3.1 Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización:

a) $x^2 - 15x + 56 = 0$ b) $5x^2 + 11x - 12 = 0$

Si a y b son números reales tales que $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Solución

a) Para factorizar el polinomio se buscan dos números cuyo producto sea 56 y cuya suma sea igual a –15 (como el producto es positivo y la suma negativa ambos números deben ser negativos). Para encontrarlos puede descomponerse 56 en sus factores primos y buscar una combinación de ellos que cumplan lo dicho anteriormente. Se verifica entonces que: $(-8)(-7) = 56$ y $-8 - 7 = -15$, por lo que $x^2 - 15x + 56$ puede factorizarse en el producto $(x - 8)(x - 7)$. Luego:

$$(x - 8)(x - 7) = 0$$

como el producto es cero, uno de los factores debe ser igual a cero:

$$x - 8 = 0 \quad \text{o} \quad x - 7 = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones son $x = 8$ o $x = 7$.

b) Para factorizar $5x^2 + 11x - 12$ se descomponen 5 y –12 en dos factores y se aplica el método de la tijera:

$$\begin{array}{ccccc} 5x & \searrow\!\!\!\!\!\nearrow & -4 & \rightarrow & -4x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x & & 3 & \rightarrow & 15x \\ \hline 5x^2 & & -12 & & 11x \end{array}$$

entonces, $5x^2 + 11x - 12 = (5x - 4)(x + 3) = 0$, por lo que $5x - 4 = 0$ o $x + 3 = 0$. Entonces, $x = \frac{4}{5}$ o $x = -3$ son las soluciones de $5x^2 + 11x - 12 = 0$.

Definición

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$ se llama **ecuación cuadrática**. Para resolverla utilizando factorización se escribe $ax^2 + bx + c$ como producto de dos binomios lineales, se iguala cada uno de ellos a cero y se resuelven ambas ecuaciones lineales.

Ejemplo

Resuelve por factorización, la ecuación $\frac{5}{2}x^2 - 2 = -\frac{4}{3}x$.

Si se encuentra una ecuación equivalente a la dada pero cuyos coeficientes sean todos enteros, la factorización resultará más fácil. Así, al multiplicar ambos miembros por 6, se obtiene la ecuación equivalente $15x^2 - 12 = -8x$. Para utilizar factorización la ecuación debe estar igualada a cero: se pasa $-8x$ al miembro izquierdo y se obtiene la ecuación $15x^2 + 8x - 12 = 0$. Al factorizar por el método de la tijera se obtiene $(5x + 6)(3x - 2) = 0$, por lo que las soluciones de la ecuación son $x = -\frac{6}{5}$ y $x = \frac{2}{3}$.

Problemas

1. Calcula las soluciones de cada ecuación utilizando factorización.

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$ b) $x^2 - 15x + 44 = 0$ c) $x^2 + 4x + 3 = 0$

d) $x^2 + 7x - 60 = 0$ e) $x^2 + 16x + 63 = 0$ f) $\frac{1}{4}x^2 - x - 15 = 0$

g) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 = 0$ h) $3x^2 + 13x - 10 = 0$ i) $8x^2 - 38x + 35 = 0$

j) $4x^2 + 21x - 18 = 0$ k) $0.2x^2 + 0.3x - 0.2 = 0$ l) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{1}{5} = 0$

2. Encuentra una ecuación de grado 2 que tenga por soluciones a 1 y –15.

3.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas con la fórmula general

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + 3x - 1 = 0$ b) $x^2 - 2x - 6 = 0$

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) son:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Solución

a) Esta ecuación no puede resolverse por factorización; cuando esto ocurre se resuelve utilizando la fórmula general. En este caso, $a = 2$, $b = 3$ y $c = -1$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Entonces, las soluciones de $2x^2 + 3x - 1 = 0$ son:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \text{ y } x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}.$$

b) Si se intenta resolver la ecuación por factorización, se llega a que no es posible encontrar dos números enteros cuyo producto sea -6 y cuya suma sea -2. De forma similar al literal anterior, se utiliza la fórmula general con $a = 1$, $b = -2$ y $c = -6$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Entonces, las soluciones de $x^2 - 2x - 6 = 0$ son:

$$x = 1 + \sqrt{7} \text{ y } x = 1 - \sqrt{7}.$$

Observa que $\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2}$ se simplifica porque puede sacarse 2 como factor común en el numerador:

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{7})}{2} = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Conclusión

Cuando una ecuación cuadrática no pueda resolverse mediante factorización, se utiliza la fórmula general.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $x = 7 - \frac{4}{x}$.

Nótese que $x = 0$ no es solución de la ecuación. La ecuación puede llevarse a una ecuación cuadrática al multiplicar por x ambos miembros:

$$x^2 = 7x - 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 4 = 0$$

esta ecuación no puede resolverse mediante factorización, por lo que al aplicar la fórmula general se obtiene:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 16}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Entonces, las soluciones de $x = 7 - \frac{4}{x}$ son:

$$x = \frac{7 + \sqrt{33}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}.$$

Problemas

Calcula las soluciones de cada ecuación:

a) $3x^2 + x - 1 = 0$

b) $x^2 = -2(2x + 1)$

c) $x^2 - 3(2x + 1) = 0$

d) $2x(3 - x) = 3$

e) $x = x^2 - 1$

f) $x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{45}{4} = 0$

g) $2x = 8 - \frac{5}{x}$

h) $x = -3 + \frac{2}{x}$

Unidad 2

3.3 Definición de número complejo

Definición

Se llama **unidad imaginaria**, y se denota por i, al número que satisface $i^2 = -1$, es decir:

$$i = \sqrt{-1}\,.$$

Dados dos números reales cualesquiera a y b, el número de la forma $z = a + bi$ se llama **número complejo**. Al conjunto de todos los números complejos, es decir, aquellos de la forma $a + bi$ se le denota por $\mathbb{C}$.

Sea $z = a + bi$ un número complejo:

1. Si $b = 0$ entonces z es un número real.
2. Si a y b son diferentes de cero entonces z se llama **número imaginario.**
3. Si $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces $z = bi$ se llama **número imaginario puro**.

Para denotar números complejos, usualmente se utilizan las letras z y w. Si se necesitan más de dos números complejos, se utilizan subíndices, por ejemplo, z_1, z_2, z_3, z_4, etc.

Al número a se le llama **parte real** de z, y se denota por Re(z); mientras que al número b se le llama **parte imaginaria** de z, y se denota por Im(z). Dos números complejos son iguales si sus correspondientes partes real e imaginaria son iguales, y viceversa.

Ejemplo 1

Para cada caso, determina Re(z) e Im(z):

a) $z = 5 - 7i$

b) $z = \sqrt{2} + i$

c) $z = \dfrac{-4 + 9i}{2}$

a) Re(z) = 5
Im(z) = –7

b) Re(z) = $\sqrt{2}$
Im(z) = 1

c) Lo primero es reescribir z:

$$z = \frac{-4}{2} + \frac{9i}{2} = -2 + \frac{9}{2}i$$

Luego, Re(z) = –2 e Im(z) = $\frac{9}{2}$.

Ejemplo 2

Sean $z = 2x + 3i$ y $w = 4 + (y - 1)i$ dos números complejos. Determina los valores de los números reales x y y para que se cumpla $z = w$.

Para que se cumpla la igualdad entre los números complejos z y w debe ocurrir:

$$\text{Re}(z) = \text{Re}(w) \qquad \text{Im}(z) = \text{Im}(w)$$

$$2x = 4 \qquad 3 = y - 1$$

al resolver ambas ecuaciones lineales se obtiene:

$$x = 2 \qquad 4 = y$$

Por lo tanto, para que se cumpla $z = w$ los valores de x y y deben ser 2 y 4 respectivamente.

Problemas

1. Para cada caso, determina la parte real y la parte imaginaria de z:

a) $z = -3 + 8i$

b) $z = \frac{1}{2} - 6i$

c) $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}\,i$

d) $z = 11i$

e) $z = 3$

f) $z = \dfrac{-12 - i}{3}$

2. Para cada caso, determina los valores de los números reales x y y para que se cumpla $z = w$:

a) $z = (x + 1) + 5i$, $w = -6 + (4 - y)i$

b) $z = 10 - 3xi$, $w = 8y + 15i$

c) $z = (x + y) + 4i$, $w = -2x + 3yi$

d) $z = -x + 3yi$, $w = (y - 1) - xi$

3.4 Suma, resta y multiplicación de números complejos

Problema inicial

Sean $z = 3 + 7i$ y $w = 2 - 3i$. ¿Cuál es el resultado de las operaciones $z + w$, $z - w$ y zw?

Considera el número i como una variable para realizar las operaciones.

Solución

Como en la suma de polinomios, solo pueden sumarse aquellos términos que sean "semejantes":

$$\begin{aligned} z + w &= 3 + 7i + 2 - 3i \\ &= (3 + 2) + [7 + (-3)]i \\ &= (3 + 2) + (7 - 3)i \\ &= 5 + 4i \end{aligned}$$

Para la resta deben cuidarse los signos de la parte real e imaginaria de w:

$$\begin{aligned} z - w &= 3 + 7i - (2 - 3i) \\ &= (3 - 2) + [7 - (-3)]i \\ &= (3 - 2) + (7 + 3)i \\ &= 1 + 10i \end{aligned}$$

La multiplicación se desarrolla como si fuese el producto de binomios, y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} zw &= (3 + 7i)(2 - 3i) \\ &= 3(2) + [3(-3) + 7(2)]i + 7(-3)i^2 \\ &= 6 + (-9 + 14)i - 21(-1) \\ &= 6 + 21 + 5i \\ &= 27 + 5i \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z + w = 5 + 4i$, $z - w = 1 + 10i$ y $zw = 27 + 5i$.

Definición

La suma y **resta de los números complejos** $z = a + bi$ y $w = c + di$ se denotan por $z + w$ y $z - w$ respectivamente, y se definen:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$
$$z - w = (a - c) + (b - d)i.$$

El **producto de los números complejos** $z = a + bi$ y $w = c + di$ se denotan por zw y se define:

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

El **complejo conjugado** de $z = a + bi$, o simplemente conjugado de z, es otro número complejo denotado por $\overline{z}$ tal que $\overline{z} = a - bi$. Se llama **módulo** del número complejo $z = a + bi$ al número real denotado por $|z|$ y definido por:

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Problemas

1. Para cada caso, calcula $z + w$, $z - w$ y zw. Además, encuentra el conjugado y el módulo de cada número:

a) $z = -5 + 4i$, $w = 2 - 3i$
b) $z = 4 - i$, $w = -6 + 4i$
c) $z = -3 - 2i$, $w = -5 + i$
d) $z = 8 - i$, $w = 12 + 3i$
e) $z = 5 - 2i$, $w = 6i$
f) $z = -3 + 8i$, $w = 2$

2. Sea $z = a + bi$ un número complejo. Demuestra lo siguiente:

a) $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$
b) $z - \overline{z} = 2\text{Im}(z)i$

Unidad 2

3.5 División de números complejos

Problema inicial

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$. Para calcular $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$ realiza los siguientes pasos:

1. Multiplica por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{c-di}{c-di}$.
2. Efectúa los productos indicados.
3. Encuentra el resultado.

Solución

1. Al multiplicar por $\frac{\overline{w}}{\overline{w}}$ se está multiplicando por 1, o sea que la expresión original no se altera:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di}$$
$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}.$$

2. Al efectuar los productos indicados, se obtiene:

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

3. La división de z entre w es entonces el número complejo:

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Definición

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$. La división de z entre w se denota por $\frac{z}{w}$ y está dada por:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Ejemplo

Divide $4 + 3i$ entre $5 - i$.

En este caso, al multiplicar por el conjugado de $5 - i$ en el numerador y denominador, se tiene que:

$$\frac{4+3i}{5-i} = \frac{4+3i}{5-i} \times \frac{5+i}{5+i} = \frac{(4+3i)(5+i)}{5^2+1^2} = \frac{(20-3)+(4+15)i}{26} = \frac{17+19i}{26} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i.$$

Por lo tanto, $\frac{4+3i}{5-i} = \frac{17}{26} + \frac{19}{26}i$.

Problemas

1. Para cada caso, calcula $\frac{z}{w}$:

a) $z = 3$, $w = 2 + 4i$
b) $z = 5$, $w = 2 - 7i$
c) $z = -7i$, $w = 6 - 2i$
d) $z = 2 + 9i$, $w = -3 - i$
e) $z = -4 + 6i$, $w = 2 + 7i$
f) $z = -3 - 2i$, $w = 5 + 2i$
g) $z = 4 - 2i$, $w = -5i$
h) $z = -2 + 6i$, $w = 3i$

Observa que el objetivo en cada una de las operaciones vistas con los números complejos es escribir la operación como un número complejo $u + vi$. Así, en el caso de la división, el objetivo es quitar el número complejo del denominador multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador.

2. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$; realiza lo siguiente:

a) Calcula $\frac{z}{w}$
b) Calcula $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$
c) Calcula $\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
d) Compara los resultados de b) y c)

3.6 Raíces cuadradas de números negativos*

Problema inicial

Sea x un número complejo. Determina todos los valores de x que satisfacen: $x^2 = -5$

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

Solución

Se busca el número complejo tal que, al elevarlo al cuadrado, su resultado sea igual a –5; observa que –5 puede escribirse como el producto 5(–1), entonces: $x^2 = 5(-1) = 5i^2$,

luego, $x^2 = 5i^2$ se cumple para $x = \sqrt{5}\,i$ o $x = -\sqrt{5}\,i$. En efecto:

$$(\sqrt{5}\,i)^2 = (\sqrt{5})^2 i^2 = -5 \qquad (-\sqrt{5}\,i)^2 = (-\sqrt{5})^2 i^2 = -5$$

Por lo tanto, los valores de x que satisfacen $x^2 = -5$ son $x = \sqrt{5}\,i$ y $x = -\sqrt{5}\,i$.

Definición

Sea a un número real positivo ($a > 0$). Las raíces cuadradas de $-a$ son $\sqrt{a}\,i$ y $-\sqrt{a}\,i$. Además:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i.$$

Ejemplo

Escribe los siguientes números en la forma $a + bi$:

a) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-5}$ b) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}$

$-i^2 = -(-1) = 1$

Primero se escriben las raíces de números negativos en la forma $\sqrt{a}\,i$, luego se realizan las operaciones respectivas:

a) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-5} = (\sqrt{3}\,i)(\sqrt{5}\,i)$
$= \sqrt{15}\,i^2$
$= -\sqrt{15}$

De lo anterior se concluye que:
$\sqrt{-3}\,\sqrt{-5} = -\sqrt{15}$.

b) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{5}}$
$= \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$

Luego, $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$.

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\,i}\left(\dfrac{-i}{-i}\right)$
$= \sqrt{\dfrac{3}{5}}\left(\dfrac{-i}{-i^2}\right)$
$= \sqrt{\dfrac{3}{5}}\left(\dfrac{-i}{1}\right)$
$= -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$

Luego, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,i$.

En general, si a y b son números reales positivos:

1. $\sqrt{-a}\sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-a)}$ 2. $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} \neq \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$

También puedes multiplicar por el conjugado de $\sqrt{5}\,i$, o sea, $-\sqrt{5}\,i$ y verificar que se llega a la misma respuesta.

Problemas

1. Para cada caso, encuentra las raíces cuadradas de $-a$ si:

a) $a = 2$ b) $a = 3$ c) $a = 7$ d) $a = 10$

e) $a = 4$ f) $a = 25$ g) $a = \frac{1}{3}$ h) $a = \frac{1}{9}$

2. Escribe los siguientes números en la forma $a + bi$:

a) $\sqrt{-7}\,\sqrt{2}$ b) $\sqrt{7}\,\sqrt{-2}$ c) $\sqrt{-3}\,\sqrt{-7}$

d) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}$ e) $\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}$

Unidad 2

3.7 Discriminante de la ecuación cuadrática

Problema inicial

De la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se define el número $\Delta = b^2 - 4ac$. Para cada una de las siguientes ecuaciones calcula el valor de Δ, establece su signo y resuelve cada una utilizando la fórmula general (considera las soluciones complejas):

a) $2x^2 - 5x - 1 = 0$ b) $x^2 - 2x + 1 = 0$ c) $x^2 + 3x + 5 = 0$

Δ es una letra griega llamada "Delta".

Solución

a) Al calcular Δ se tiene:

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-1) = 25 + 8 = 33$$

es decir, $\Delta > 0$. Al resolver la ecuación utilizando la fórmula general (el valor de Δ es el radicando de la fórmula general):

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{33}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

La ecuación $2x^2 - 5x - 1 = 0$ tiene dos soluciones reales.

b) El valor de Δ es:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

o sea, $\Delta = 0$. Luego, el valor del radicando en la fórmula general es cero y:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene una solución real.

c) El valor de Δ es:

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$$

es decir, $\Delta < 0$. Al resolver la ecuación utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}\,i}{2}.$$

La ecuación $x^2 + 3x + 5 = 0$ tiene dos soluciones complejas.

Definición

Dada una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$, se le llama **discriminante** de la ecuación cuadrática al número $\Delta = b^2 - 4ac$. El número y tipo de soluciones de la ecuación cuadrática puede determinarse de acuerdo a lo siguiente:

1. Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales, es decir, pertenecen a los números reales.
2. Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real.
3. Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene dos soluciones imaginarias, es decir, de la forma $u + vi$ con $v \neq 0$.

Ejemplo

¿Cuál debe ser el valor de m para que la ecuación $x^2 + mx + 4 = 0$ tenga una solución real?
Para que tenga una solución real debe cumplirse que $\Delta = 0$, es decir $\Delta = m^2 - 16 = 0$. Luego, $m = 4$ o $m = -4$.
Por lo tanto, para que la ecuación $x^2 + mx + 4 = 0$ tenga una solución real m debe ser 4 o -4.

Problemas

1. Determina si las soluciones de cada ecuación son reales o imaginarias:

a) $4x^2 + x - 3 = 0$ b) $4x^2 + x + 14 = 0$
c) $9x^2 - 30x + 25 = 0$ d) $15x^2 + 12 = -8x$

2. ¿Cuál debe ser el valor de m para que la ecuación $x^2 - 6x + 5 - m = 0$ tenga una solución real?

3.8 Factorización de un polinomio*

Problema inicial

Utilizando números complejos factoriza el polinomio $x^2 + 12x + 40$.

Solución

Similar al caso de la factorización del trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, en este caso deben encontrarse dos números complejos cuyo producto sea igual a 40 y cuya suma sea igual a 12. Primero se resuelve la ecuación $x^2 + 12x + 40 = 0$ utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1)(40)}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-12 \pm 4i}{2} = -6 \pm 2i$$

luego,

$$\begin{array}{rcl} x = -6 + 2i & \text{o} & x = -6 - 2i \\ x - (-6 + 2i) = 0 & \text{o} & x - (-6 - 2i) = 0 \\ x + 6 - 2i = 0 & \text{o} & x + 6 + 2i = 0 \end{array}$$

sean $z = 6 - 2i$ y $w = 6 + 2i$; puede comprobarse que $zw = 40$ y $z + w = 12$, y se tiene:

$$(x + z)(x + w) = x^2 + (z + w)x + zw = x^2 + 12x + 40.$$

Por lo tanto, $x^2 + 12x + 40 = [x - (-6 + 2i)][x - (-6 - 2i)] = (x + 6 - 2i)(x + 6 + 2i)$.

Conclusión

Si x_1 y x_2 son las soluciones (reales o imaginarias) de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ entonces:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ejemplo

Factoriza el polinomio $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$.

Los divisores del término independiente son $a = \pm1, \pm2, \pm7, \pm14$. Al sustituir $x = 2$ en el polinomio original se obtiene:

$$2^3 - 6(2)^2 + 15(2) - 14 = 8 - 24 + 30 - 14 = 0$$

por el teorema del factor, $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)d$, donde d es un polinomio de grado 2; utilizando división sintética se obtiene:

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)(x^2 - 4x + 7)$$

el siguiente paso es factorizar el polinomio $x^2 - 4x + 7$; esto puede realizarse utilizando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 2 \pm \sqrt{3}i.$$

Por lo tanto, $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x - 2)[x - (2 + \sqrt{3}i)][x - (2 - \sqrt{3}i)] = (x - 2)(x - 2 - \sqrt{3}i)(x - 2 + \sqrt{3}i)$.

Problemas

Factoriza cada polinomio:

a) $x^2 - 12x + 40$
b) $5x^2 + 8x + 5$
c) $x^3 - 6x^2 + 2x + 24$
d) $x^3 + x + 10$
e) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$
f) $x^3 - 7x^2 + 20x - 50$

3.9 Raíces de un polinomio*

Problema inicial

Un número a (real o imaginario) es una raíz de un polinomio en variable x si al sustituir $x = a$ en el polinomio el resultado es cero. Calcula las raíces de los siguientes polinomios:

a) $3x - 12$ b) $2x^2 + 7x + 3$ c) $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$

Solución

a) Para determinar las raíces de $3x - 12$ hay que encontrar los valores de x que hacen cero el polinomio; es decir, basta resolver la ecuación $3x - 12 = 0$ para determinar las raíces. La solución de la ecuación es $x = 4$, entonces 4 es la única raíz de $3x - 12$.

b) De igual forma que en el literal anterior, basta resolver la ecuación $2x^2 + 7x + 3 = 0$ para calcular las raíces del polinomio $2x^2 + 7x + 3$. Resolviendo por factorización:

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3) = 0.$$

Entonces $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -3$ son las raíces del polinomio $2x^2 + 7x + 3$.

c) Como el polinomio es de grado 3 se utiliza el teorema del factor para determinar alguno de los valores que hacen cero el polinomio; se sustituye x por alguno de los números ± 1, ± 29:

$$\text{si } x = -1, \text{ entonces } (-1)^3 - 3(-1)^2 + 25(-1) + 29 = -1 - 3 - 25 + 29 = 0$$

se utiliza división sintética para realizar $(x^3 - 3x^2 + 25x + 29) \div (x + 1)$ y factorizar el polinomio original; de esto se obtiene:

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x + 1)(x^2 - 4x + 29)$$

una de las raíces del polinomio es $x = -1$. Se calculan ahora las raíces de $x^2 - 4x + 29$ resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 29 = 0$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(29)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i.$$

Por lo tanto, las raíces de $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$ son $x = -1$, $x = 2 + 5i$ y $x = 2 - 5i$.

Conclusión

Sea p un polinomio en una variable:

1. Si p es de grado 1, entonces tiene una raíz compleja.

2. Si p es de grado 2 entonces tiene dos raíces complejas, contando aquellas que se repiten. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 2x + 1$ puede escribirse como $(x + 1)^2$ y $x = -1$ es una raíz doble.

3. Si p es de grado 3, entonces tiene tres raíces complejas, contando aquellas que se repiten.

Un polinomio de grado 1 se llama **lineal**, al de grado 2 se le conoce como polinomio **cuadrático** y si es de grado 3 se le llama polinomio **cúbico**. Un polinomio puede ser de grado n, para n un entero no negativo, y cuando es de una variable es de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde a_n es distinto de cero.

Un polinomio de grado n tiene n raíces complejas. Si x_1, x_2, ..., x_r son las raíces (distintas) del polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ entonces puede factorizarse como:

$$a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_r)^{m_r}$$

donde a los m_i se les llama **multiplicidades de la raíz** x_i y cumplen que:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n.$$

Si un polinomio tiene una raíz imaginaria, el conjugado también es raíz.

3.10 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, analizando primero si puede resolverse por factorización; de lo contrario, utiliza la fórmula general:

a) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$

b) $x^2 + 5x = 0$

c) $x(3x + 10) = 77$

d) $15x^2 - 14 = 29x$

e) $22x^2 + 67x - 35 = 0$

f) $2.7x^2 + 4.2x + 0.8 = 0$

g) $x^2 - 6x + 12 = 0$

h) $x^2 + 5x + 6 = 0$

i) $x^2 - 2x + 26 = 0$

j) $6x^2 + x + 12 = 0$

k) $x^2 + 3x + 6 = 0$

l) $-3x^2 - 5 = -x$

m) $4x^2 + x + 14 = 0$

n) $15x^2 + 8x = -12$

o) $x^2 + 4x + 14 = 0$

p) $x^2 + 8x + 17 = 0$

2. Calcula el valor de x si:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

¿Qué se puede observar de la expresión encerrada en el recuadro rojo?

$$x = 1 + \cfrac{1}{\boxed{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

3. Sea $x = 2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \ddots}}}}$

Demuestra que $x = 3$.

4. Para cada caso, realiza $z + w$ y $z - w$:

a) $z = 2 - i$, $w = 3 + 7i$

b) $z = -3 + 2i$, $w = 2 - 4i$

c) $z = -6 - i$, $w = i$

d) $z = 2 + i$, $w = 8 - i$

e) $z = 1 - 3i$, $w = 5 - 2i$

f) $z = 9i$, $w = 5i$

g) $z = -5$, $w = 15i$

h) $z = 7 - 6i$, $w = -11 - 3i$

5. Para cada caso, realiza zw y $\frac{z}{w}$:

a) $z = -5 + 4i$, $w = 2 - 3i$

b) $z = 4 - i$, $w = -6 + 4i$

c) $z = -3 - 2i$, $w = -5 + i$

d) $z = 8 - i$, $w = 12 + 3i$

e) $z = 5 - 2i$, $w = 6i$

f) $z = -3 + 8i$, $w = 2$

g) $z = -9 + 7i$, $w = 4 + 9i$

h) $z = 7 - 6i$, $w = -11 - 3i$

6. Factoriza cada polinomio utilizando números complejos:

a) $4x^2 + x + 1$

b) $9x^2 + 28x + 50$

c) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

d) $x^4 - 11x^3 + 40x^2 - 56x + 24$

Unidad 2

3.11 Problemas de la unidad

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $(x + y)^2 - (x - y)^2$

b) $(x + y)^2 + (x - y)^2$

2. Utiliza productos notables para calcular el resultado de las siguientes operaciones:

a) $190(210)$

b) $96(104) - 94(106)$

c) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

d) $\sqrt{100(101)(102)(103) + 1}$

Toma $x = \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ y calcula x^2.

Considera $x = 100$ y multiplica el primero con el último y el segundo con el tercero.

3. Considera los números complejos $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$ y $z_3 = 1 - i$. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $z_1 + z_2 + z_3$

b) $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$

c) $z_1 z_2 z_3$

d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

e) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$

f) $\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$

4. Desarrolla cada uno de los productos para demostrar las igualdades:

a) $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x + abc$

b) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

c) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

5. Encuentra un polinomio de segundo grado en una variable x que cumpla lo siguiente: el coeficiente de x y el término independiente sean iguales; los valores del polinomio al sustituir x por 1 y 2 sean 7 y 18 respectivamente.

6. Sean x y y números reales positivos. Factoriza los siguientes polinomios (puedes dejar los términos de los factores con raíces cuadradas):

a) $x + 2\sqrt{x} + 1$

b) $x - y$

c) $y + 4\sqrt{y} + 4$

d) $x - 1$

7. Demuestra que para cualquier número complejo z, se cumple que $|z| \geq 0$.

8. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, ¿se cumple que $|zw| = |z||w|$?

9. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$, ¿se cumple que $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$?

10. Determina los valores que puede tomar el número real m para que la ecuación $mx^2 + 2x + 1 = 0$ tenga dos soluciones reales.

11. Determina los valores que puede tomar el número real m para que la ecuación $x^2 + 2x + m = 0$ tenga dos soluciones imaginarias.