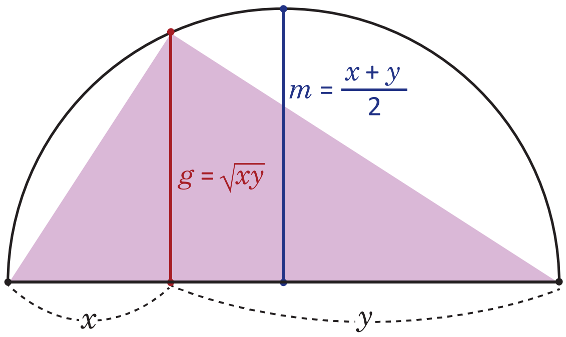
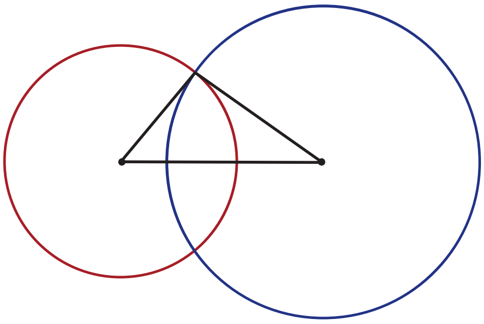
Unidad 3

Desigualdades

El desarrollo de las desigualdades o inecuaciones fue llevado de forma paralela con el desarrollo de las ecuaciones, los primeros aportes se registran por los egipcios, pero no existe una información clara y exacta del momento en que surgieron. Sin embargo, el ser humano se ha visto en la constante necesidad de resolver desigualdades, ya que en la vida cotidiana surgían problemas sobre dinero, alimento o recursos, donde intervenían frases como “al menos” o “a lo sumo”.



Esquema geométrico de la demostración de la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica.



Esquema geométrico de la demostración de la desigualdad triangular usando circunferencias.

A lo largo de la historia han ido surgiendo desigualdades que han sido aplicadas para el desarrollo constante de teorías matemáticas; una de las desigualdades básicas de la matemática es la desigualdad triangular, cuyo resultado se cumple en diversas representaciones geométricas, algebraicas, vectoriales, numéricas, entre otras.

Se desarrollará el concepto de desigualdad, y se aplicarán sus propiedades para la resolución de inecuaciones, analizando diferentes casos según variaciones en los coeficientes y las constantes de esta. Luego se abordarán algunas desigualdades muy importantes en matemática, como la desigualdad triangular y la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica.

1.1 Propiedades de las desigualdades, parte 1

Problema inicial

Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto, $\leq$, $\geq$, $<$ o $>$:

a) $1 \;\square\; -2$ b) $3.5 \;\square\; \frac{7}{2}$ c) $-3 + 2 \;\square\; 5 + 2$

d) $-5 + 3 \;\square\; -7 + 3$ e) $\frac{1}{2} - 1 \;\square\; -1 - 1$ f) $1.5 - 5 \;\square\; 4 - 5$

Solución

a) Un número positivo siempre será mayor que un número negativo. Entonces:

$$1 \;\boxed{>}\; -2$$

b) El número 3.5 es el decimal correspondiente a $\frac{7}{2}$. Se puede utilizar cualquiera de los símbolos $\leq$ o $\geq$:

$$3.5 \;\boxed{\geq}\; \frac{7}{2}$$

c) $-3 < 5$ y al sumar 2 a ambos números se obtiene $-3 + 2 = -1$ y $5 + 2 = 7$, es decir, la desigualdad se mantiene. Luego:

$$-3 + 2 \;\boxed{<}\; 5 + 2$$

d) De igual forma al literal anterior, como $-5 > -7$ entonces:

$$-5 + 3 \;\boxed{>}\; -7 + 3$$

e) $\frac{1}{2} > -1$ y al restar 1 a ambos números se obtienen como resultados $-\frac{1}{2}$ y -2 respectivamente, es decir, la desigualdad se mantiene. Luego:

$$\frac{1}{2} - 1 \;\boxed{>}\; -1 - 1$$

f) De forma similar al literal e), como $1.5 < 4$, entonces:

$$1.5 - 5 \;\boxed{<}\; 4 - 5$$

Conclusión

Los símbolos $\leq$, $\geq$, $<$ y $>$ se utilizan para representar relaciones entre cantidades distintas o iguales. Estos se leen como sigue:

$\leq$: menor o igual que $\geq$: mayor o igual que

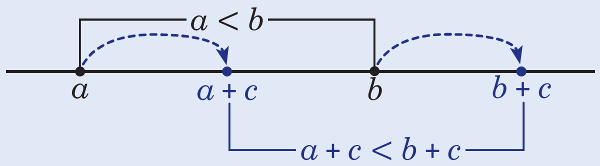
$<$: menor que $>$: mayor que

La relación que indica cuando dos cantidades o expresiones matemáticas son distintas o iguales se llama **desigualdad**. En la desigualdad $a \leq b$, la cantidad a es el **miembro izquierdo** y la cantidad b es el **miembro derecho**.

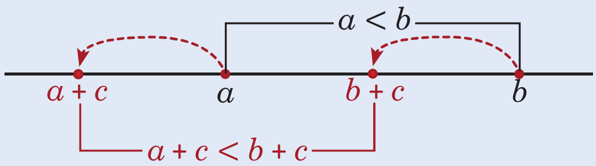
Sean a, b y c números reales cualesquiera; **si $a < b$ entonces $a + c < b + c$**. En general, si se suma (o resta) un número real a ambos miembros de una desigualdad entonces la desigualdad se mantiene.

La propiedad es válida para cualquier tipo de desigualdad: $a > b$, $a \geq b$, y $a \leq b$. Es decir, al sumar un número real c a ambos miembros a y b entonces la desigualdad se mantendrá.

$\boxed{c > 0}$



$\boxed{c < 0}$



Problemas

Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto:

a) $3 + 7 \;\square\; 10 + 7$ b) $-1 + 4 \;\square\; 5 + 4$ c) $-6 - 2 \;\square\; -9 - 2$

d) $-\frac{1}{2} - 5 \;\square\; -0.5 - 5$ e) $-0.25 + 5 \;\square\; -\frac{1}{4} + 5$ f) $4.5 + 1.2 \;\square\; 1 + 1.2$

g) $-3 + 2.7 \;\square\; -1.9 + 2.7$ h) $-3 + \sqrt{2} \;\square\; -1 + \sqrt{2}$ i) $\sqrt{2} - \frac{1}{2} \;\square\; -\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

1.2 Propiedades de las desigualdades, parte 2

Problema inicial

Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto, $<$ o $>$:

a) $2(4)$ $\square$ $5(4)$　　b) $-5(3)$ $\square$ $4(3)$　　c) $-3(10)$ $\square$ $-9(10)$

d) $6(-2)$ $\square$ $3(-2)$　　e) $8(-4)$ $\square$ $-5(-4)$　　f) $-11(-5)$ $\square$ $-7(-5)$

Solución

a) $2 < 5$ y al aumentar 4 veces ambas cantidades resultan $2(4) = 8$ y $5(4) = 20$, es decir, la desigualdad se mantiene. Entonces:

$$2(4)\ \boxed{<}\ 5(4)$$

b) De forma similar al literal a), $-5 < 4$, al multiplicar por 3 ambos miembros la desigualdad se mantiene, y:

$$-5(3)\ \boxed{<}\ 4(3)$$

c) $-3 > -9$; si se aumentan 10 veces ambas cantidades la desigualdad se mantiene. Luego:

$$-3(10)\ \boxed{>}\ -9(10)$$

d) $6 > 3$, pero ahora ambas cantidades se multiplican por un número negativo obteniendo $6(-2) = -12$ y $3(-2) = -6$, es decir, la desigualdad se invierte:

$$6(-2)\ \boxed{<}\ 3(-2)$$

e) De forma similar al literal d), $8 > -5$ y al multiplicar por un número negativo ambos miembros se obtiene $8(-4) = -32$ y $-5(-4) = 20$, o sea, la desigualdad se invierte:

$$8(-4)\ \boxed{<}\ -5(-4)$$

f) $-11 < -7$, y como en los literales anteriores, si se multiplica ambos miembros por un número negativo la desigualdad se invierte; entonces:

$$-11(-5)\ \boxed{>}\ -7(-5)$$

Conclusión

Sean a, b y c números reales tales que $\boldsymbol{a < b}$.

1. **Si $\boldsymbol{c > 0}$ entonces $\boldsymbol{ac < bc}$**, es decir, si se multiplica ambos miembros de una desigualdad por un número positivo entonces la desigualdad se mantiene.
2. **Si $\boldsymbol{c < 0}$ entonces $\boldsymbol{ac > bc}$**, es decir, si se multiplica ambos miembros de una desigualdad por un número negativo entonces la desigualdad se invierte.

La propiedad es válida también para las desigualdades $a > b$, $a \geq b$, y $a \leq b$.

Problemas

1. Escribe en el espacio en blanco el símbolo de desigualdad correcto:

a) $8(5)$ $\square$ $11(5)$　　b) $-3(6)$ $\square$ $-7(6)$　　c) $6(-3)$ $\square$ $-4(-3)$

d) $-10(-7)$ $\square$ $-5(-7)$　　e) $4.8(9)$ $\square$ $1.3(9)$　　f) $-3.5(-2)$ $\square$ $-3.6(-2)$

g) $\frac{4}{5}(-4)$ $\square$ $5(-4)$　　h) $-\frac{8}{5}(3)$ $\square$ $\frac{1}{2}(3)$　　i) $10\left(\frac{1}{2}\right)$ $\square$ $7\left(\frac{1}{2}\right)$

j) $-6.5\left(-\frac{1}{4}\right)$ $\square$ $-4.3\left(-\frac{1}{4}\right)$　　k) $\frac{8}{3}\left(\frac{5}{4}\right)$ $\square$ $-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)$　　l) $\sqrt{6}\,(-11)$ $\square$ $\sqrt{3}\,(-11)$

2. Sean c y d números reales positivos tales que $c < d$. Escribe el símbolo de desigualdad correcto, $<$ o $>$ (justifica tu respuesta):

a) $3c$ $\square$ $3d$　　b) $-c$ $\square$ $-d$　　c) $5.6c$ $\square$ $5.6d$

d) $-2c$ $\square$ $-2d$　　e) $-7c$ $\square$ $-7d$　　f) $\frac{3}{4}c$ $\square$ $\frac{3}{4}d$

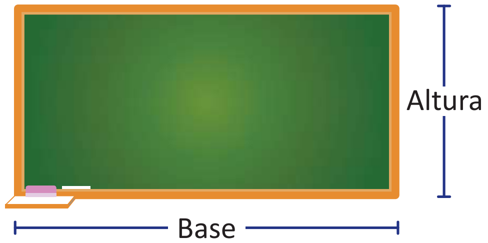
3. Sea a un número positivo. Demuestra lo siguiente:

a) Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$;　　b) Si $a < 1$ entonces $a^2 < a$.

2.1 Definición de desigualdad lineal

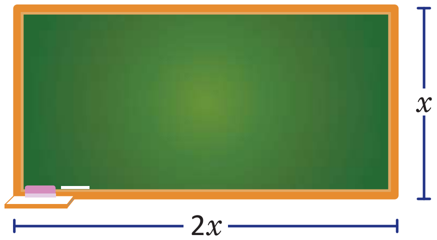
Problema inicial

La longitud de la base de una pizarra rectangular es el doble de su altura, y la medida de su perímetro es a lo sumo 7.20 m^2. Escribe una desigualdad que relacione el perímetro y la medida máxima que este puede tomar.



Solución

Sea x la longitud en metros de la altura de la pizarra como lo muestra la figura de abajo. De acuerdo al enunciado del problema la longitud en metros de su base será igual a $2x$ pues es el doble de la altura.



El perímetro de la pizarra se calcula:

$$2x + 2(2x) = 6x$$

es decir, la medida del perímetro de la pizarra es igual a $6x$. De acuerdo al problema, el perímetro es a lo sumo 7.20 m^2; esto es equivalente a decir que la medida del perímetro es menor o igual a 7.20 m^2. Por lo tanto, la desigualdad que relaciona el perímetro y la medida máxima de este es: $6x \leq 7.20$.

Definición

La desigualdad de dos expresiones matemáticas de grado 1 que involucra una variable se llama **desigualdad lineal**. En una desigualdad lineal, al valor desconocido que se representa por una variable se llama **incógnita**, al intervalo de los valores numéricos de la incógnita que cumplen con la desigualdad se llaman **solución de la desigualdad**.

En esta unidad, las variables únicamente podrán tomar valores reales, es decir, números reales.

Problemas

1. Escribe los siguientes enunciados como desigualdades lineales:
   a) Sara se tarda en llegar a su trabajo a lo sumo 1 hora con 15 minutos.
   b) Según el Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales (MARN), para el 2015 la cantidad de sismos no sentidos fue 11 veces la cantidad de sismos sentidos; mientras que en total se registró una cantidad superior a los 4 000 sismos en ese año.
   c) La edad de Mario es un tercio de la edad de Antonio, y la suma de sus edades es inferior a 28 años.
   d) El consumo de energía de una lavadora es 500 watts por hora. Al finalizar cierto tiempo, el consumo de energía superó los 3 500 watts por hora.

2. Beatriz y José deciden ahorrar durante todo el período escolar; al finalizar el año lectivo, el dinero ahorrado por Beatriz es superior a la mitad del dinero ahorrado por José. Escribe una desigualdad que relacione el dinero ahorrado por Beatriz y José.

2.2 Solución de desigualdades lineales, parte 1

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

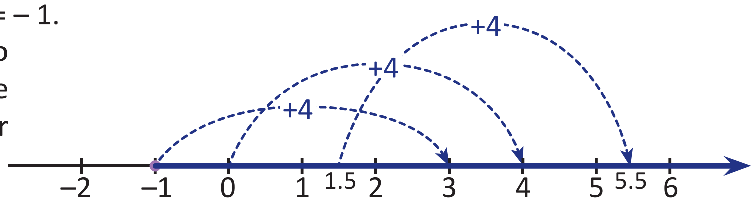
a) $x + 4 \geq 3$ b) $x - 5 < 2$

Solución

a) Deben encontrarse los números reales tales que al sumarles 4, el resultado es mayor o igual a 3. Resolver la ecuación lineal $x + 4 = 3$ equivale a encontrar el número real cuyo resultado al sumarle 4 es 3:

$$x + \cancel{4} - \cancel{4} = 3 - 4 \qquad \text{restar 4 a ambos miembros,}$$
$$x = -1.$$

En la figura de la derecha se observa lo siguiente: todos los números mayores que -1 satisfacen la desigualdad $x + 4 \geq 3$. Por lo tanto, $x + 4 \geq 3$ si $x \geq -1$.



Este resultado también puede obtenerse utilizando la propiedad vista en la clase 1.1, es decir, en la desigualdad original restar 4 a ambos miembros:

$$x + 4 \geq 3$$
$$x + \cancel{4} - \cancel{4} \geq 3 - 4 \qquad \text{restar 4 a ambos miembros no altera la desigualdad,}$$
$$x \geq -1.$$

Por lo tanto, la desigualdad $x + 4 \geq 3$ se cumple para $x \geq -1$. Utilizando intervalos, $x \geq -1$ se escribe $x \in [-1, \infty[$.

b) Usando propiedades de desigualdades, se suma 5 a ambos miembros:

$$x - 5 < 2$$
$$x - \cancel{5} + \cancel{5} < 2 + 5 \qquad \text{sumar 5 a ambos miembros no altera la desigualdad,}$$
$$x < 7.$$

Por lo tanto, la desigualdad $x - 5 < 2$ se cumple para $x < 7$; utilizando intervalos se escribe $x \in]-\infty, 7[$.

Conclusión

Sean b y c números reales cualesquiera. Para resolver una desigualdad lineal de la forma $x + b \geq c$ o $x + b \leq c$, esta debe escribirse como $x \geq d$ o $x \leq d$ sumando $-b$ a ambos miembros de la desigualdad:

1. $x + b \geq c$ se cumple para $x \geq c - b$; utilizando intervalos se escribe $x \in [c - b, \infty[$.
2. $x + b \leq c$ se cumple para $x \leq c - b$; utilizando intervalos se escribe $x \in]-\infty, c - b]$.

Si las desigualdades son $x + b > c$ o $x + b < c$ entonces en la solución no debe tomarse en cuenta el extremo $c - b$.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $x + 7 \geq 10$ b) $x - 3 > -8$ c) $x - 2 < 11$

d) $x + 4 \leq -6$ e) $x - 6 \geq 0$ f) $0 \geq x + 8$

g) $x + \frac{2}{3} < \frac{1}{3}$ h) $x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}$ i) $x + \frac{1}{4} \geq 1$

j) $x - \frac{4}{3} \leq -\frac{3}{4}$ k) $x + \frac{1}{2} < -4$ l) $x + \sqrt{2} \geq 5\sqrt{2}$

2. Utiliza la propiedad de las desigualdades vista en la clase 1.1 para justificar por qué la solución de $x + b \leq c$ es $x \in]-\infty, c - b]$.

2.3 Solución de desigualdades lineales, parte 2

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades:

a) $3x > 12$

b) $-5x \leq -10$

Al multiplicar ambos miembros por un número real, si el número es positivo la desigualdad no se altera y si es negativo la desigualdad se invierte.

Solución

a) Para solucionar la desigualdad debe llevarse a la forma $x > d$, donde d es un número real. Para ello se multiplican ambos miembros de la desigualdad por $\frac{1}{3}$:

$$3x > 12$$

$$\cancel{3}x\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) > 12\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x > 4$$

multiplicar por $\frac{1}{3}$ ambos miembros no altera la desigualdad.

Por lo tanto, la desigualdad $3x > 12$ se cumple para $x > 4$, es decir, si $x \in]4, +\infty[$.

b) De forma similar al literal anterior, se multiplican ambos miembros de la desigualdad por $-\frac{1}{5}$, esto hace que el símbolo de desigualdad se invierta de $\leq$ a $\geq$:

$$-5x \leq -10$$

$$-\cancel{5}x\left(-\frac{1}{\cancel{5}}\right) \geq -10\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$x \geq 2$$

Por lo tanto, $-5x \leq -10$ se cumple para $x \geq 2$, es decir, si $x \in [2, +\infty[$.

Conclusión

Sea a un número real diferente de cero. Para resolver una desigualdad lineal de la forma $ax \geq c$ o $ax \leq c$ se multiplican ambos miembros de la desigualdad por el recíproco de a, es decir, $\frac{1}{a}$:

1. Si a es positivo, entonces las desigualdades $ax \geq c$ y $ax \leq c$ se cumplen para $x \geq \frac{c}{a}$ y $x \leq \frac{c}{a}$ respectivamente.
2. Si a es negativo, entonces las desigualdades $ax \geq c$ y $ax \leq c$ se cumplen para $x \leq \frac{c}{a}$ y $x \geq \frac{c}{a}$ respectivamente.

Si las desigualdades son $ax > c$ o $ax < c$ entonces en la solución no debe tomarse en cuenta el extremo $\frac{c}{a}$.

La solución $x \geq \frac{c}{a}$ se escribe utilizando intervalos como $x \in \left[\frac{c}{a}, \infty\right[$; mientras que $x \leq \frac{c}{a}$ se escribe: $x \in \left]-\infty, \frac{c}{a}\right]$.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $2x \leq 6$ b) $4x \geq 24$ c) $-3x > -33$

d) $-14 > 7x$ e) $-8x \geq 0$ f) $0 \geq 5x$

g) $-4x < 18$ h) $5x > -1$ i) $-\frac{1}{3}x \geq 3$

j) $\frac{2}{5}x < -1$ k) $\frac{5}{2}x \leq -\frac{5}{3}$ l) $-\sqrt{2}\,x > 1$

2. Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades:

a) $\begin{cases} x + 2 > -3 \\ 3x > 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 5 \geq 2 \\ -2x > 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 4 < 1 \\ 5x > -30 \end{cases}$

Para cada literal, representa la solución de cada desigualdad en la recta numérica. Luego, verifica los valores donde coinciden ambos intervalos.

2.4 Solución de desigualdades lineales, parte 3

Problema inicial

Resuelve las siguientes desigualdades lineales:

a) $2x + 7 > -9$

b) $6x - 5 \leq 2x + 15$

Solución

a) Se utilizan propiedades de desigualdades para llevarla a la forma $x > d$; primero deben realizarse las sumas o restas y luego las multiplicaciones:

$$2x + 7 > -9$$

$$2x + \cancel{7} - \cancel{7} > -9 - 7 \quad \text{restar 7 a ambos miembros,}$$

$$\cancel{2}x\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) > -16\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{multiplicar por } \frac{1}{2} \text{ ambos miembros,}$$

$$x > -8.$$

Por lo tanto, la desigualdad $2x + 7 > -9$ se cumple para $x \in]-8, \infty[$.

Puede deducirse lo siguiente:
- Un término que se encuentra sumando en uno de los miembros pasa al otro miembro a restar y viceversa (**transposición de términos**).
- Al llegar a la forma $mx \leq n$, se escribe x con coeficiente 1 y se multiplica n por el recíproco de m.

b) Aplicando lo encontrado en el literal anterior, para resolver $6x - 5 \leq 2x + 15$ se realiza lo siguiente:

$$6x - 5 \leq 2x + 15$$

$$6x \leq 2x + 15 + 5 \quad \text{se transpone 5 en el miembro derecho,}$$

$$6x - 2x \leq 20 \quad \text{se transpone } 2x \text{ en el miembro izquierdo,}$$

$$4x \leq 20$$

$$x \leq 20\left(\frac{1}{4}\right) \quad \text{se escribe } x \text{ con coeficiente 1 y se multiplica por } \frac{1}{4} \text{ el miembro izquierdo,}$$

$$x \leq 5.$$

Por lo tanto, la desigualdad $6x - 5 \leq 2x + 15$ se cumple para $x \in]-\infty, 5]$.

Conclusión

Para resolver una desigualdad lineal se hace lo siguiente:

1. Transponer términos para llevar la desigualdad a la forma $mx \geq n$ o $mx \leq n$.
2. Escribir la incógnita con coeficiente 1 y multiplicar el otro miembro por el recíproco de m.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $3x - 4 < 8$

b) $2 \leq 5x + 12$

c) $7x - 24 > -x$

d) $4x + 9 < 2x + 11$

e) $2x - 1 \leq 5x + 14$

f) $3x - 2 \geq x + 6$

g) $x - 4 \leq -2x - 9$

h) $3x + 16 < 7x + 2$

i) $6x + 3 \geq 4x - 1$

j) $\frac{1}{3}x - 2 \geq x - \frac{7}{2}$

k) $\frac{5}{2}x + \frac{1}{3} < -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

l) $-4x - 5\sqrt{3} > x + 10\sqrt{3}$

2. Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades:

a) $\begin{cases} -3x > 0 \\ 2x - 5 > -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 4 \leq 3x \\ 5x - 1 > 4x + 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 7 > -x - 5 \\ -2x > 3x - 10 \end{cases}$

2.5 Interpretación gráfica de una desigualdad lineal

Problema inicial

Dada la función lineal $y = 2x - 4$:

1. Traza la gráfica de la función encontrando la intersección con los ejes de coordenadas.
2. Utilizando la gráfica de $y = 2x - 4$ determina los valores de x para los cuales $y \geq 0$.
3. ¿Cuál es la relación entre los valores de x encontrados en el literal anterior y la solución de $2x - 4 \geq 0$?

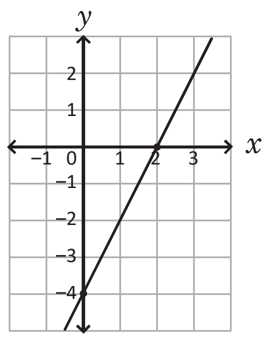
La gráfica de una función lineal $y = ax + b$ es una línea recta que pasa por los puntos $(0, b)$ y $(x, 0)$, donde el valor de x del segundo punto se encuentra al resolver $y = 0$.

Solución

1. La intersección con el eje y es el punto (0, –4); mientras que la intersección del eje x se encuentra resolviendo $y = 0$:

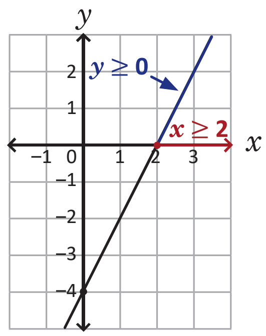
$$2x - 4 = 0$$
$$x = 2$$

se colocan los puntos (0, –4) y (2, 0) en el plano cartesiano y se traza la recta que pasa por ambos puntos como se muestra en la figura de la derecha.



2. Encontrar los valores de x para los cuales $y \geq 0$ significa, gráficamente, los números para los cuales la gráfica de $y = 2x - 4$ corta al eje x o queda arriba de este.

Se observa lo siguiente: $y \geq 0$ si $x \geq 2$, es decir, si $x \in [2, +\infty[$.



3. La solución de la desigualdad $2x - 4 \geq 0$ es $x \geq 2$, o sea, la misma encontrada en el literal anterior.

Conclusión

Resolver una desigualdad lineal de la forma $ax + b \geq 0$ o $ax + b \leq 0$ equivale a encontrar los valores de x para los cuales la gráfica de la función $y = ax + b$ corta al eje x o se encuentra arriba de este en el caso de $ax + b \geq 0$, o debajo de este en el caso de $ax + b \leq 0$.

Cuando las desigualdades son $>$ o $<$ no se toman en cuenta los valores donde $y = ax + b$ es igual a cero.

Problemas

1. Resuelve gráficamente las siguientes desigualdades:

a) $-2x + 6 < 0$ b) $5x - 5 > 0$ c) $-\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$

2. ¿Será posible que una desigualdad lineal de la forma $ax + b \geq 0$ o $ax + b \leq 0$, con $a \neq 0$, no tenga solución? Justifica tu respuesta con base en la gráfica de $y = ax + b$.

3. Sea a un número positivo. Demuestra que la solución de la desigualdad $ax + b < 0$ es $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$.

2.6 Aplicaciones de las desigualdades lineales

Problema inicial

Mario contratará un servicio de internet para su negocio y debe decidir entre dos compañías A y B. La compañía A le cobrará \$9.50 por la instalación del módem y \$45.00 mensual; mientras que la compañía B le cobrará \$12.50 por la instalación del módem y \$43.50 mensual. Si Mario calcula el gasto total por la instalación y el pago mensual, ¿después de cuántos meses el servicio de la compañía B será más barato que el de la compañía A?

Solución

El gasto total por el servicio de la compañía A después de transcurrir x meses se calcula:

$$45x + 9.5,$$

mientras que el gasto total por el servicio de la compañía B después de transcurrir x meses será:

$$43.5x + 12.5$$

debe encontrarse la cantidad de meses que deben transcurrir para que:

$$\text{Gasto total B} < \text{Gasto total A}$$

$$43.5x + 12.5 < 45x + 9.5$$

se resuelve la desigualdad lineal:

$$12.5 - 9.5 < 45x - 43.5x$$
$$3 < 1.5x$$
$$2 < x.$$

> En la solución pueden multiplicarse todos los términos de ambos miembros de la desigualdad por 10 para trabajar con números enteros.

Luego, el servicio de la compañía B será más barato que el de la compañía A después de dos meses, es decir, del tercer mes en adelante.

En general

Para resolver una situación que implique el uso de desigualdades lineales se realiza lo siguiente:

1. Determinar, según la información del problema, la cantidad que representa la incógnita.
2. Plantear una desigualdad lineal.
3. Resolver la desigualdad lineal e interpretar la solución.

Problemas

1. El Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales (MARN) registró en el 2015 que la cantidad de sismos no sentidos fue 11 veces la cantidad de sismos sentidos; si en total se registró una cantidad superior a los 4 000 sismos en ese año, ¿cuál fue la cantidad mínima de sismos sentidos?

2. La distancia y en kilómetros recorrida por un automóvil después de x horas está dada por la expresión $y = 70x$. ¿En cuántas horas recorrerá al menos 315 kilómetros de una carretera?

3. En la mayoría de países anglosajones se utiliza el grado Fahrenheit para medir la temperatura; por ejemplo en un día de agosto de 2017 la temperatura registrada en Canadá fue de 71°F (se lee “71 grados Fahrenheit”), mientras que en El Salvador ese mismo día la temperatura fue de 31°C (se lee “31 grados Celsius o centígrados”). La relación entre grados Celsius y grados Fahrenheit está dada por la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde C es la temperatura en grados Celsius y F en grados Fahrenheit. Si en un día de septiembre de 2 017 la temperatura mínima registrada en El Salvador fue de 20°C, ¿cuál fue la temperatura mínima en grados Fahrenheit?

2.7 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $5x - 7 < -2x$

b) $3x + 11 \geq 8x - 14$

c) $-4x + 9 \geq -5x - 15$

d) $-x - 10 < 9x - 8$

e) $2x - 6 \geq 4x + 5$

f) $\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \leq -\frac{5}{2}x + \frac{1}{5}$

g) $-\frac{4}{3}x + \frac{2}{5} > -\frac{1}{4} + \frac{5}{2}x$

h) $4x > x + 12\sqrt{3}$

i) $-3x - 9\sqrt{5} \leq -7x - 13\sqrt{5}$

j) $x + 4\sqrt{2} \geq \frac{1}{2}x + 10\sqrt{2}$

k) $6\sqrt{3}\,x - 9 < 2\sqrt{3}\,x + 7$

l) $\sqrt{6}\,x + 5 > x + 4$

2. Resuelve gráficamente las siguientes desigualdades:

a) $-3x + 12 \geq 0$

b) $4x + 8 < 0$

c) $\frac{1}{3}x - 2 \geq 0$

3. Resuelve las siguiente situaciones:

a) La edad de Mario es un tercio de la edad de Antonio. Si la suma de sus edades es inferior a 28 años, ¿cuál es la edad máxima que puede tener Mario?

b) La cantidad total de estudiantes de la Facultad de Odontología de la Universidad de El Salvador en el año 2017 fue de a lo sumo 717 estudiantes. Si la razón entre la cantidad de hombres y la cantidad de mujeres es 1 : 2, ¿cuál es la cantidad máxima de hombres que hay?

c) En San Salvador, en Agosto de 2017 el precio mínimo del quintal de frijol rojo de seda nacional fue de \$50.00, y el máximo de \$58.00. Un quintal equivale a 100 libras aproximadamente. ¿Cuál debe ser el precio mínimo por libra de frijol para obtener ganancia si:

- Se compra el quintal a \$50.00?
- Se compra el quintal a \$58.00?

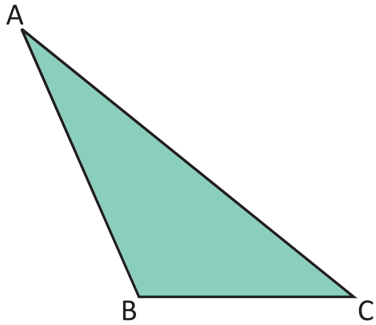
d) El ritmo de crecimiento de los niños, después de los dos años, es de al menos 6 centímetros por año hasta llegar a la adolescencia (15 años). ¿Cuál será la estatura mínima de un niño mayor de 10 años, si a los 7 años medía 1.19 m?

e) Carolina es vendedora de automóviles. Por la venta de un automóvil de \$6,000 obtiene una comisión del 3% sobre el precio de venta. ¿Cuántos automóviles de ese precio vendió Carolina como mínimo si su comisión al finalizar el año fue de más de \$1,080?

f) Las longitudes de la altura y la base de un rectángulo están en razón 3 : 4. Si el perímetro del rectángulo mide a lo sumo 105 cm, ¿cuál es la longitud máxima de la altura? ¿Y de la base?

g) En el triángulo ABC de la derecha, el lado AB mide 2 centímetros más que el lado BC, y el lado CA mide el doble del lado BC. Si la medida del perímetro del triángulo es menor o igual que 34 cm:

- ¿Cuál es la longitud máxima que puede tomar el lado BC?
- ¿Cuál es la longitud máxima que puede tomar el lado AB?
- ¿Cuál es la longitud máxima que puede tomar el lado CA?



3.1 Actividad. Construcción de un triángulo dados sus lados

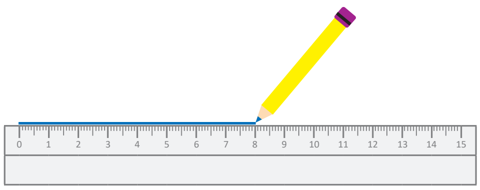
Materiales

- Regla y compás.
- Lápiz y cuaderno.

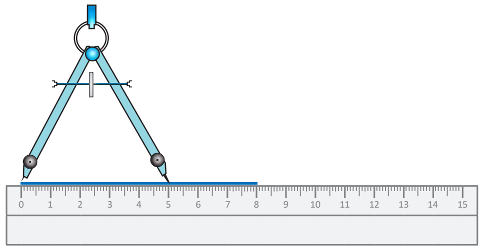
Actividad

Para dibujar un triángulo de lados 5, 7 y 8 centímetros se realiza lo siguiente:

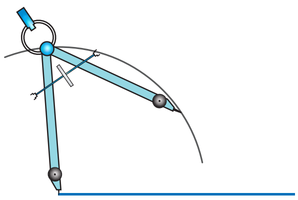
1. Traza el segmento de longitud 8 cm.



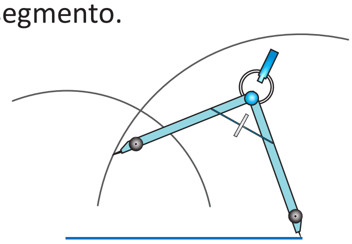
2. Con el compás toma la medida de otro de los lados, por ejemplo 5 cm.



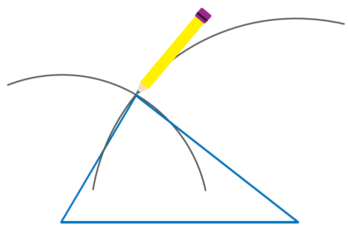
3. Coloca el compás en uno de los extremos del segmento dibujado en el numeral 1 y traza un arco de circunferencia.



4. Repite el proceso de los numerales 2 y 3, ahora tomando la medida de 7 cm y colocando el compás en el otro extremo del segmento.



5. Traza los segmentos que van desde el punto donde se cortan los arcos de circunferencia hacia cada uno de los extremos del segmento de 8 cm. Mide los lados del triángulo para verificar que, en efecto, miden 5, 7 y 8 centímetros.



Preguntas

1. Para cada caso, verifica si es posible trazar el triángulo de lados a, b y c:

   a) a = 4 cm, b = 5 cm y c = 6 cm
   b) a = 8 cm, b = 10 cm y c = 15 cm
   c) a = 3 cm, b = 4 cm y c = 7 cm
   d) a = 6 cm, b = 8 cm y c = 15 cm

2. Para cada uno de los literales del ejercicio 1 realiza lo siguiente:

   a) Calcula las sumas $a + b$, $b + c$ y $a + c$.
   b) ¿Se cumplen las desigualdades $a + b > c$, $b + c > a$ y $a + c > b$?

3.2 Desigualdad triangular, parte 1*

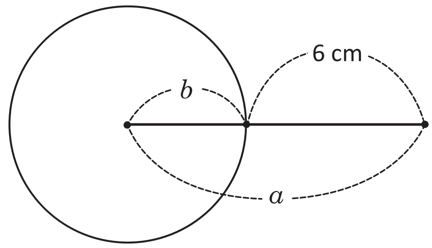
Problema inicial

Sean a = 10 cm, b = 4 cm y c un número positivo. ¿Qué valor puede tomar c para poder formar un triángulo de lados a, b y c?

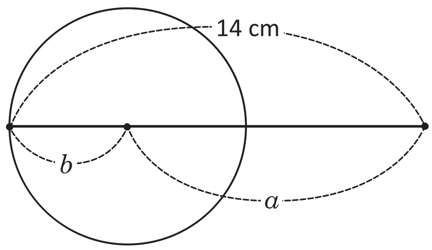
Traza el segmento de longitud a y tomando uno de los extremos como centro, traza una circunferencia de radio b.

Solución

Se traza el segmento a = 10 cm y una circunferencia de radio b = 4 cm y centro en uno de los extremos del segmento. Si dos de los vértices del triángulo son los extremos del segmento de longitud a entonces el tercer vértice debe estar sobre la circunferencia. En principio, el valor de c debe ser mayor que $a - b$ = 6 cm, de lo contrario no se podría formar un triángulo (ver figura de la derecha).

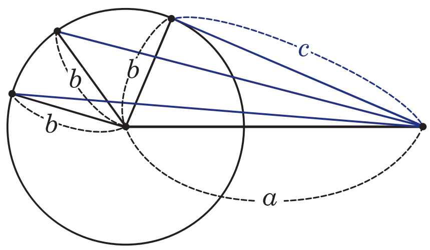


El valor de c también debe ser menor que $a + b$ = 14 cm; esto resulta de colocar el tercer vértice sobre la prolongación del segmento de longitud a como lo muestra la figura de la derecha y no se formaría un triángulo.



En cualquier otro lugar donde se coloque el tercer vértice, el valor de c siempre será mayor que 6 cm y menor que 14 cm. Por lo tanto:

$$a - b < c < a + b$$
$$6 < c < 14$$

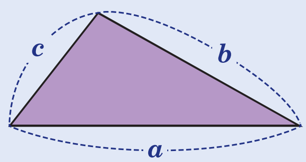


Por lo tanto, c puede tomar valores entre 6 cm y 14 cm para formar un triángulo.

Teorema

En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos lados es mayor que el tercer lado; y la diferencia de las longitudes de dos lados es menor que el tercer lado, es decir:

a) $b - c < a < b + c$;
b) $a - c < b < a + c$;
c) $a - b < c < a + b$.



Si las longitudes de los lados de un triángulo son a, b y c de tal manera que $b \geq c$ entonces:
$$b - c < a < b + c.$$

Problemas

1. Dadas las longitudes de dos de los lados de un triángulo, determina los posibles valores que puede tomar el tercer lado:
   a) dos lados miden 9 y 14 centímetros respectivamente;
   b) dos lados miden 3 y 11 centímetros respectivamente;
   c) dos lados miden 13 y 7 centímetros respectivamente.

2. Sin elaborar la figura, justifica por qué con las longitudes 14 cm, 30 cm y 16 cm no se puede elaborar un triángulo.

3.3 Desigualdad triangular, parte 2*

Problema inicial

Demuestra que, para cualesquiera valores reales a y b, con $a \leq b$ siempre se cumple la desigualdad:

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Separa por casos: cuando a y b son ambos positivos o iguales a cero; cuando uno es positivo o igual a cero y el otro negativo; y cuando ambos son negativos.

Solución

Para demostrar la desigualdad se separan los posibles casos para los números a y b, dependiendo si son positivos o iguales a cero, o negativos:

a) **Caso 1: $a \geq 0$ y $b \geq 0$.** Entonces, $|a| = a$, $|b| = b$ y $a + b \geq 0$; luego:

$$|a+b| = a + b = |a| + |b|$$

es decir, la desigualdad $|a+b| \leq |a| + |b|$ se cumple porque se cumple la igualdad.

b) **Caso 2: $a < 0$ y $b \geq 0$.** Entonces, $|a| = -a$, $|b| = b$ y $|a| + |b| = (-a) + b$.

- Si $a + b < 0$ entonces: $$|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b)$$

  pero $-b < b$ (ya que b es positivo), y se tiene $(-a) + (-b) < (-a) + b$ y por tanto, la desigualdad $|a+b| \leq |a| + |b|$ se cumple.

- El caso $a + b \geq 0$ queda como ejercicio.

El caso $a \geq 0$ y $b < 0$ se demuestra de forma similar al caso 2.

c) **Caso 3: $a < 0$ y $b < 0$.** Entonces, $|a| = -a$ y $|b| = -b$; además, la suma de a y b también será un número negativo y:

$$\begin{aligned} |a+b| &= -(a+b) \\ &= (-a) + (-b) \\ &= |a| + |b| \end{aligned}$$

es decir, la desigualdad $|a+b| \leq |a| + |b|$ se cumple porque se cumple la igualdad.

En General

Para cualesquiera números reales a y b, la desigualdad: $|a+b| \leq |a| + |b|$ siempre es verdadera, es decir, el valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de los valores absolutos de ambos números. A esta desigualdad se le llama **desigualdad triangular.**

Problemas

1. Verifica que la desigualdad triangular se cumple para las siguientes parejas de números a y b:

a) $a = 9$ y $b = 7$	b) $a = -8$ y $b = 10$	c) $a = -5$ y $b = -6$
d) $a = 11$ y $b = -13$	e) $a = -4$ y $b = 4$	f) $a = 8$ y $b = 8$
g) $a = 0$ y $b = -6$	h) $a = -\frac{4}{5}$ y $b = \frac{2}{5}$	i) $a = \sqrt{2}$ y $b = 3\sqrt{2}$

2. Demuestra que si $a < 0$, $b \geq 0$ y $a + b \geq 0$ entonces $|a+b| \leq |a| + |b|$.

3. Sean a, b y c números reales cualesquiera. Utiliza la desigualdad triangular para demostrar la desigualdad $|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$.

3.4 Desigualdad de las medias aritmética y geométrica

Problema inicial

Demuestra lo siguiente:

1. Si x es cualquier número real entonces $x^2 \geq 0$.
2. Si a y b son números reales no negativos entonces $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

En el literal a), separa por casos: $x > 0$ y $x < 0$. Para el literal b), utiliza el resultado de a) sustituyendo x por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Solución

1. Si $x = 0$ entonces $x^2 = 0$ y se cumple la igualdad. Ahora se separan los posibles casos para el número x: cuando $x > 0$ y cuando $x < 0$.

Caso 1, $x \geq 0$:

$x\,(x) \geq 0\,(x)$ multiplicar ambos lados por un número positivo no altera la desigualdad,

$x^2 \geq 0$.

Caso 2, $x < 0$:

$x\,(x) > 0\,(x)$ multiplicar ambos lados por un número negativo invierte la desigualdad,

$x^2 > 0$.

Por lo tanto, para cualquier número real x se cumple $x^2 \geq 0$.

2. Usando el resultado del literal anterior se sustituye x por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, es decir, si $x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ entonces:

$$x^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

$$a - 2\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}\right) + b \geq 0 \quad \text{desarrollar cuadrado de un binomio,}$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad \text{sumar } 2\sqrt{ab} \text{ a ambos lados de la desigualdad,}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{multiplicar por } \frac{1}{2} \text{ ambos lados de la desigualdad.}$$

Por lo tanto, para cualquier pareja de números no negativos a y b se cumple: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Propiedad

1. Para todo número real a se cumple $a^2 \geq 0$; la igualdad se verifica si $a = 0$.
2. Si a y b son números no negativos cualesquiera entonces la desigualdad:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

es verdadera; el miembro izquierdo de la desigualdad es la media aritmética de a y b, mientras que el miembro derecho es la media geométrica de a y b. A esta desigualdad se le llama **desigualdad de las medias aritmética y geométrica**.

Problemas

1. Verifica que la desigualdad de las medias aritmética y geométrica se cumple para las siguientes parejas de números a y b:

a) $a = 9$ y $b = 4$
b) $a = 8$ y $b = 18$
c) $a = \frac{1}{4}$ y $b = \frac{1}{16}$
d) $a = 10$ y $b = 90$
e) $a = 25$ y $b = 49$
f) $a = 6$ y $b = 30$

2. Utilizando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, demuestra lo siguiente:

a) si x es un número no negativo entonces $1 + x \geq 2\sqrt{x}$;
b) si a y b son números positivos entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

3.5 Desigualdades con expresiones racionales

Problema inicial

Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen la desigualdad:

a) $\frac{1}{x} > 0$ b) $\frac{1}{x-1} < 0$

Solución

a) Deben encontrarse todos los valores de x para los cuales el número $\frac{1}{x}$ es positivo. Es claro que $x = 0$ no es parte de la solución, pues se tendría la forma indeterminada $\frac{1}{0}$.

Ahora, para que la expresión $\frac{1}{x}$ sea positiva, el numerador y denominador deben ser ambos positivos o bien ambos negativos. Sin embargo, el numerador ya es positivo y por tanto debe ser $x > 0$.

Por tanto, la desigualdad $\frac{1}{x} > 0$ se cumple para $x > 0$, o sea $x \in]0, +\infty[$.

b) El proceso es similar al del literal anterior, solo que esta vez $\frac{1}{x-1}$ debe ser negativo. Como el numerador ya es positivo debe ser:

$$x - 1 < 0$$
$$x < 1$$

Por tanto, la desigualdad $\frac{1}{x-1} < 0$ se cumple para $x < 1$, o sea $x \in]-\infty, 1[$.

Conclusión

Sean a y b números reales cualesquiera, con $a \neq 0$.

1. Resolver la desigualdad $\frac{1}{ax+b} > 0$ significa encontrar los valores para los cuales la expresión es positiva. Esto ocurre solo si $ax + b > 0$.
2. Resolver la desigualdad $\frac{1}{ax+b} < 0$ significa encontrar los valores para los cuales la expresión es negativa. Esto ocurre solo si $ax + b < 0$.

Ejemplo

Resuelve la desigualdad $-\frac{1}{2x+3} < 0$.

Se multiplica por –1 ambos miembros, esto invierte la desigualdad:

$$\frac{1}{2x+3} > 0$$

entonces, $\frac{1}{2x+3} > 0$ solo si $2x + 3 > 0$:

$$2x > -3$$
$$x > -\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la desigualdad $-\frac{1}{2x+3} < 0$ se cumple para $x > -\frac{3}{2}$, es decir si $x \in \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

No se consideran los símbolos $\geq$ y $\leq$ para estas desigualdades, ya que una expresión de la forma $\frac{1}{ax+b}$ nunca será igual a cero, por lo que no tiene sentido considerarlos.

Problemas

Resuelve las siguientes desigualdades (expresa la solución utilizando intervalos):

a) $\frac{1}{x+4} > 0$ b) $\frac{1}{2x-5} < 0$ c) $\frac{-1}{3x+1} > 0$

d) $-\frac{1}{1-x} > 0$ e) $\frac{1}{-2x+10} > 0$ f) $\frac{2}{4x-7} < 0$

g) $-\frac{3}{5x+6} > 0$ h) $\frac{-x-4}{x+5} > -1$ i) $\frac{x+2}{x+3} > 1$

En los problemas h) e i), pasa todo a un solo miembro de modo que en un miembro quede cero.

3.6 Problemas de la unidad

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales (escribe la solución utilizando intervalos):

a) $4x - 12\sqrt{7} \leq 20\sqrt{7}$ b) $x + 9\sqrt{5} \leq - x - 7\sqrt{5}$ c) $- 5x + 3\sqrt{6} > - x + 5\sqrt{6}$

d) $11x + 2\sqrt{2} \geq 4x + 5\sqrt{2}$ e) $8x - 15\sqrt{2} < 5x - 6\sqrt{3}$ f) $\sqrt{10}\,x - 8 > \sqrt{2}\,x - 6$

2. Para cada literal, determina todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades:

a) $\begin{cases} 5x - 3 > 4x - 5 \\ - 2x + 5 \leq - 3x + 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x - 6 < 5x - 16 \\ x + 11 \geq - x - 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 7 < 5x + 1 \\ 6x > 3x + 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} - 2x - 3 \leq x - 5 \\ 3x - 1 \geq 4x + 7 \end{cases}$

Para cada literal, representa la solución de cada desigualdad en la recta numérica. Luego, verifica los valores donde coinciden ambos intervalos.

3. Resuelve las siguientes situaciones:

a) José es un estudiante de primer año de bachillerato. Durante este año obtuvo las siguientes calificaciones en sus exámenes de período de matemática:

Período 1	7.6
Período 2	8.0
Período 3	8.2

Si José quiere que su promedio final en los exámenes sea mayor o igual a 8.0, ¿cuál debe ser la calificación mínima que ha de obtener en el examen del período 4 para lograrlo?

b) Julia rentará un auto para un viaje. La agencia A le cobrará \$24.00 la renta del auto más \$0.30 por cada kilómetro recorrido; mientras que la agencia B le cobrará \$25.00 la renta del auto más \$0.25 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuál es la cantidad mínima de kilómetros que puede recorrer Julia hasta que el precio de la agencia A exceda al precio de la agencia B?

c) Un producto genera utilidad solo cuando el ingreso de la venta del producto excede al costo de producción. Una empresa de teléfonos celulares calcula que el costo C (en dólares) para producir x teléfonos celulares es:

$$C = 90x + 1\,000,$$

mientras que el ingreso R (en dólares) es: $R = 140x$.

¿Cuál debe ser la cantidad mínima de teléfonos celulares que deben venderse para obtener utilidad?

4. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuestra que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 3.$$

Utiliza el resultado de la clase 3.2 de esta unidad.

5. Utilizando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica demuestra lo siguiente:

a) si $x > 0$ entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$;

b) si a, b y x son números positivos entonces $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$.