax)(by)^2 \underset{\text{Negativo}}{-} (by)^3.$$

Ejemplo

Desarrolla el producto $(2x-3y)^3$.

El producto $(2x-3y)^3$ también es el cubo de un binomio, por tanto se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(2x-3y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3\\ &= 8x^3 - 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2) - 27y^3\\ &= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3\end{aligned}$$

Luego, $(2x-3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$.

Problemas

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x-1)^3$ b) $(y-3)^3$ c) $(m-10)^3$

d) $(4x-y)^3$ e) $(m-5n)^3$ f) $(5x-2y)^3$

g) $\left(x-\frac{1}{6}\right)^3$ h) $\left(y-\frac{1}{2}\right)^3$ i) $\left(m-\frac{2}{3}\right)^3$

j) $\left(\frac{1}{3}x-2y\right)^3$ k) $\left(3m-\frac{1}{6}n\right)^3$ l) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^3$

2. Para cada caso, determina el valor de a o b para que sea verdadera la igualdad:

a) $(x+a)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ b) $(y-a)^3 = y^3 - 12y^2 + 48y - 64$

c) $(ax+by)^3 = 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$ d) $(ax-by)^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{6}xy^2 - \frac{1}{27}y^3$

1.7 Combinaciones de productos notables

Problema inicial

Desarrolla lo siguiente:

a) $(2x + 3)^3 - (2x - 3)^3$ b) $(a + b + c)^2$

Solución

a) Ambos productos, $(2x + 3)^3$ y $(2x - 3)^3$, son cubos de binomios. Una vez identificados los productos notables que aparecen en la expresión se desarrollan de acuerdo a lo visto en clases anteriores y se reducen los términos semejantes, si los hay:

$$\overbrace{(2x+3)^3}^{(1)} - \overbrace{(2x-3)^3}^{(2)} = \overbrace{8x^3 + 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 + 27}^{(1)} - \overbrace{[8x^3 - 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 - 27]}^{(2)}$$

$$= \cancel{8x^3} + 3(4x^2)(3) \cancel{+ 3(2x)(9)} \boxed{+ 27} \cancel{-8x^3} + 3(4x^2)(3) \cancel{- 3(2x)(9)} \boxed{+ 27}$$

$$= 36x^2 + 27 + 36x^2 + 27$$

$$= 72x^2 + 54$$

Por lo tanto, $(2x + 3)^3 - (2x - 3)^3 = 72x^2 + 54$.

b) Sea $a + b = x$; entonces $(a + b + c)^2 = (x + c)^2$ corresponde al cuadrado de un binomio:

$(a + b + c)^2 = (x + c)^2$	sustituir $a + b = x$,
$= x^2 + 2xc + c^2$	desarrollar el cuadrado de un binomio,
$= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$	sustituir $x = a + b$,
$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$	
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$.	

Luego, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$.

En general

Al desarrollar combinaciones de productos notables:
1. Se identifican primero cuáles son los productos notables involucrados en la expresión.
2. Se desarrollan los productos teniendo cuidado con los signos.
3. Se reducen los términos semejantes, si los hay.

Problemas

1. Desarrolla lo siguiente:

a) $(5x + 11)(5x - 6) + (x - 2y)(x + 2y)$

b) $(10x - y)^2 + (x - 10y)^2$

c) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 4)(x - 5)$

d) $(x + 4y)^3 + (x - 5y)^3$

e) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1\right)$

f) $\left(\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y\right)\left(\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y\right) - (x + y + 1)^2$

2. Utiliza productos notables para resolver lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $a^2 - b^2$ si $a + b = 25$ y $a - b = 10$?
b) ¿Cuál es el valor numérico de ab si $a^2 + b^2 = 58$ y $a + b = 10$?
c) Sin utilizar calculadora encuentra el resultado de 101^3.

1.8 Practica lo aprendido

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x+7)(x-5)$
b) $(m+8)^2$
c) $(n-6)\left(n-\frac{1}{2}\right)$
d) $(y-10)(y+8)$
e) $(y-4)^2$
f) $(x+6)^2$
g) $(x+5)(x-5)$
h) $\left(\frac{1}{7}-y\right)\left(\frac{1}{7}-y\right)$
i) $(n-2\sqrt{2})(n+2\sqrt{2})$

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(3x+7)(3x+2)$
b) $\left(\frac{1}{2}y+5\right)\left(\frac{1}{2}y-9\right)$
c) $\left(5n-\frac{4}{5}\right)\left(5n-\frac{1}{5}\right)$
d) $(9x+4y)^2$
e) $\left(3x-\frac{1}{3}y\right)^2$
f) $(2x+\sqrt{3}\,y)^2$
g) $(10m+7n)(10m-7n)$
h) $\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{3}y\right)$
i) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

3. Desarrolla los siguientes productos de la forma $(ax+b)(cx+d)$:

a) $(2x-3)(x-4)$
b) $(x+6)(3x+5)$
c) $(4y-3)(5y+2)$
d) $\left(2x+\frac{1}{3}\right)\left(3x+\frac{2}{3}\right)$
e) $\left(5n+\frac{1}{2}\right)\left(4n-\frac{4}{5}\right)$
f) $\left(\frac{1}{3}x-8\right)\left(\frac{1}{4}x+3\right)$

4. Determina los números enteros a, b, c o d para que sea verdadera la igualdad:

a) $(x+b)(cx-6)=2x^2+12x-54$
b) $(2x-5)(cx+d)=6x^2-35x+50$
c) $(ax+1)(cx+5)=8x^2+22x+5$
d) $(5x+b)(cx+d)=10x^2-9x-9$

5. Desarrolla los siguientes cubos de binomios:

a) $(m+3)^3$
b) $(y+10)^3$
c) $\left(x+\frac{1}{6}\right)^3$
d) $(y-4)^3$
e) $(5-m)^3$
f) $\left(x-\frac{1}{5}\right)^3$
g) $(10x+3y)^3$
h) $\left(\frac{1}{5}m-5n\right)^3$
i) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3$

6. Desarrolla lo siguiente:

a) $(3x+4)(3x-4)-(2x+5)(2x-9)$
b) $(x+3y)^2+(2x-5y)^2$
c) $(2x-y)^3-(x+y)^3$
d) $(3x-4y+5)(3x-4y-5)$
e) $(3x-7)(4x+5)+(5x+1)(5x-6)$
f) $(x+9)(2x-11)+(x-5)^2$

7. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a-b)^2$ si $a^2+b^2=40$ y $ab=12$?
b) ¿Cuál es el valor numérico de $a+b$ si $a^2-b^2=24$ y $a-b=2$?
c) Utilizando productos notables, calcula el resultado de las siguientes operaciones:
- 103^2
- $105(95)$
- $45(55)$

d) Sea $x=445$, calcula el resultado de la operación: $446(444)-447(443)$ escribiendo las cantidades en términos de x y utilizando productos notables.
e) Demuestra que $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$.

1.9 Factor común monomio y polinomio

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $10x^2y + 6xy^2 - 8xy$ b) $xy + 3x + 2y + 6$

Identifica el factor común en los términos del polinomio del literal a). En el literal b) asocia las parejas de términos que tienen factor común.

Solución

a) Se debe identificar el factor común en los términos del polinomio:

$$\begin{aligned} 10x^2y &= 2(5)(x)(x)(y) = 2xy(5x) \\ 6xy^2 &= 2(3)(x)(y)(y) = 2xy(3y) \\ -8xy &= -2(4)(x)(y) = -2xy(4) \end{aligned}$$

se extrae dicho factor y escribiendo como producto de un monomio por un polinomio se tiene:

$$\begin{aligned} 10x^2y + 6xy^2 - 8xy &= 2xy(5x) + 2xy(3y) - 2xy(4) \\ &= 2xy(5x + 3y - 4). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $10x^2y + 6xy^2 - 8xy = 2xy(5x + 3y - 4)$.

b) Los cuatro términos del polinomio no poseen factor común. Sin embargo, el primer y segundo término tienen factor común x; mientras que el tercer y cuarto término tienen factor común 2. Se asocian estas dos parejas y se extrae el factor común en cada caso:

$$\begin{aligned} xy + 3x + 2y + 6 &= (xy + 3x) + [2y + 2(3)] \\ &= x(y + 3) + 2(y + 3). \end{aligned}$$

sea $m = y + 3$; sustituyendo en la expresión anterior y extrayendo factor común m se obtiene:

$$\begin{aligned} xy + 3x + 2y + 6 &= xm + 2m \\ &= (x + 2)m. \end{aligned}$$

Luego, $xy + 3x + 2y + 6 = (x + 2)(y + 3)$.

Conclusión

Factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de polinomios más simples; a dichos polinomios simples se les llama **factores**. Si todos los términos de un polinomio tienen en común un monomio, entonces se extrae ese monomio y se escribe como producto de un monomio por un polinomio:

$$ma + mb + mc = m(a + b + c).$$

Si los términos del polinomio no tienen factor común pero estos pueden asociarse en grupos de términos con un factor común diferente en cada grupo, entonces:

1. Se extrae el factor común en cada grupo.
2. Si al hacer lo anterior en la expresión quedan monomios multiplicados por un mismo polinomio, entonces se extrae este polinomio común:

$$\begin{aligned} ma + mb + na + nb &= m(a + b) + n(a + b) \\ &= (m + n)(a + b). \end{aligned}$$

Al proceso de factorizar asociando términos que tengan el mismo factor común también se le llama **factor común por agrupación de términos**.

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + xy^2$ b) $2a - 8ab$ c) $x^2y^2 - x^2y + xy$

d) $-10a^2b^2 + 5ab^2 - 15abc$ e) $-12xy^2 + 20x^2 + 16xy$ f) $12a^2b^2c - 6ab^2c^2 + 18a^2bc$

g) $mn - 4m + 3n - 12$ h) $xy - 2x - 5y + 10$ i) $2ab - 12a + b - 6$

j) $3xy - 7x - 12y + 28$ k) $6mn + 8m + 15n + 20$ l) $x^2y - 3xy^2 + 8x - 24y$

m) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x$ n) $10\sqrt{2}\,a^2b + 6\sqrt{2}\,ab$ o) $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}n$

1.10 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios en la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $x^2 + 10x + 16$

b) $y^2 - y - 20$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Solución

a) Para factorizar $x^2 + 10x + 16$ en la forma $(x + a)(x + b)$ deben buscarse dos números cuya suma sea igual a 10 y cuyo producto sea 16. Como la suma es positiva entonces ambos números deben ser positivos:

Pareja	Producto	Suma
1 y 16	16	17
2 y 8	16	10

Puedes desarrollar el producto $(x + 2)(x + 8)$ para verificar si la factorización es correcta.

Luego, $a = 2$ y $b = 8$, y $x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8)$.

b) De forma similar al literal anterior, se buscan dos números cuya suma sea igual a –1 y cuyo producto sea –20. Como el producto de ambos es negativo, uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo:

Pareja	Producto	Suma
–1 y 20	–20	19
–2 y 10	–20	8
–4 y 5	–20	1
4 y –5	–20	–1

Se puede descomponer el número 20 en sus factores primos para encontrar las parejas: 20 = 2(2)(5).

Por lo tanto, $a = 4$ y $b = -5$, y $y^2 - y - 20 = (y + 4)(y - 5)$.

Conclusión

Para poder factorizar un trinomio en el producto notable $(x + a)(x + b)$ debe verificarse que, dentro de los términos del trinomio se encuentren: x^2, otro término con variable x y el otro sin variable (término independiente). Sean m y n números positivos:

a) Si el trinomio es $x^2 + mx + n$ entonces se buscan **dos números positivos** cuyo producto sea n y cuya suma sea m.
b) Si el trinomio es $x^2 - mx + n$ entonces se buscan **dos números negativos** cuyo producto sea n y cuya suma sea $-m$.
c) Si el trinomio es $x^2 + mx - n$ o $x^2 - mx - n$ entonces se buscan **dos números, uno positivo y el otro negativo** cuyo producto sea $-n$ y cuya suma sea m o $-m$, según sea el caso.

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 7x + 6$
b) $x^2 - 9x + 14$
c) $y^2 - 3y - 40$
d) $y^2 + 2y - 15$
e) $a^2 + 2a - 63$
f) $b^2 - 12b + 20$
g) $y^2 + 14y + 40$
h) $x^2 - 2x - 35$
i) $x^2 - 12x + 27$
j) $y^2 + 5y - 24$
k) $a^2 + 15a + 56$
l) $b^2 - 9b - 22$

2. Sin desarrollar los productos, factoriza cada uno de los siguientes polinomios:

a) $(x - 1)^2 - 2(x - 1) - 24$

Sustituye $y = x - 1$.

b) $(x + 1)^2 + 10(x + 1) + 21$
c) $(x - 2)^2 + 5(x - 2) - 50$
d) $(x - 3)^2 - 5(x - 3) + 6$

1.11 Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados, parte 1

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 12x + 36$

b) $y^2 - 100$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

Solución

a) El primer término del trinomio y el término independiente son cuadrados, pues x^2 es el cuadrado de x y 36 es el cuadrado de 6. Además, $12x = 2(6)(x)$.

Entonces: $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2(6)(x) + 6^2$.

Lo anterior corresponde al desarrollo del cuadrado de un binomio, $x^2 + 2(6)(x) + 6^2 = (x + 6)^2$.

Por lo tanto, $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.

b) Ambos términos del binomio son cuadrados: $y^2 - 100 = y^2 - 10^2$.

Lo anterior corresponde al desarrollo de una suma por diferencia de binomios, $y^2 - 10^2 = (y + 10)(y - 10)$.

Luego, $y^2 - 100 = (y + 10)(y - 10)$.

Conclusión

El trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 \pm 2ax + a^2}$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto debe comprobarse que el término independiente es el cuadrado de algún número, luego comprobar que el doble de ese número es igual al coeficiente de la variable de primer grado. Por otro lado, el polinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 - a^2}$ se llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 6x + 9$
b) $y^2 + 10y + 25$
c) $b^2 - 8b + 16$
d) $x^2 - 4$
e) $a^2 - 36$
f) $49 - y^2$
g) $b^2 + b + \frac{1}{4}$
h) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$
i) $y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$
j) $a^2 - \frac{1}{25}$
k) $b^2 - \frac{1}{64}$
l) $\frac{4}{9} - y^2$
m) $x^2 + 5x + \frac{25}{4}$
n) $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16}$
o) $x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{49}{100}$
p) $a^2 - \frac{36}{49}$
q) $y^2 - \frac{4}{121}$
r) $\frac{81}{64} - b^2$

2. Sin utilizar calculadora, determina el resultado de las siguientes operaciones:

a) $77^2 - 23^2$
b) $998^2 - 4$
c) $97^2 + 6(97) + 9$

1.12 Trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados, parte 2

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $49x^2 - 28xy + 4y^2$

b) $121x^2 - 16y^2$

Solución

a) El primer término del trinomio es el cuadrado de $7x$ y el tercer término es el cuadrado de $2y$:

$$(7x)^2 = 49x^2$$
$$(2y)^2 = 4y^2$$

además, $-2(7x)(2y) = -28xy$, por lo que $49x^2 - 28xy + 4y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza:

$$\begin{aligned} 49x^2 - 28xy + 4y^2 &= (7x)^2 - 2(7x)(2y) + (2y)^2 \\ &= (7x - 2y)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $49x^2 - 28xy + 4y^2 = (7x - 2y)^2$.

b) El primer término es el cuadrado de $11x$ mientras que el segundo es el cuadrado de $4y$:

$$(11x)^2 = 121x^2$$
$$(4y)^2 = 16y^2$$

entonces $121x^2 - 16y^2$ es una diferencia de cuadrados y se factoriza:

$$\begin{aligned} 121x^2 - 16y^2 &= (11x)^2 - (4y)^2 \\ &= (11x + 4y)\,(11x - 4y) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $121x^2 - 16y^2 = (11x + 4y)(11x - 4y)$.

En general

El trinomio de la forma $a^2x^2 \pm 2abxy + b^2y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y se factoriza:

$$(ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2 = (ax + by)^2$$
$$(ax)^2 - 2(ax)(by) + (by)^2 = (ax - by)^2.$$

El binomio de la forma $a^2x^2 - b^2y^2$ es una diferencia de cuadrados y se factoriza:

$$(ax)^2 - (by)^2 = (ax + by)\,(ax - by).$$

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^2 + 20xy + 25y^2$

b) $9x^2 - 12xy + 4y^2$

c) $25a^2 + 60ab + 36b^2$

d) $9x^2 - 100y^2$

e) $25x^2 - 16y^2$

f) $49a^2 - 4b^2$

g) $\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2$

h) $9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2$

i) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{16}y^2$

j) $\frac{1}{64}x^2 - 9y^2$

k) $\frac{25}{9}a^2 - \frac{1}{49}b^2$

l) $\frac{4}{81}x^2 - \frac{25}{16}y^2$

m) $4x^2 + 4\sqrt{2}\,xy + 2y^2$

n) $5a^2 - 2\sqrt{15}\,ab + 3b^2$

o) $6x^2 + 8\sqrt{3}\,xy + 8y^2$

p) $100a^2 - 7b^2$

q) $6x^2 - \frac{1}{25}y^2$

r) $8x^2 - 11y^2$

2. Sin desarrollar los productos, factoriza los siguientes polinomios:

a) $9x^2 + 6x(y + 2) + (y + 2)^2$ Sustituye $z = y + 2$.

b) $(a - 3)^2 - 10(a - 3)b + 25b^2$

c) $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1)(3y - 4) + (3y - 4)^2$

d) $16a^2 - (b + 5)^2$

e) $(x + 9)^2 - (y - 9)^2$

f) $x^2 + y^2 + 2xy + 10x + 10y$

1.13 Método de la tijera, parte 1

Problema inicial

El polinomio $2x^2 + 13x + 15$ no es un trinomio cuadrado perfecto; sin embargo puede factorizarse en la forma $(ax + b)(cx + d)$ realizando lo siguiente:

1. Descomponer 2 y 15 como producto de dos factores.
2. En el siguiente esquema, sustituye los valores de a y c por los factores de 2, y los valores de b y d por factores de 15. Realiza las operaciones indicadas hasta que se cumpla $ad + bc = 13$.

$$\begin{array}{rcccl}
ax & & b & \longrightarrow & bcx\\
\text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar}\\
cx & & d & \longrightarrow & adx\\
\hline
acx^2 & & bd & & (ad+bc)x
\end{array}$$

3. Escribe $2x^2 + 13x + 15$ como $(ax + b)(cx + d)$.

Solución

1. Los números 2 y 15 pueden descomponerse como producto de dos factores de las siguientes maneras:

$$2 = 1(2) \qquad 15 = \begin{cases} 1(15) \\ 3(5) \end{cases}$$

El producto es conmutativo, por tanto 1(2) = 2(1).

2. Se sustituyen los valores de a y c por los factores de 2, y los valores de b y d por factores de 15 hasta que $ad + bc = 13$:

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 1$ y $d = 15$:

$$\begin{array}{rcccl}
1x & & 1 & \longrightarrow & 2x\\
\text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar}\\
2x & & 15 & \longrightarrow & 15x\\
\hline
2x^2 & & 15 & & 17x \ \times
\end{array}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 3$ y $d = 5$:

$$\begin{array}{rcccl}
1x & & 3 & \longrightarrow & 6x\\
\text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar}\\
2x & & 5 & \longrightarrow & 5x\\
\hline
2x^2 & & 15 & & 11x \ \times
\end{array}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 5$ y $d = 3$:

$$\begin{array}{rcccl}
1x & & 5 & \longrightarrow & 10x\\
\text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar}\\
2x & & 3 & \longrightarrow & 3x\\
\hline
2x^2 & & 15 & & \mathbf{13x} \ \checkmark
\end{array}$$

3. De lo anterior se obtiene: $2x^2 + 13x + 15 = (x + 5)(2x + 3)$.

Conclusión

Sea un trinomio de la forma $mx^2 + nx + p$ con m, n y p enteros diferentes de cero. Si existen a, b, c y d números enteros tales que $\boldsymbol{ac = m}$, $\boldsymbol{bd = p}$ y $\boldsymbol{ad + bc = n}$ entonces:

$$mx^2 + nx + p = (ax + b)(cx + d).$$

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios utilizando el esquema del Problema inicial:

a) $3a^2 + 8a + 5$
b) $2x^2 + 7x + 3$
c) $2x^2 + 9x + 9$
d) $2y^2 + 11y + 12$
e) $3y^2 + 8y + 4$
f) $3a^2 + 17a + 20$
g) $4x^2 + 5x + 1$
h) $6x^2 + 11x + 3$
i) $8y^2 + 22y + 5$
j) $6y^2 + 23y + 20$
k) $6x^2 + 17x + 12$
l) $10a^2 + 27a + 18$

1.14 Método de la tijera, parte 2

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^2 - 5x - 12$ b) $3y^2 - 11y + 8$

Utiliza el método visto en la clase anterior.

Solución

a) El coeficiente de x^2 y el término independiente deben escribirse como producto de dos números enteros. Como el término independiente es negativo entonces debe ser el resultado de multiplicar un número negativo por uno positivo. Los números 2 y –12 pueden escribirse como producto de dos factores de la siguiente forma:

$$2 = 1(2) \qquad -12 = \begin{cases} 1(-12) \text{ o } -1(12) \\ 2(-6) \text{ o } -2(6) \\ 3(-4) \text{ o } -3(4) \end{cases}$$

Debe tenerse en cuenta lo siguiente: el resultado de $ad + bc$ al sustituir $a = 1$, $c = 2$, $\mathbf{b = 1}$ y $\mathbf{d = -12}$ no será el mismo si se toman $a = 1$, $c = 2$, $\mathbf{b = -12}$ y $\mathbf{d = 1}$; es decir, intercambiar los valores de b y d dará un resultado diferente para $ad + bc$. El método de la tijera es, por tanto, una estrategia para factorizar trinomios que consiste en experimentar con posibles soluciones hasta encontrar la correcta; a esta estrategia de resolución de problemas se le llama **ensayo y error**.

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 1$ y $d = -12$:

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 1 & \rightarrow & 2x \\ \downarrow \text{Multiplicar} & \times & \downarrow \text{Multiplicar} & & \downarrow \text{Sumar} \\ 2x & & -12 & \rightarrow & -12x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & \mathbf{-10x} \end{array}$$

Al sustituir $b = -12$ y $d = 1$ el resultado de $ad + bc$ será igual a –23.

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 2$ y $d = -6$:

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 2 & \rightarrow & 4x \\ \downarrow \text{Multiplicar} & \times & \downarrow \text{Multiplicar} & & \downarrow \text{Sumar} \\ 2x & & -6 & \rightarrow & -6x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & \mathbf{-2x} \end{array}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 3$ y $d = -4$:

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 3 & \rightarrow & 6x \\ \downarrow \text{Multiplicar} & \times & \downarrow \text{Multiplicar} & & \downarrow \text{Sumar} \\ 2x & & -4 & \rightarrow & -4x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & \mathbf{2x} \end{array}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = 4$ y $d = -3$:

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & 4 & \rightarrow & 8x \\ \downarrow \text{Multiplicar} & \times & \downarrow \text{Multiplicar} & & \downarrow \text{Sumar} \\ 2x & & -3 & \rightarrow & -3x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & \mathbf{5x} \end{array}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2$, $b = -4$ y $d = 3$:

$$\begin{array}{ccccc} 1x & & -4 & \rightarrow & -8x \\ \downarrow \text{Multiplicar} & \times & \downarrow \text{Multiplicar} & & \downarrow \text{Sumar} \\ 2x & & 3 & \rightarrow & 3x \\ \hline 2x^2 & & -12 & & \mathbf{-5x} \end{array}$$

Luego, $2x^2 - 5x - 12 = (x - 4)(2x + 3)$.

b) Se toman a y c positivos; el coeficiente de y es negativo, mientras que el término independiente es positivo; esto indica que los números b y d deben ser ambos negativos. Teniendo en cuenta lo anterior, los números 3 y 8 pueden escribirse como producto de dos factores de las siguientes formas:

$$3 = 1(3) \qquad\qquad 8 = \begin{cases} -1(-8) \text{ o } -8(-1) \\ -2(-4) \text{ o } -4(-2) \end{cases}$$

- Si $a = 1$ y $c = 3$, $b = -1$ y $d = -8$:

$$\begin{array}{ccccc} 1y & & -1 & \longrightarrow & -3y \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ 3y & & -8 & \longrightarrow & -8y \\ \hline 3y^2 & & 8 & & -11y \end{array}$$

Por lo tanto, $3y^2 - 11y + 8 = (y - 1)(3y - 8)$.

Conclusión

Sea un trinomio de la forma $mx^2 + nx + p$ con m, n y p enteros diferentes de cero, y m positivo. Para factorizarlo en el producto de la forma $(ax + b)(cx + d)$ se realiza lo siguiente:

1. Se descomponen los números m y p en dos factores:

   a) si n y p son positivos entonces p debe escribirse como producto de dos números positivos;

   b) si n es negativo y p es positivo entonces p debe escribirse como producto de dos números negativos;

   c) si p es negativo entonces debe escribirse como producto de un número positivo y uno negativo.

2. En el siguiente esquema, se sustituyen los valores de a y c por los factores de m, y los valores de b y d por los factores de p, realizando todas las combinaciones hasta que $ad + bc = n$:

$$\begin{array}{ccccc} ax & & b & \longrightarrow & bcx \\ \text{Multiplicar}\downarrow & \times & \downarrow\text{Multiplicar} & & \downarrow\text{Sumar} \\ cx & & d & \longrightarrow & adx \\ \hline acx^2 & & bd & & (ad + bc)x \end{array}$$

3. Se escribe $mx^2 + nx + p$ como $(ax + b)(cx + d)$.

Al método anterior para factorizar trinomios se le llama **método de la tijera** por la forma cruzada en que se multiplican ax y d, cx y b en el esquema; también se le conoce como método del aspa simple.

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios utilizando el método de la tijera:

a) $2x^2 - x - 10$	b) $2y^2 - y - 15$	c) $3y^2 - 16y + 5$
d) $5x^2 + 2x - 3$	e) $5a^2 - 14a + 8$	f) $7x^2 - 5x - 2$
g) $4x^2 + 17x - 15$	h) $6y^2 - 17y + 12$	i) $8a^2 - 18a - 5$

2. Sea n un número entero tal que el trinomio $21x^2 + nx + 21$ puede factorizarse en el producto $(ax + b)(cx + d)$, con a, b, c y d números enteros. Explica por qué n es un número par.

3. El binomio $x + 1$ es un factor del trinomio $x^2 + mx - 2$, es decir, $x^2 + mx - 2 = (x + 1)(x - b)$. Además, el binomio $2x - 1$ es un factor del trinomio $nx^2 + 5x - 4$. Con base en lo anterior, calcula el resultado de $\frac{n}{m}$.

1.15 Combinaciones de métodos de factorización, parte 1

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x$

b) $6x^2y + 57xy + 27y$

Solución

a) Lo primero es extraer el factor común de los términos del polinomio, luego utilizar alguna de las factorizaciones vistas en las clases anteriores:

$$\begin{aligned} 6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x &= 2x(3xy - 2x + 15y - 10) && \text{factor común } 2x, \\ &= 2x[(3xy - 2x) + (15y - 10)] && \text{asociar los términos dentro del corchete,} \\ &= 2x[x(3y - 2) + 5(3y - 2)] && \text{extraer factor común } x \text{ y } 5 \text{ respectivamente,} \\ &= 2x(x + 5)(3y - 2) && \text{extraer factor común } 3y - 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $6x^2y - 4x^2 + 30xy - 20x = 2x(x + 5)(3y - 2)$.

b) Igual que en el literal anterior, debe extraerse el factor común de los términos del polinomio y luego utilizar los métodos estudiados en clases anteriores para factorizar:

$$6x^2y + 57xy + 27y = 3y(2x^2 + 19x + 9) \qquad \text{factor común } 3y.$$

Se utiliza el método de la tijera para factorizar $2x^2 + 19x + 9$:

$$\begin{array}{ccccc} 1x & \searrow\!\!\!\!\nearrow & 9 & \rightarrow & 18x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2x & & 1 & \rightarrow & x \\ \hline 2x^2 & & 9 & & 19x \end{array}$$

Por lo tanto, $6x^2y + 57xy + 27y = 3y(x + 9)(2x + 1)$.

En general

Cuando se factoriza un polinomio cualquiera, lo primero es verificar si sus términos tienen un monomio común, de ser así se extrae este monomio y se factoriza el otro polinomio utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

El Ministerio de Educación (MINED) ha elaborado una serie de videos sobre Matemática en lo cotidiano, uno de ellos presenta la factorización de polinomios. Puedes visualizarlo en el siguiente enlace:
https://goo.gl/ZgJVzs

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $20xy^2 - 20xy - 15x$

b) $90x^3 - 40xy^2$

c) $18x^3y + 12x^2y^2 + 2xy^3$

d) $6ab^3 - 33ab^2 + 36ab$

e) $225x^3y - 180x^2y^2 + 36xy^3$

f) $3a^2bc + 6a^2bd + 15a^2b - 2a^2c - 4a^2d - 10a^2$

2. Factoriza el polinomio $(x + 1)(x - 3y + 4)^2 - (x + 1)(2x + y - 5)^2$.

No desarrolles los productos, identifica en este caso el factor común.

1.16 Combinaciones de métodos de factorización, parte 2

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy$ b) $2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n$

Solución

a) Los términos del polinomio no poseen un factor común, sin embargo pueden asociarse aquellos que sí lo posean y extraer el factor común, o sea:

$$\begin{aligned} ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy &= (ax^2 + ay^2) + (bx^2 + by^2) + (-2axy - 2bxy) && \text{asociar términos;} \\ &= a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2) - 2xy(a + b) && \left.\right\} \text{extraer el factor común en cada caso.} \\ &= (a + b)(x^2 + y^2) - 2xy(a + b) \end{aligned}$$

Ahora se extrae el factor común polinomio $a + b$ y se factoriza el segundo factor:

$$\begin{aligned} ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy &= (a + b)(x^2 + y^2 - 2xy) && \text{extraer el factor común } a + b; \\ &= (a + b)(x^2 - 2xy + y^2) && \text{ordenar los términos;} \\ &= (a + b)(x - y)^2 && \text{factorizar } x^2 - 2xy + y^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - 2axy - 2bxy = (a + b)(x - y)^2$.

b) De forma similar al literal anterior, se asocian los términos que posean factor común y se extrae dicho factor:

$$\begin{aligned} 2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n &= 2x^2(m - n) + 5x(m - n) - 3(m - n) \\ &= (2x^2 + 5x - 3)(m - n) \end{aligned}$$

se factoriza $2x^2 + 5x - 3$ usando el método de la tijera:

$$\begin{array}{ccc} 1x & 3 & 6x \\ 2x & -1 & -x \\ \hline 2x^2 & -3 & 5x \end{array}$$

Luego, $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$ y $2mx^2 - 2nx^2 + 5mx - 5nx - 3m + 3n = (x + 3)(2x - 1)(m - n)$.

En general

Al factorizar un polinomio, si sus términos NO poseen un monomio común entonces se asocian los términos que sí lo posean, se extrae el factor común polinomio y se aplica al otro factor cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

También pueden asociarse términos convenientemente para factorizar un polinomio, sin que estos tengan factor común.

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4a^2x + 4a^2y - b^2x - b^2y$

b) $2cm^2 + dm^2 + 50cn^2 + 25dn^2 + 20cmn + 10dmn$

c) $4a^2x - 12abx + 9b^2x - 8a^2y + 24aby - 18b^2y$

d) $(a + b)(c - d)^2 + 2(a + b)(c - d)(2c + 3d) + (a + b)(2c + 3d)^2$

1.17 Practica lo aprendido

1. Factoriza los siguientes polinomios (factor común):

a) $4x^2y^2 + 6x^2y - 10xy$

b) $-15a^2b^2 + 12b^3 - 21b^2$

c) $-2a^2b^2c^2 - 20ab^2c - 10abc$

d) $\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{8}x$

e) $2ax + bx + 6ay + 3by$

f) $3mx - 2my - 12nx + 8ny$

g) $5ax - 2bx + \frac{5}{3}ay - \frac{2}{3}by$

h) $2mx + 4nx - 3my - 6ny + 5m + 10n$

2. Factoriza los siguientes trinomios en la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $x^2 - 17x + 70$

b) $y^2 + 3y - 40$

c) $a^2 - 3a - 54$

d) $b^2 + 14b + 33$

e) $m^2 + 2m - 35$

f) $n^2 - 8n - 20$

g) $4x^2 + 24x + 35$

h) $4y^2 - 24y + 27$

i) $9a^2 - 3a - 20$

En el problema 2, para los literales g), h) e i), realiza un cambio de variable de modo que el polinomio pueda transformarse en otro polinomio de la forma $m^2 + pm + q$ y luego factorizarlo en la forma $(m + a)(m + b)$.

3. Factoriza los siguientes polinomios (trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados):

a) $x^2 + 18x + 81$

b) $y^2 - 20y + 100$

c) $a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}$

d) $b^2 - 16$

e) $y^2 - 121$

f) $\frac{1}{49} - a^2$

g) $25x^2 + 30xy + 9y^2$

h) $\frac{9}{4}a^2 - \frac{25}{49}b^2$

i) $900x^2 - \frac{121}{100}y^2$

4. Factoriza utilizando el método de la tijera:

a) $2x^2 + 19x + 45$

b) $3y^2 + 26y + 16$

c) $5a^2 - 27a - 18$

d) $3a^2 - 10a + 8$

e) $5b^2 + 13b - 6$

f) $10a^2 - 23a - 5$

g) $12y^2 - 23y + 5$

h) $8x^2 + 10x - 25$

i) $6x^2 + 11x + 4$

5. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^3y - 100xy^3$

b) $5m^3 + 15m^2 - 350m$

c) $75a^3b - 60a^2b^2 + 12ab^3$

d) $-96x^3y - 144x^2y^2 - 54xy^3$

e) $4xy^3 - 26xy^2 + 42xy$

f) $60a^2m - 80a^2n + 30abm - 40abn$

6. Factoriza los siguientes polinomios sin desarrollar los productos:

a) $(5x - 2y + 9)^2 - (x - 8)^2$

b) $(a + 7)^2 + 2(a + 7)(b - 6) + (b - 6)^2$

c) $(2y + 3)^2 + 3(2y + 3) - 28$

d) $(6y - 1)^2 - 5(6y - 1) - 14$

e) $4(m + n)^2 - 4(m + n)(n - 2) + (n - 2)^2$

f) $3(4x + 1)^2 + 11(4x + 1) - 20$

7. Factoriza el siguiente polinomio: $amx + anx + amy + any + bmx + bnx + bmy + bny$

8. Utilizando factorización, calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $999^2 - 1$

b) $550^2 - 450^2$

c) $98^2 + 4(98) + 4$

d) $995^2 + 3(995) - 10$

2.1 División de polinomio por monomio

Problema inicial

Realiza las siguientes divisiones:

a) $(20xy + 16x - 4y) \div 4$ b) $(12ab - 21b^2) \div (3b)$

Para realizar la división de un polinomio por un número se multiplica el recíproco del número por cada término del polinomio.

Solución

a) Se cambia la división por la multiplicación con el número recíproco del divisor, es decir:

$$\begin{aligned}(20xy + 16x - 4y) \div 4 &= (20xy + 16x - 4y)\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= 20xy\left(\frac{1}{4}\right) + 16x\left(\frac{1}{4}\right) - 4y\left(\frac{1}{4}\right)\\ &= 5xy + 4x - y\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(20xy + 16x - 4y) \div 4 = 5xy + 4x - y$.

b) Como en el literal anterior la división $(12ab - 21b^2) \div (3b)$ equivale a multiplicar $12ab - 21b^2$ por el recíproco de $3b$; al realizar esto se obtiene:

$$\begin{aligned}(12ab - 21b^2) \div (3b) &= (12ab - 21b^2)\left(\frac{1}{3b}\right)\\ &= 12ab\left(\frac{1}{3b}\right) - 21b^2\left(\frac{1}{3b}\right)\\ &= \frac{\overset{4}{\cancel{12}}a\cancel{b}}{\cancel{3}\cancel{b}} - \frac{\overset{7}{\cancel{21}}\overset{b}{\cancel{b^2}}}{\cancel{3}\cancel{b}}\\ &= 4a - 7b\end{aligned}$$

$$\frac{b^2}{b} = \frac{\cancel{b}(b)}{\cancel{b}} = b$$

Luego, $(12ab - 21b^2) \div (3b) = 4a - 7b$.

En general

Para dividir un polinomio entre un monomio se multiplica cada término del polinomio por el recíproco del monomio y se simplifica el resultado.

Ejemplo

Realiza la división $(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy)$.

Aplicando lo visto en la conclusión:

$$\begin{aligned}(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy) &= 15x^2y^2\left(-\frac{1}{5xy}\right) - 40x^2y\left(-\frac{1}{5xy}\right) - 25xy\left(-\frac{1}{5xy}\right)\\ &= -\frac{\overset{3}{\cancel{15}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\overset{y}{\cancel{y^2}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}} + \frac{\overset{8}{\cancel{40}}\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}} + \frac{\overset{5}{\cancel{25}}\cancel{x}\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cancel{x}\cancel{y}}\\ &= -3xy + 8x + 5\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(15x^2y^2 - 40x^2y - 25xy) \div (-5xy) = -3xy + 8x + 5$.

Problemas

Realiza las siguientes divisiones:

a) $(-8abc + 22a^2 - 18a) \div (2a)$

b) $(18xyz + 24x^2yz) \div (3xyz)$

c) $(-10a^2b^2 + 45a^2bc - 20abc) \div (-5ab)$

d) $(4x^2y^2z^2 - 40x^2y^2z - 32xy^2z^2) \div (-4xyz)$

e) $(8a^2b + 12ab^2) \div (10ab)$

f) $(-14xyz^2 + 15xy^2z^2 - 18xyz) \div (-6xy)$

g) $(-2ab^2 + 5ab^3) \div \left(\frac{1}{2}b\right)$

h) $(9xyz - 2xy) \div \left(-\frac{3}{2}xy\right)$

2.2 División de polinomio por polinomio

Definición

Dados dos polinomios p y q en una variable, entonces existen los polinomios d y r tales que:

$$p = qd + r$$

donde r es cero o de grado menor a q. Como en la división de números: el polinomio $\boldsymbol{p}$ **es el dividendo**, $\boldsymbol{q}$ **el divisor**, $\boldsymbol{d}$ **es el cociente** y el polinomio $\boldsymbol{r}$ **es el residuo** de la división de p entre q.

En Educación Básica se aprende a dividir números en forma vertical, ubicando los elementos de la división como sigue:

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \cline{2-2} \text{Residuo} & \text{Cociente} \end{array}$$

El procedimiento para dividir polinomios es el siguiente:

1. Escribir la división en forma vertical y ordenar los términos del dividendo y el divisor según las potencias decrecientes de la variable. Si falta una potencia de la variable se coloca cero en el lugar correspondiente.
2. Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicar el divisor por el término del cociente encontrado en el paso 2. Luego, restar este resultado del dividendo.
4. Repetir este proceso, ahora con el resultado obtenido en el paso 3 como dividendo, hasta que el grado del polinomio del dividendo sea menor al grado del polinomio del divisor.

A este procedimiento también se le conoce como **división larga** de polinomios.

Ejemplo 1

Realiza la división $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ y escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

Los términos del dividendo y el divisor ya se encuentran ordenados de acuerdo a las potencias decrecientes de la variable. Se escribe $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$ como la división en forma vertical de números:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, o sea $x^3 \div x$, para obtener el primer término del cociente:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

Resultado de $x^3 \div x$

se multiplica el divisor por el primer término del cociente, o sea $(x + 2)(x^2) = x^3 + 2x^2$; este resultado se resta del dividendo:

Al restar $x^3 + 2x^2$ del dividendo, los términos del primero cambian de signo.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} + 3x^2 - 5x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^3} - 2x^2 \quad\quad\quad & x^2 \\ \cline{1-1} 0 + x^2 - 5x - 4 & \end{array}$$

Repite el proceso, tomando $x^2 - 5x + 4$ como dividendo:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5x - 4 & x + 2 \\ \cline{2-2} -x^3 - 2x^2 \quad\quad\quad & x^2 + x \\ \cline{1-1} 0 + \cancel{x^2} - 5x - 4 & \\ -\cancel{x^2} - 2x \quad\;\; & \\ \cline{1-1} 0 \quad - 7x - 4 & \end{array}$$

Resultado de $x^2 \div x$

Restar el resultado de $(x + 2)(x)$ de $x^2 - 5x - 4$.

Ahora se toma $-7x-4$ como dividendo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +3x^2 & -5x & -4 & x+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & & & x^2+x-7 \\ \cline{1-2}
0 & +x^2 & -5x & -4 & \\
 & -x^2 & -2x & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & -\cancel{7x} & -4 & \\
 & & +\cancel{7x} & +14 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & +10 &
\end{array}
$$

Resultado de $(-7x) \div x$

Restar el resultado de $(x+2)(-7)$ de $-7x-4$.

Puedes desarrollar la operación: $(x+2)(x^2+x-7)+10$ para comprobar si la división es correcta.

Luego, $x^3+3x^2-5x-4=(x+2)(x^2+x-7)+10$.

Ejemplo 2

Realiza la división $(2x^3-20x-50) \div (x^2+x-4)$. Escribe el dividendo en la forma $qd+r$.

El dividendo no posee el término con x^2, entonces se coloca cero en la posición donde "debería" estar este término al momento de escribir la división en forma vertical:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+0x^2-20x-50 & x^2+x-4 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

luego, se realiza el proceso visto en el ejemplo anterior:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{2x^3} & +0x^2 & -20x & -50 & x^2+x-4 \\ \cline{5-5}
-\cancel{2x^3} & -2x^2 & +8x & & 2x-2 \\ \cline{1-3}
0 & -\cancel{2x^2} & -12x & -50 & \\
 & \cancel{2x^2} & +2x & -8 & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -10x & -58 &
\end{array}
$$

Restar $(x^2+x-4)(2x)$ de $2x^3-20x-50$

Restar $(x^2+x-4)(-2)$ de $-2x^2-12x-50$

Resultado de $(2x^3) \div x^2$

Resultado de $(-2x^2) \div x^2$

Por lo tanto, $2x^3-20x-50=(x^2+x-4)(2x-2)-10x-58$.

Problemas

1. Realiza las siguientes divisiones y escribe el dividendo en la forma $qd+r$:
   a) $(x^3+x^2-5x+7) \div (x+3)$
   b) $(x^3+2x^2-5x+7) \div (x-1)$
   c) $(x^3+4x^2-8x-16) \div (x+5)$
   d) $(x^3-6x^2+4x+19) \div (x-3)$
   e) $(x^3+3x+9) \div (x+2)$
   f) $(x^3-7x^2+11) \div (x-2)$
   g) $(x^3+5x^2+5x+3) \div (x^2+4x+1)$
   h) $(x^3+x^2-12x+2) \div (x^2+3x-6)$
   i) $(x^3-5x^2+5x-1) \div (x-1)$
   j) $(x^3+4x^2-6x-5) \div (x+5)$
   k) $(2x^3-3x^2-x-2) \div (2x^2+x+1)$
   l) $(3x^3+2x^2-2x-1) \div (3x^2-x-1)$

2. Encuentra el valor de a para que el residuo de la división $(x^3+2x^2-x+a) \div (x-2)$ sea igual a cero.

3. Efectúa la división $(2x^4+6x^3-x^2+3x-1) \div (2x^2+1)$.

2.3 División sintética, parte 1

Definición

La **división sintética** es un método para realizar divisiones entre polinomios en una variable y se utiliza cuando el polinomio del divisor tiene la forma $x - a$. En este método se trabaja con el esquema:

$$\begin{array}{r|l|l} & \text{Dividendo} & \\ a & & \\ \hline & \text{Cociente} & \text{Residuo} \end{array}$$

Este método también funciona cuando se divide entre un polinomio de la forma $mx - a$. En este caso, se ubica el número $\frac{a}{m}$ en lugar de a.

El procedimiento es el siguiente:
1. Ordenar los términos del dividendo según las potencias decrecientes de la variable. Luego se escriben los coeficientes del dividendo en forma horizontal, en la parte con título “Dividendo”.
2. Se escribe el primer coeficiente del dividendo en la parte con título “Cociente”; luego se multiplica este número por el valor de a y se escribe el resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo.
3. Se suman las cantidades del paso 2, el resultado será el segundo coeficiente del cociente.
4. Repetir este proceso hasta obtener un número debajo del término independiente del dividendo.
5. El residuo será la suma de las cantidades de la última columna; los números a la izquierda del residuo corresponden a los coeficientes del polinomio del cociente, cuyo grado será uno menos que el grado del polinomio del dividendo.

Ejemplo

Utiliza la división sintética para realizar $(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) \div (x + 2)$. Escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

$x + 2 = x - (-2)$, es decir, $a = -2$

De acuerdo al esquema mostrado en la definición, se escriben los coeficientes del polinomio del dividendo en el lugar correspondiente, en forma horizontal; se sustituye también el valor de $a = -2$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

se escribe el primer coeficiente del dividendo en la parte correspondiente al cociente (este será el coeficiente de la variable con mayor potencia del polinomio del cociente). Este número se multiplica por –2 y se escribe el resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo, o sea, debajo de 3:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

$-2(1)$

se efectúa la suma 3 + (–2) y el resultado será el segundo número del cociente:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array}$$

Resultado de 3 + (–2)

se repite el proceso ahora multiplicando –2 por el segundo número del cociente, se escribe el resultado debajo de –5 y se suman ambas cantidades:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 & \\ -2 & & -2 & -2 & & \\ \hline & 1 & 1\ \xrightarrow{-2(1)} & -7 & & \end{array}$$

Resultado de –5 + (–2)

se multiplica –2 por –7, el resultado se escribe debajo de –4 y se suman ambas cantidades:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & 14 \\ \hline & 1 & 1 & -7\ \xrightarrow{-2(-7)} & 10 \end{array}$$

Resultado de –4 + 14

Este último resultado 10, corresponde al residuo de la división. Los números 1, 1 y –7 son los coeficientes del polinomio del cociente, cuyo grado será 2 pues el grado del polinomio del dividendo es 3; o sea, el polinomio del cociente es: $\boldsymbol{x^2 + x - 7}$.

Por lo tanto, $x^3 + 3x^2 - 5x - 4 = (x + 2)(x^2 + x - 7) + 10$.

A la división sintética también se le conoce como **método de Ruffini** o **regla de Ruffini** debido al matemático italiano Paolo Ruffini (1765 - 1822), que además estudió Medicina, Filosofía y Literatura en la Universidad de Módena en Italia. Puedes comprobar que el resultado de la división sintética es el mismo que el de la división larga.

Problemas

Realiza las siguientes divisiones y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(x^3 - 12x^2 + 23x - 5) \div (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -12 & 23 & -5 \\ 3 & \downarrow & 3 & & \\ \hline & 1\ \xrightarrow{3(1)} & & & \end{array}$$

b) $(x^3 + 9x^2 - 13x - 4) \div (x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 9 & -13 & -4 \\ 1 & \downarrow & 1 & & \\ \hline & 1\ \xrightarrow{1(1)} & & & \end{array}$$

c) $(x^3 - 4x^2 - 11x - 2) \div (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & -11 & -2 \\ -1 & \downarrow & -1 & & \\ \hline & 1\ \xrightarrow{-1(1)} & & & \end{array}$$

d) $(x^3 - 2x^2 - 31x + 20) \div (x + 5)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -31 & 20 \\ -5 & \downarrow & -5 & & \\ \hline & 1\ \xrightarrow{-5(1)} & & & \end{array}$$

e) $(2x^3 - 3x^2 - 4x - 1) \div (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

f) $(3x^3 - 11x^2 - 5x + 4) \div (x - 4)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -11 & -5 & 4 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

2.4 División sintética, parte 2

Problema inicial

Realiza la división $(x^3 - 8) \div (x - 2)$. Escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

Si falta una potencia de la variable debes colocar cero en el lugar correspondiente.

Solución

El polinomio $x^3 - 8$ no posee términos con las variables x^2 y x, entonces debe colocarse cero en el lugar correspondiente:

$$(x^3 + 0x^2 + 0x - 8) \div (x - 2)$$

Utilizando división sintética se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 0 & 0 & -8 \\
2 & \downarrow & 2 & 4 & 8 \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & 0
\end{array}$$

El polinomio del cociente es $x^2 + 2x + 4$ y el residuo es cero. Por lo tanto, $(x^3 - 8) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

En general

Al dividir dos polinomios en una variable, los términos del dividendo y del divisor siempre deben estar ordenados según las potencias decrecientes de la variable. Si falta una potencia de la variable se coloca cero en el lugar correspondiente.

Si el polinomio del divisor tiene la forma $x - a$ entonces se utiliza la división sintética; en cualquier otro caso se utiliza la división larga de polinomios.

Ejemplo

Realiza la división $(x^2 - 2x^3 - 20) \div (3 + x)$. Escribe el dividendo en la forma $qd + r$.

Deben ordenarse los polinomios del dividendo y del divisor de acuerdo a las potencias decrecientes de la variable, y colocar cero en el lugar donde falte una de la potencias:

$$(-2x^3 + x^2 + 0x - 20) \div (x + 3)$$

como el polinomio del divisor tiene la forma $x - a$ se utiliza división sintética, con $a = -3$:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & -2 & 1 & 0 & -20 \\
-3 & \downarrow & 6 & -21 & 63 \\
\hline
 & -2 & 7 & -21 & 43
\end{array}$$

Luego, $-2x^3 + x^2 + 0 - 20 = (x + 3)(-2x^2 + 7x - 21) + 43$.

Problemas

1. Realiza las siguientes divisiones y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(x^3 - 40x + 12) \div (x - 6)$

b) $(2x^3 - 65x - 45) \div (x + 5)$

c) $(x^3 - 50) \div (x - 4)$

d) $(7x - 2x^3 - 5) \div (x + 2)$

e) $(10x^2 - 10 - 3x^3) \div (-3 + x)$

f) $\left(x^3 + \frac{1}{8}\right) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$

2. Determina el valor de a para que el residuo de la división $(x^3 - 27) \div (x - a)$ sea igual a cero.

2.5 Teorema del residuo

Problema inicial

Dados los polinomios $p = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 7$ y $q = x - 5$:

1. Encuentra el residuo de la división $p \div q$.
2. Sustituye $x = 5$ en el polinomio p. ¿A qué es igual este resultado?

Solución

1. Utilizando la división sintética:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -9 & -6 & 7 \\
5 & & 10 & 5 & -5 \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & 2
\end{array}$$

El residuo al realizar $p \div q$ es 2.

2. Al sustituir $x = 5$ en el polinomio p se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2(5)^3 - 9(5)^2 - 6(5) + 7 &= 2(125) - 9(25) - 30 + 7 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Este resultado es el residuo de la división $p \div q$.

Sean p, q, d y r polinomios en una variable x tales que $p = qd + r$ y $q = x - a$. Así:

$$p = (x - a)d + r$$

Sustituir $x = a$ en p será igual a sustituir $x = a$ en la expresión $(x - a)d + r$, cuyo resultado es igual a r:

$$(a - a)d + r = (0)d + r = r$$

Luego, el residuo al efectuar la división de polinomios $p \div q$ es igual a sustituir $x = a$ en el polinomio p.

Teorema

Sean p y q dos polinomios en una variable, con q de la forma $x - a$. El residuo al realizar la división $p \div q$ es igual al valor obtenido cuando se sustituye $x = a$ en el polinomio p. A este resultado se le conoce como **teorema del residuo** o **teorema del resto**.

Ejemplo

Encuentra el residuo que se obtiene al realizar la división $(x^3 + 8x^2) \div (x + 7)$.

Utilizando el teorema, el residuo será igual al valor obtenido al sustituir $x = -7$ en $x^3 + 8x^2$, es decir:

$$\begin{aligned} x^3 + 8x^2 &= (-7)^3 + 8(-7)^2 \\ &= -343 + 392 \\ &= 49 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el residuo de la división $(x^3 + 8x^2) \div (x + 7)$ es 49.

Problemas

1. Encuentra el residuo que se obtiene al realizar las siguientes divisiones:

a) $(3x^3 - 2x^2 + x - 2) \div (x - 1)$
b) $(x^3 + 2x^2 - 14x + 2) \div (x - 2)$
c) $(-x^3 + 9x^2 + 7x + 15) \div (x - 10)$
d) $(3x^3 - 5x) \div (x + 1)$
e) $(2x^3 - 4x^2 - 21x + 30) \div (x + 3)$
f) $(x^3 - 7x^2 + 55) \div (x + 1)$
g) $(x^3 - x^2 + x) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$
h) $(x^3 - x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$

2. En cada caso determina el valor de a para que el residuo de la división $p \div q$ sea igual a cero:

a) $p = x^3 - 4ax + 3$, $q = x - 1$
b) $p = -x^3 + ax^2 - ax + a^2$, $q = x - 2$

2.6 Factorización utilizando el teorema del factor, parte 1

Problema inicial

Sea $p = x^3 + 4x^2 + x - 6$:

1. Verifica que el valor obtenido al sustituir $x = 1$ en el polinomio p es igual a cero.
2. Factoriza el polinomio p.

¿Cuál será el residuo al dividir p entre $x - 1$?

Solución

1. Sustituyendo $x = 1$ en el polinomio p se obtiene:

$$(1)^3 + 4(1)^2 + 1 - 6 = 1 + 4 - 5 = 0$$

es decir, el valor del polinomio p es igual a cero cuando $x = 1$.

2. Utilizando el teorema del residuo y con base en el resultado del literal a), el residuo al dividir el polinomio p entre $x - 1$ será igual a cero. Entonces p puede escribirse en la forma $(x - 1)d$, donde d es un polinomio de grado 2 (pues el producto es de grado 3). Para encontrar al polinomio d se realiza $p \div (x - 1)$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & \downarrow & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

luego, $d = x^2 + 5x + 6$ y este se puede factorizar en $(x + 3)(x + 2)$. Por lo tanto,

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 3)(x + 2).$$

Teorema

Sea p un polinomio cualquiera. Si el valor de p al sustituir $x = a$ es igual a cero entonces p puede escribirse en la forma $(x - a)d$, donde d es un polinomio de un grado menor que p. Este resultado se conoce como **teorema del factor**.

Ejemplo

Sea $p = x^3 - 7x + 6$. Verifica que si $x = -3$ entonces $p = 0$ y utiliza esto para factorizar el polinomio p.

Al sustituir $x = -3$ en p se obtiene:

$$(-3)^3 - 7(-3) + 6 = -27 + 21 + 6 = 0.$$

Por el teorema del factor, p puede escribirse en la forma $(x + 3)d$. Se utiliza división sintética para encontrar d:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ -3 & \downarrow & -3 & 9 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

luego, $d = x^2 - 3x + 2$ y este se factoriza como el producto $(x - 1)(x - 2)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x - 1)(x - 2).$$

Problemas

Para cada caso verifica que el valor del polinomio p es cero si $x = a$; luego factoriza p:

a) $p = x^3 + 2x^2 - x - 2$; $a = 1$

b) $p = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$; $a = -1$

c) $p = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$; $a = 2$

d) $p = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$; $a = -2$

e) $p = x^3 - 21x - 20$; $a = -4$

f) $p = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$; $a = 5$

2.7 Factorización utilizando el teorema del factor, parte 2

Problema inicial

Sea $p = x^3 - 19x - 30$:

1. Encuentra los divisores (positivos y negativos) del término independiente.
2. Determina en cuál de ellos p es igual a cero; luego factoriza el polinomio p.

Solución

1. Los divisores del término independiente –30 son: ±1, ±2, ±3, ±5, ±6, ±10, ±15 y ±30 (se coloca "±" para indicar el divisor positivo y negativo), estos pueden encontrarse al descomponer 30 en sus factores primos.

2. Se sustituye el valor de x en el polinomio p por los números encontrados en el literal anterior:

   a) si $x = 1$ entonces $(1)^3 - 19(1) - 30 = -48$;
   b) si $x = -1$ entonces $(-1)^3 - 19(-1) - 30 = -12$;
   c) si $x = 2$ entonces $(2)^3 - 19(2) - 30 = -60$;
   d) si $x = -2$ entonces $(-2)^3 - 19(-2) - 30 = 0$.

   Por el teorema del factor, el polinomio p se puede escribir en la forma $(x + 2)d$; para encontrar d se utiliza división sintética:

	1	0	–19	–30
–2		–2	4	30
	1	–2	–15	0

   entonces $d = x^2 - 2x - 15$ y este se puede factorizar en $(x + 3)(x - 5)$. Por lo tanto,

$$x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x + 3)(x - 5).$$

Conclusión

Sea $p = x^3 + mx^2 + nx + k$; los posibles valores de a tales que p pueda escribirse en la forma $(x - a)d$ son los divisores del término independiente k.

Es decir, para factorizar $p = x^3 + mx^2 + nx + k$ puede realizarse lo siguiente:

1. Encuentra los divisores (positivos y negativos) del término independiente.
2. Determina cuál de ellos hace que el valor del polinomio sea igual a cero.
3. Realiza la división para escribir p en la forma $(x - a)d$, donde d es un polinomio de grado 2.
4. Factoriza d con cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

Problemas

1. Factoriza los siguientes polinomios:

   a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$
   b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
   c) $x^3 + x^2 - 14x - 24$
   d) $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$
   e) $y^3 - 4y^2 + y + 6$
   f) $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$

2. Factoriza: $(x + 10)^3 + 1$.

   Sustituye $x + 10$ por y.

3. Encuentra la suma de los factores del polinomio: $x^3 - 13x - 12$.

2.8 Factorizaciones sucesivas

Problema inicial

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2$

b) $n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2$

Solución

a) Primero debe extraerse el factor común de los términos del polinomio, en este caso es y^2:

$$\begin{aligned} x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 &= (x^3 - 2x^2 - 9x + 18)y^2 \\ &= y^2(x^3 - 2x^2 - 9x + 18) \end{aligned}$$

se factoriza $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ utilizando el teorema del factor y división sintética; en este caso, el polinomio es igual a cero cuando $x = 2$:

$$(2)^3 - 2(2)^2 - 9(2) + 18 = 8 - 8 - 18 + 18 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 2 & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

de lo anterior, $x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = y^2(x-2)(x^2-9)$. El tercer factor, $x^2 - 9$, es una diferencia de cuadrados que se factoriza en el producto $(x+3)(x-3)$. Por lo tanto,

$$x^3y^2 - 2x^2y^2 - 9xy^2 + 18y^2 = y^2(x-2)(x+3)(x-3).$$

b) No todos los términos tienen un monomio común, así que se asocian aquellos que lo posean y se extrae el factor común polinomio:

$$\begin{aligned} n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 &= n^3(x^2 - y^2) - 3n^2(x^2 - y^2) + 4(x^2 - y^2) \\ &= (n^3 - 3n^2 + 4)(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

el polinomio $n^3 - 3n^2 + 4$ se factoriza usando el teorema del factor y división sintética, este se anula cuando $n = -1$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

de lo anterior, $n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = (n+1)(n^2 - 4n + 4)(x^2 - y^2)$. El factor $n^2 - 4n + 4$, es un trinomio cuadrado perfecto cuya factorización es $(n-2)^2$ y $x^2 - y^2$ puede factorizarse por diferencia de cuadrados, siendo $(x-y)(x+y)$. Por lo tanto,

$$n^3x^2 - n^3y^2 - 3n^2x^2 + 3n^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = (n+1)(n-2)^2(x-y)(x+y).$$

En general

Para factorizar un polinomio p se extrae el monomio común de los términos del polinomio y se factoriza el segundo factor. Si no todos los términos tienen un monomio común entonces se asocian estos de forma conveniente y se factorizan por cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores. Este proceso se repite hasta dejar expresado el polinomio original como producto de polinomios en su más simple expresión.

Problemas

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3xy^3 + 15xy^2 + 9xy - 27x$

b) $2abc^3 + 2abc^2 - 50abc - 50ab$

c) $m^3n^2 - 4m^2n^2 - 11mn^2 + 30n^2$

d) $4x^3y^2 - 16x^2y^2 - 12xy^2 + 72y^2 - x^3 + 4x^2 + 3x - 18$

2.9 Practica lo aprendido

1. Realiza las siguientes divisiones:

a) $(x^2y - xy^2 + y^3) \div (-y)$

b) $(24m^2n^2 + 30mn^2 - 15mn) \div (3mn)$

c) $(-a^3b^2 + 2a^2b^2 - 5ab^2) \div (-ab^2)$

d) $(35x^3y^3z^3 - 25x^3y^2z^2 - 45x^2y^2z^3) \div (5x^2y^2z^2)$

e) $(m^3n + m^3n^2 - 3m^2n^2) \div \left(\frac{1}{3}m^2n\right)$

f) $(2x^3y^2 - 3x^2y^2 - 5xy) \div \left(-\frac{2}{3}xy\right)$

2. Realiza las siguientes divisiones utilizando la división larga y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(2x^3 + 3x^2 + 9) \div (x + 2)$

b) $(2x^3 - 7x^2 - 3x + 2) \div (x - 4)$

c) $(2y^3 - 13y^2 + 14y + 2) \div (y - 5)$

d) $(2y^3 + 5y^2 - 8y - 6) \div (2y + 1)$

e) $(3x^3 + 11x^2 - x - 3) \div (x^2 + 4x + 1)$

f) $(5y^3 - 8y^2 - 14y + 4) \div (y^2 - 2y - 2)$

3. Utiliza la división sintética para efectuar las siguientes divisiones de polinomios y escribe el dividendo en la forma $qd + r$:

a) $(x^3 - 9x^2 + 21x + 2) \div (x - 4)$

b) $(y^3 - 3y^2 - 6y - 11) \div (y - 5)$

c) $(2m^3 + 4m^2 + 3m + 8) \div (m + 3)$

d) $(3n^3 + 4n^2 - 6n - 7) \div (n + 2)$

e) $(a^3 - 37a - 1) \div (a - 6)$

f) $(b^3 + 8b^2 - 29) \div (b + 7)$

g) $(2x^3 + 1) \div (x - 1)$

h) $(y^3 + 2y^2 - y + 1) \div \left(y - \frac{1}{2}\right)$

i) $(x^3 + x^2 + x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$

j) $\left(y^3 + \frac{1}{27}\right) \div \left(y + \frac{1}{3}\right)$

4. Encuentra el residuo que se obtiene al realizar las siguientes divisiones:

a) $(x^3 + x^2) \div (x - 2)$

b) $(8y^3 - 5y) \div (y + 1)$

c) $(5m^3 + 11m^2 - 9) \div (m + 2)$

d) $(n^3 - 13n^2 + 29n + 10) \div (n - 3)$

e) $(y^3 + 4y^2 - 6y - 6) \div (y + 5)$

f) $\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 1\right) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

5. Sea k un número entero. Para cada caso determina el valor de k para que el residuo de la división $p \div q$ sea igual a cero:

a) $p = kx^3 + (k + 1)x^2 + (k - 4)x - 2;\;\; q = x + 1$

b) $p = x^3 + (k - 3)x^2 + (k + 4)x - 6k;\;\; q = x - 3$

c) $p = x^3 - k^2x^2 + 2kx + k - 1;\;\; q = x - 1$

d) $p = k^2x^3 + (k + 1)x^2 - 7x + 3k;\;\; q = x + 2$

6. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-2xy^3 - 4xy^2 + 32xy + 64x$

b) $5x^3y^2 - 15x^2y^2 - 90xy^2 + 200y^2$

c) $-abc^3 - 9abc^2 - 11abc + 21ab$

7. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4a^3b^2 + 24a^2b^2 - 60ab^2 - 400b^2 - 9a^3 - 54a^2 + 135a + 900$

b) $(x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 30(x + 1) + 72$

3.1 Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización:

a) $x^2 - 15x + 56 = 0$ b) $5x^2 + 11x - 12 = 0$

> Si a y b son números reales tales que $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Solución

a) Para factorizar el polinomio se buscan dos números cuyo producto sea 56 y cuya suma sea igual a –15 (como el producto es positivo y la suma negativa ambos números deben ser negativos). Para encontrarlos puede descomponerse 56 en sus factores primos y buscar una combinación de ellos que cumplan lo dicho anteriormente. Se verifica entonces que: $(-8)(-7) = 56$ y $-8 - 7 = -15$, por lo que $x^2 - 15x + 56$ puede factorizarse en el producto $(x - 8)(x - 7)$. Luego:

$$(x - 8)(x - 7) = 0$$

como el producto es cero, uno de los factores debe ser igual a cero:

$$x - 8 = 0 \quad \text{o} \quad x - 7 = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones son $x = 8$ o $x = 7$.

b) Para factorizar $5x^2 + 11x - 12$ se descomponen 5 y –12 en dos factores y se aplica el método de la tijera:

$$\begin{array}{ccccc}
5x & & -4 & \longrightarrow & -4x \\
\downarrow & \times & \downarrow & & \downarrow \\
x & & 3 & \longrightarrow & 15x \\
\hline
5x^2 & & -12 & & 11x
\end{array}$$

entonces, $5x^2 + 11x - 12 = (5x - 4)(x + 3) = 0$, por lo que $5x - 4 = 0$ o $x + 3 = 0$. Entonces, $x = \frac{4}{5}$ o $x = -3$ son las soluciones de $5x^2 + 11x - 12 = 0$.

Definición

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$ se llama **ecuación cuadrática**. Para resolverla utilizando factorización se escribe $ax^2 + bx + c$ como producto de dos binomios lineales, se iguala cada uno de ellos a cero y se resuelven ambas ecuaciones lineales.

Ejemplo

Resuelve por factorización, la ecuación $\frac{5}{2}x^2 - 2 = -\frac{4}{3}x$.

Si se encuentra una ecuación equivalente a la dada pero cuyos coeficientes sean todos enteros, la factorización resultará más fácil. Así, al multiplicar ambos miembros por 6, se obtiene la ecuación equivalente $15x^2 - 12 = -8x$. Para utilizar factorización la ecuación debe estar igualada a cero: se pasa $-8x$ al miembro izquierdo y se obtiene la ecuación $15x^2 + 8x - 12 = 0$. Al factorizar por el método de la tijera se obtiene $(5x + 6)(3x - 2) = 0$, por lo que las soluciones de la ecuación son $x = -\frac{6}{5}$ y $x = \frac{2}{3}$.

Problemas

1. Calcula las soluciones de cada ecuación utilizando factorización.

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$ b) $x^2 - 15x + 44 = 0$ c) $x^2 + 4x + 3 = 0$

d) $x^2 + 7x - 60 = 0$ e) $x^2 + 16x + 63 = 0$ f) $\frac{1}{4}x^2 - x - 15 = 0$

g) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 = 0$ h) $3x^2 + 13x - 10 = 0$ i) $8x^2 - 38x + 35 = 0$

j) $4x^2 + 21x - 18 = 0$ k) $0.2x^2 + 0.3x - 0.2 = 0$ l) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{1}{5} = 0$

2. Encuentra una ecuación de grado 2 que tenga por soluciones a 1 y –15.

3.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas con la fórmula general

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + 3x - 1 = 0$

b) $x^2 - 2x - 6 = 0$

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Solución

a) Esta ecuación no puede resolverse por factorización; cuando esto ocurre se resuelve utilizando la fórmula general. En este caso, $a = 2$, $b = 3$ y $c = -1$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Entonces, las soluciones de $2x^2 + 3x - 1 = 0$ son:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \text{ y } x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}.$$

b) Si se intenta resolver la ecuación por factorización, se llega a que no es posible encontrar dos números enteros cuyo producto sea -6 y cuya suma sea -2. De forma similar al literal anterior, se utiliza la fórmula general con $a = 1$, $b = -2$ y $c = -6$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Entonces, las soluciones de $x^2 - 2x - 6 = 0$ son:

$$x = 1 + \sqrt{7} \text{ y } x = 1 - \sqrt{7}.$$

Observa que $\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2}$ se simplifica porque puede sacarse 2 como factor común en el numerador:

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{7})}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Conclusión

Cuando una ecuación cuadrática no pueda resolverse mediante factorización, se utiliza la fórmula general.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $x = 7 - \frac{4}{x}$.

Nótese que $x = 0$ no es solución de la ecuación. La ecuación puede llevarse a una ecuación cuadrática al multiplicar por x ambos miembros:

$$x^2 = 7x - 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 4 = 0$$

esta ecuación no puede resolverse mediante factorización, por lo que al aplicar la fórmula general se obtiene:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 16}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Entonces, las soluciones de $x = 7 - \frac{4}{x}$ son:

$$x = \frac{7 + \sqrt{33}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}.$$

Problemas

Calcula las soluciones de cada ecuación:

a) $3x^2 + x - 1 = 0$

b) $x^2 = -2(2x + 1)$

c) $x^2 - 3(2x + 1) = 0$

d) $2x(3 - x) = 3$

e) $x = x^2 - 1$

f) $x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{45}{4} = 0$

g) $2x = 8 - \frac{5}{x}$

h) $x = -3 + \frac{2}{x}$

3.3 Definición de número complejo

Definición

Se llama **unidad imaginaria**, y se denota por i, al número que satisface $i^2 = -1$, es decir:

$$i = \sqrt{-1}\,.$$

Dados dos números reales cualesquiera a y b, el número de la forma $z = a + bi$ se llama **número complejo**. Al conjunto de todos los números complejos, es decir, aquellos de la forma $a + bi$ se le denota por $\mathbb{C}$.

Sea $z = a + bi$ un número complejo:

1. Si $b = 0$ entonces z es un número real.
2. Si a y b son diferentes de cero entonces z se llama **número imaginario.**
3. Si $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces $z = bi$ se llama **número imaginario puro**.

Para denotar números complejos, usualmente se utilizan las letras z y w. Si se necesitan más de dos números complejos, se utilizan subíndices, por ejemplo, z_1, z_2, z_3, z_4, etc.

Al número a se le llama **parte real** de z, y se denota por Re(z); mientras que al número b se le llama **parte imaginaria** de z, y se denota por Im(z). Dos números complejos son iguales si sus correspondientes partes real e imaginaria son iguales, y viceversa.

Ejemplo 1

Para cada caso, determina Re(z) e Im(z):

a) $z = 5 - 7i$

b) $z = \sqrt{2} + i$

c) $z = \frac{-4 + 9i}{2}$

a) Re(z) = 5
Im(z) = –7

b) Re(z) = $\sqrt{2}$
Im(z) = 1

c) Lo primero es reescribir z:

$$z = \frac{-4}{2} + \frac{9i}{2} = -2 + \frac{9}{2}i$$

Luego, Re(z) = –2 e Im(z) = $\frac{9}{2}$.

Ejemplo 2

Sean $z = 2x + 3i$ y $w = 4 + (y - 1)i$ dos números complejos. Determina los valores de los números reales x y y para que se cumpla $z = w$.

Para que se cumpla la igualdad entre los números complejos z y w debe ocurrir:

$$\text{Re}(z) = \text{Re}(w) \qquad\qquad \text{Im}(z) = \text{Im}(w)$$
$$2x = 4 \qquad\qquad 3 = y - 1$$

al resolver ambas ecuaciones lineales se obtiene:

$$x = 2 \qquad\qquad 4 = y$$

Por lo tanto, para que se cumpla $z = w$ los valores de x y y deben ser 2 y 4 respectivamente.

Problemas

1. Para cada caso, determina la parte real y la parte imaginaria de z:

a) $z = -3 + 8i$ b) $z = \frac{1}{2} - 6i$ c) $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}\,i$

d) $z = 11i$ e) $z = 3$ f) $z = \frac{-12 - i}{3}$

2. Para cada caso, determina los valores de los números reales x y y para que se cumpla $z = w$:

a) $z = (x + 1) + 5i$, $w = -6 + (4 - y)i$ b) $z = 10 - 3xi$, $w = 8y + 15i$

c) $z = (x + y) + 4i$, $w = -2x + 3yi$ d) $z = -x + 3yi$, $w = (y - 1) - xi$

3.4 Suma, resta y multiplicación de números complejos

Problema inicial

Sean $z = 3 + 7i$ y $w = 2 - 3i$. ¿Cuál es el resultado de las operaciones $z + w$, $z - w$ y zw?

Considera el número i como una variable para realizar las operaciones.

Solución

Como en la suma de polinomios, solo pueden sumarse aquellos términos que sean "semejantes":

$$\begin{aligned} z + w &= 3 + 7i + 2 - 3i \\ &= (3 + 2) + [7 + (-3)]i \\ &= (3 + 2) + (7 - 3)i \\ &= 5 + 4i \end{aligned}$$

Para la resta deben cuidarse los signos de la parte real e imaginaria de w:

$$\begin{aligned} z - w &= 3 + 7i - (2 - 3i) \\ &= (3 - 2) + [7 - (-3)]i \\ &= (3 - 2) + (7 + 3)i \\ &= 1 + 10i \end{aligned}$$

La multiplicación se desarrolla como si fuese el producto de binomios, y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} zw &= (3 + 7i)(2 - 3i) \\ &= 3(2) + [3(-3) + 7(2)]i + 7(-3)i^2 \\ &= 6 + (-9 + 14)i - 21(-1) \\ &= 6 + 21 + 5i \\ &= 27 + 5i \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z + w = 5 + 4i$, $z - w = 1 + 10i$ y $zw = 27 + 5i$.

Definición

La suma y **resta de los números complejos** $z = a + bi$ y $w = c + di$ se denotan por $z + w$ y $z - w$ respectivamente, y se definen:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$
$$z - w = (a - c) + (b - d)i.$$

El **producto de los números complejos** $z = a + bi$ y $w = c + di$ se denotan por zw y se define:

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

El **complejo conjugado** de $z = a + bi$, o simplemente conjugado de z, es otro número complejo denotado por $\overline{z}$ tal que $\overline{z} = a - bi$. Se llama **módulo** del número complejo $z = a + bi$ al número real denotado por $|z|$ y definido por:

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Problemas

1. Para cada caso, calcula $z + w$, $z - w$ y zw. Además, encuentra el conjugado y el módulo de cada número:
   a) $z = -5 + 4i$, $w = 2 - 3i$
   b) $z = 4 - i$, $w = -6 + 4i$
   c) $z = -3 - 2i$, $w = -5 + i$
   d) $z = 8 - i$, $w = 12 + 3i$
   e) $z = 5 - 2i$, $w = 6i$
   f) $z = -3 + 8i$, $w = 2$

2. Sea $z = a + bi$ un número complejo. Demuestra lo siguiente:
   a) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
   b) $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$

3.5 División de números complejos

Problema inicial

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$. Para calcular $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$ realiza los siguientes pasos:

1. Multiplica por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{c-di}{c-di}$.
2. Efectúa los productos indicados.
3. Encuentra el resultado.

Solución

1. Al multiplicar por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}}$ se está multiplicando por 1, o sea que la expresión original no se altera:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di}$$
$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}.$$

2. Al efectuar los productos indicados, se obtiene:

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

3. La división de z entre w es entonces el número complejo:

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Definición

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$. La división de z entre w se denota por $\frac{z}{w}$ y está dada por:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Ejemplo

Divide $4 + 3i$ entre $5 - i$.

En este caso, al multiplicar por el conjugado de $5 - i$ en el numerador y denominador, se tiene que:

$$\frac{4+3i}{5-i} = \frac{4+3i}{5-i} \times \frac{5+i}{5+i} = \frac{(4+3i)(5+i)}{5^2+1^2} = \frac{(20-3)+(4+15)i}{26} = \frac{17+19i}{26} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i.$$

Por lo tanto, $\frac{4+3i}{5-i} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i.$

Problemas

1. Para cada caso, calcula $\frac{z}{w}$:

a) $z = 3$, $w = 2 + 4i$
b) $z = 5$, $w = 2 - 7i$
c) $z = -7i$, $w = 6 - 2i$
d) $z = 2 + 9i$, $w = -3 - i$
e) $z = -4 + 6i$, $w = 2 + 7i$
f) $z = -3 - 2i$, $w = 5 + 2i$
g) $z = 4 - 2i$, $w = -5i$
h) $z = -2 + 6i$, $w = 3i$

2. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$; realiza lo siguiente:

a) Calcula $\frac{z}{w}$
b) Calcula $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$
c) Calcula $\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
d) Compara los resultados de b) y c)

Observa que el objetivo en cada una de las operaciones vistas con los números complejos es escribir la operación como un número complejo $u + vi$. Así, en el caso de la división, el objetivo es quitar el número complejo del denominador multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador.

3.6 Raíces cuadradas de números negativos*

Problema inicial

Sea x un número complejo. Determina todos los valores de x que satisfacen: $x^2 = -5$

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

Solución

Se busca el número complejo tal que, al elevarlo al cuadrado, su resultado sea igual a –5; observa que –5 puede escribirse como el producto 5(–1), entonces: $x^2 = 5(-1) = 5i^2$,

luego, $x^2 = 5i^2$ se cumple para $x = \sqrt{5}\,i$ o $x = -\sqrt{5}\,i$. En efecto:

$$\left(\sqrt{5}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 i^2 = -5 \qquad \left(-\sqrt{5}\,i\right)^2 = \left(-\sqrt{5}\right)^2 i^2 = -5$$

Por lo tanto, los valores de x que satisfacen $x^2 = -5$ son $x = \sqrt{5}\,i$ y $x = -\sqrt{5}\,i$.

Definición

Sea a un número real positivo ($a > 0$). Las raíces cuadradas de $-a$ son $\sqrt{a}\,i$ y $-\sqrt{a}\,i$. Además:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i.$$

Ejemplo

Escribe los siguientes números en la forma $a + bi$:

a) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-5}$

b) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}$

$-i^2 = -(-1) = 1$

Primero se escriben las raíces de números negativos en la forma $\sqrt{a}\,i$, luego se realizan las operaciones respectivas:

a) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-5} = \left(\sqrt{3}\,i\right)\left(\sqrt{5}\,i\right)$

$= \sqrt{15}\,i^2$

$= -\sqrt{15}$

De lo anterior se concluye que:

$\sqrt{-3}\,\sqrt{-5} = -\sqrt{15}$.

b) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{5}}$

$= \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$

Luego, $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$.

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\,i}\left(\dfrac{-i}{-i}\right)$

$= \sqrt{\dfrac{3}{5}}\left(\dfrac{-i}{-i^2}\right)$

$= \sqrt{\dfrac{3}{5}}\left(\dfrac{-i}{1}\right)$

$= -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$

Luego, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$.

En general, si a y b son números reales positivos:

1. $\sqrt{-a}\sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-b)}$
2. $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} \neq \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$

También puedes multiplicar por el conjugado de $\sqrt{5}\,i$, o sea, $-\sqrt{5}\,i$ y verificar que se llega a la misma respuesta.

Problemas

1. Para cada caso, encuentra las raíces cuadradas de $-a$ si:

a) $a = 2$ b) $a = 3$ c) $a = 7$ d) $a = 10$

e) $a = 4$ f) $a = 25$ g) $a = \dfrac{1}{3}$ h) $a = \dfrac{1}{9}$

2. Escribe los siguientes números en la forma $a + bi$:

a) $\sqrt{-7}\,\sqrt{2}$ b) $\sqrt{7}\,\sqrt{-2}$ c) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-7}$

d) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}$ e) $\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}$

3.7 Discriminante de la ecuación cuadrática

Problema inicial

De la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se define el número $\Delta = b^2 - 4ac$. Para cada una de las siguientes ecuaciones calcula el valor de Δ, establece su signo y resuelve cada una utilizando la fórmula general (considera las soluciones complejas):

a) $2x^2 - 5x - 1 = 0$ b) $x^2 - 2x + 1 = 0$ c) $x^2 + 3x + 5 = 0$

Δ es una letra griega llamada "Delta".

Solución

a) Al calcular Δ se tiene:

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-1) = 25 + 8 = 33$$

es decir, $\Delta > 0$. Al resolver la ecuación utilizando la fórmula general (el valor de Δ es el radicando de la fórmula general):

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{33}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

La ecuación $2x^2 - 5x - 1 = 0$ tiene dos soluciones reales.

b) El valor de Δ es:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

o sea, $\Delta = 0$. Luego, el valor del radicando en la fórmula general es cero y:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene una solución real.

c) El valor de Δ es:

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$$

es decir, $\Delta < 0$. Al resolver la ecuación utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}\, i}{2}.$$

La ecuación $x^2 + 3x + 5 = 0$ tiene dos soluciones complejas.

Definición

Dada una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$, se le llama **discriminante** de la ecuación cuadrática al número $\Delta = b^2 - 4ac$. El número y tipo de soluciones de la ecuación cuadrática puede determinarse de acuerdo a lo siguiente:

1. Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales, es decir, pertenecen a los números reales.
2. Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real.
3. Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene dos soluciones imaginarias, es decir, de la forma $u + vi$ con $v \neq 0$.

Ejemplo

¿Cuál debe ser el valor de m para que la ecuación $x^2 + mx + 4 = 0$ tenga una solución real?
Para que tenga una solución real debe cumplirse que $\Delta = 0$, es decir $\Delta = m^2 - 16 = 0$. Luego, $m = 4$ o $m = -4$.
Por lo tanto, para que la ecuación $x^2 + mx + 4 = 0$ tenga una solución real m debe ser 4 o -4.

Problemas

1. Determina si las soluciones de cada ecuación son reales o imaginarias:

a) $4x^2 + x - 3 = 0$ b) $4x^2 + x + 14 = 0$
c) $9x^2 - 30x + 25 = 0$ d) $15x^2 + 12 = -8x$

2. ¿Cuál debe ser el valor de m para que la ecuación $x^2 - 6x + 5 - m = 0$ tenga una solución real?

3.8 Factorización de un polinomio*

Problema inicial

Utilizando números complejos factoriza el polinomio $x^2 + 12x + 40$.

Solución

Similar al caso de la factorización del trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, en este caso deben encontrarse dos números complejos cuyo producto sea igual a 40 y cuya suma sea igual a 12. Primero se resuelve la ecuación $x^2 + 12x + 40 = 0$ utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1)(40)}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-12 \pm 4i}{2} = -6 \pm 2i$$

luego,

$$\begin{array}{rcl} x = -6 + 2i & \text{o} & x = -6 - 2i \\ x - (-6 + 2i) = 0 & \text{o} & x - (-6 - 2i) = 0 \\ x + 6 - 2i = 0 & \text{o} & x + 6 + 2i = 0 \end{array}$$

sean $z = 6 - 2i$ y $w = 6 + 2i$; puede comprobarse que $zw = 40$ y $z + w = 12$, y se tiene:

$$(x + z)(x + w) = x^2 + (z + w)x + zw = x^2 + 12x + 40.$$

Por lo tanto, $x^2 + 12x + 40 = [x - (-6 + 2i)][x - (-6 - 2i)] = (x + 6 - 2i)(x + 6 + 2i)$.

Conclusión

Si x_1 y x_2 son las soluciones (reales o imaginarias) de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ entonces:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ejemplo

Factoriza el polinomio $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$.

Los divisores del término independiente son $a = \pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$. Al sustituir $x = 2$ en el polinomio original se obtiene:

$$2^3 - 6(2)^2 + 15(2) - 14 = 8 - 24 + 30 - 14 = 0$$

por el teorema del factor, $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)d$, donde d es un polinomio de grado 2; utilizando división sintética se obtiene:

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)(x^2 - 4x + 7)$$

el siguiente paso es factorizar el polinomio $x^2 - 4x + 7$; esto puede realizarse utilizando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 2 \pm \sqrt{3}i.$$

Por lo tanto, $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)[x - (2 + \sqrt{3}i)][x - (2 - \sqrt{3}i)] = (x - 2)(x - 2 - \sqrt{3}i)(x - 2 + \sqrt{3}i)$.

Problemas

Factoriza cada polinomio:

a) $x^2 - 12x + 40$
b) $5x^2 + 8x + 5$
c) $x^3 - 6x^2 + 2x + 24$
d) $x^3 + x + 10$
e) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$
f) $x^3 - 7x^2 + 20x - 50$

3.9 Raíces de un polinomio*

Problema inicial

Un número α (real o imaginario) es una raíz de un polinomio en variable x si al sustituir $x = \alpha$ en el polinomio el resultado es cero. Calcula las raíces de los siguientes polinomios:

a) $3x - 12$ b) $2x^2 + 7x + 3$ c) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$

Solución

a) Para determinar las raíces de $3x - 12$ hay que encontrar los valores de x que hacen cero el polinomio; es decir, basta resolver la ecuación $3x - 12 = 0$ para determinar las raíces. La solución de la ecuación es $x = 4$, entonces 4 es la única raíz de $3x - 12$.

b) De igual forma que en el literal anterior, basta resolver la ecuación $2x^2 + 7x + 3 = 0$ para calcular las raíces del polinomio $2x^2 + 7x + 3$. Resolviendo por factorización:

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3) = 0.$$

Entonces $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -3$ son las raíces del polinomio $2x^2 + 7x + 3$.

c) Como el polinomio es de grado 3 se utiliza el teorema del factor para determinar alguno de los valores que hacen cero el polinomio; se sustituye x por alguno de los números ±1, ±29:

$$\text{si } x = -1, \text{ entonces } (-1)^3 - 3(-1)^2 + 25(-1) + 29 = -1 - 3 - 25 + 29 = 0$$

se utiliza división sintética para realizar $(x^3 - 3x^2 + 25x + 29) \div (x + 1)$ y factorizar el polinomio original; de esto se obtiene:

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x + 1)(x^2 - 4x + 29)$$

una de las raíces del polinomio es $x = -1$. Se calculan ahora las raíces de $x^2 - 4x + 29$ resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 29 = 0$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(29)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i.$$

Por lo tanto, las raíces de $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$ son $x = -1$, $x = 2 + 5i$ y $x = 2 - 5i$.

Conclusión

Sea p un polinomio en una variable:

1. Si p es de grado 1, entonces tiene una raíz compleja.

2. Si p es de grado 2 entonces tiene dos raíces complejas, contando aquellas que se repiten. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 2x + 1$ puede escribirse como $(x + 1)^2$ y $x = -1$ es una raíz doble.

3. Si p es de grado 3, entonces tiene tres raíces complejas, contando aquellas que se repiten.

Un polinomio de grado 1 se llama **lineal**, al de grado 2 se le conoce como polinomio **cuadrático** y si es de grado 3 se le llama polinomio **cúbico**. Un polinomio puede ser de grado n, para n un entero no negativo, y cuando es de una variable es de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde a_n es distinto de cero.

Un polinomio de grado n tiene n raíces complejas. Si $x_1, x_2, \ldots, x_r$ son las raíces (distintas) del polinomio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ entonces puede factorizarse como:

$$a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_r)^{m_r}$$

donde a los m_i se les llama **multiplicidades de la raíz** x_i y cumplen que:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n.$$

Si un polinomio tiene una raíz imaginaria, el conjugado también es raíz.

3.10 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, analizando primero si puede resolverse por factorización; de lo contrario, utiliza la fórmula general:

a) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$

b) $x^2 + 5x = 0$

c) $x(3x + 10) = 77$

d) $15x^2 - 14 = 29x$

e) $22x^2 + 67x - 35 = 0$

f) $2.7x^2 + 4.2x + 0.8 = 0$

g) $x^2 - 6x + 12 = 0$

h) $x^2 + 5x + 6 = 0$

i) $x^2 - 2x + 26 = 0$

j) $6x^2 + x + 12 = 0$

k) $x^2 + 3x + 6 = 0$

l) $-3x^2 - 5 = -x$

m) $4x^2 + x + 14 = 0$

n) $15x^2 + 8x = -12$

o) $x^2 + 4x + 14 = 0$

p) $x^2 + 8x + 17 = 0$

2. Calcula el valor de x si:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

¿Qué se puede observar de la expresión encerrada en el recuadro rojo?

$$x = 1 + \cfrac{1}{\boxed{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

3. Sea $x = 2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \ddots}}}}$

Demuestra que $x = 3$.

4. Para cada caso, realiza $z + w$ y $z - w$:

a) $z = 2 - i$, $w = 3 + 7i$

b) $z = -3 + 2i$, $w = 2 - 4i$

c) $z = -6 - i$, $w = i$

d) $z = 2 + i$, $w = 8 - i$

e) $z = 1 - 3i$, $w = 5 - 2i$

f) $z = 9i$, $w = 5i$

g) $z = -5$, $w = 15i$

h) $z = 7 - 6i$, $w = -11 - 3i$

5. Para cada caso, realiza zw y $\frac{z}{w}$:

a) $z = -5 + 4i$, $w = 2 - 3i$

b) $z = 4 - i$, $w = -6 + 4i$

c) $z = -3 - 2i$, $w = -5 + i$

d) $z = 8 - i$, $w = 12 + 3i$

e) $z = 5 - 2i$, $w = 6i$

f) $z = -3 + 8i$, $w = 2$

g) $z = -9 + 7i$, $w = 4 + 9i$

h) $z = 7 - 6i$, $w = -11 - 3i$

6. Factoriza cada polinomio utilizando números complejos:

a) $4x^2 + x + 1$

b) $9x^2 + 28x + 50$

c) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

d) $x^4 - 11x^3 + 40x^2 - 56x + 24$

3.11 Problemas de la unidad

1. Factoriza los siguientes polinomios:

   a) $(x + y)^2 - (x - y)^2$

   b) $(x + y)^2 + (x - y)^2$

2. Utiliza productos notables para calcular el resultado de las siguientes operaciones:

   a) 190(210)

   b) 96(104) – 94(106)

   c) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

   d) $\sqrt{100(101)(102)(103) + 1}$

   Toma $x = \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ y calcula x^2.

   Considera $x = 100$ y multiplica el primero con el último y el segundo con el tercero.

3. Considera los números complejos $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$ y $z_3 = 1 - i$. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

   a) $z_1 + z_2 + z_3$

   b) $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$

   c) $z_1 z_2 z_3$

   d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

   e) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$

   f) $\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$

4. Desarrolla cada uno de los productos para demostrar las igualdades:

   a) $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x + abc$

   b) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

   c) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

5. Encuentra un polinomio de segundo grado en una variable x que cumpla lo siguiente: el coeficiente de x y el término independiente sean iguales; los valores del polinomio al sustituir x por 1 y 2 sean 7 y 18 respectivamente.

6. Sean x y y números reales positivos. Factoriza los siguientes polinomios (puedes dejar los términos de los factores con raíces cuadradas):

   a) $x + 2\sqrt{x} + 1$

   b) $x - y$

   c) $y + 4\sqrt{y} + 4$

   d) $x - 1$

7. Demuestra que para cualquier número complejo z, se cumple que $|z| \geq 0$.

8. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, ¿se cumple que $|zw| = |z||w|$?

9. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, ¿se cumple que $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$?

10. Determina los valores que puede tomar el número real m para que la ecuación $mx^2 + 2x + 1 = 0$ tenga dos soluciones reales.

11. Determina los valores que puede tomar el número real m para que la ecuación $x^2 + 2x + m = 0$ tenga dos soluciones imaginarias.