Unidad 4

Funciones reales

Imagen del papiro Ahmes, en él se presentan números naturales y sus cuadrados, cubos, e inversos.

Las nociones sobre función surgen históricamente desde épocas muy antiguas, en regiones como Egipto o Mesopotamia (Babilonia), analizando las tablas sobre cuadrados, cubos o inversos de un número (actualmente puede analizarse como una función). Sin embargo, el concepto de dependencia entre variables surge de manera natural en la historia y es presentado por primera vez por el matemático y pensador Nicolás Oresme, quién describe las leyes de la naturaleza como dependencia entre magnitudes. Pero es con el matemático y astrónomo Galileo Galilei que se presenta un concepto más formal de función en sus estudios del movimiento como relación entre variables en el siglo XVII. Luego, con el impulso de la geometría analítica se desarrolla la teoría de funciones, hasta que el matemático suizo Johann Bernoulli acuña la expresión de “función”. Después de mucho desarrollo se da la definición de función a principios del siglo XX, que es la que se conoce actualmente; además, en este siglo se da el esfuerzo de rigurosidad de la matemática a partir de la teoría de conjuntos, con lo cual se da un enfoque nuevo a la teoría de funciones que contribuyó a su generalización a partir del surgimiento de áreas como la topología.

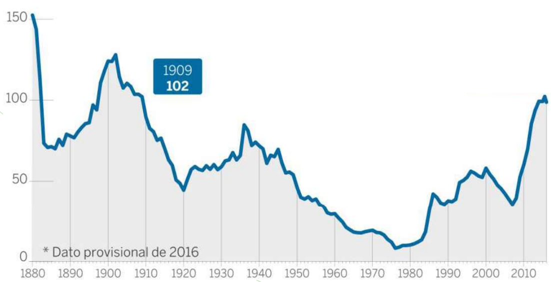


Gráfico de la deuda en función del tiempo en una población

El conocimiento de funciones ha facilitado la representación y estudio de los fenómenos de la vida cotidiana, y su interpretación ha sido de gran aplicación en economía, medicina, física e ingeniería. Las funciones rigen la vida del ser humano tanto en la Tierra como en un plano más complejo: el Universo.

Para esta unidad se continuará estudiando la función cuadrática, generalizando la idea de desplazamientos paralelos a los ejes, se dará una definición de función real, se abordarán otras funciones importantes por medio de un estudio descriptivo. Al finalizar se encontrarán algunas prácticas en ***GeoGebra***, para consolidar los aprendizajes de esta unidad.

1.1 Notación de funciones

Problema inicial

Encuentra el valor de y correspondiente al valor de x en cada función si:

a) $y = 5x - 1$; $x = -3$ b) $y = 4x^2$; $x = \frac{1}{2}$ c) $y = \frac{x^2}{2} + 5$; $x = 10$

Solución

En cada caso debe sustituirse el valor de x para encontrar y:

a)
$$\begin{aligned} y &= 5(-3) - 1 \\ &= -15 - 1 \\ &= -16 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a $x = -3$ es $y = -16$.

b)
$$\begin{aligned} y &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 4\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a $x = \frac{1}{2}$ es $y = 1$.

c)
$$\begin{aligned} y &= \frac{(10)^2}{2} + 5 \\ &= \frac{100}{2} + 5 \\ &= 55 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a $x = 10$ es $y = 55$.

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se llama **función de A en B** a la correspondencia que asigna a cada elemento x del conjunto A un único elemento y del conjunto B. Para denotar una función de A en B se escribe $\boldsymbol{f}$**: A $\longrightarrow$ B**, al elemento x de A se le llama **variable independiente o preimagen**; mientras que el elemento y de B se llama **variable dependiente o imagen**. Cuando se trata con funciones, la variable y se escribe como $\boldsymbol{f(x)}$ y se lee "f de x".

> Ya se han estudiado dos funciones específicas: la función lineal $f(x) = ax + b$ y la función $f(x) = ax^2 + c$. Ambas funciones son de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, pues los valores de x y y son números reales. Las funciones también pueden nombrarse utilizando otras letras, por ejemplo, $g(x)$ o $h(x)$.

Dado un valor particular $x = m$, para encontrar el valor de $f(m)$ se sustituye x por m en la **ecuación de la función f**.

Ejemplo

Encuentra el valor de $f(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = -2x + 7$; $x = -5$ b) $f(x) = 3x^2 + 2$; $x = 2$

> $f(x)$ NO significa f multiplicado por x, sino la función f evaluada en x.

Deben sustituirse los valores de x en la ecuación de la función, según sea el caso. En el primer literal, el valor de la función evaluada en $x = -5$ se representa por $f(-5)$; mientras que en el segundo literal, el valor de la función evaluada en $x = 2$ se representa por $f(2)$.

a)
$$\begin{aligned} f(-5) &= -2(-5) + 7 \\ &= 10 + 7 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(-5) = 17$.

b)
$$\begin{aligned} f(2) &= 3(2)^2 + 2 \\ &= 3(4) + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(2) = 14$.

Problemas

1. En cada caso encuentra el valor de $f(x)$, si x toma el valor dado:

   a) $f(x) = x + 4$; $x = 0$ b) $f(x) = 4x - 6$; $x = 1$ c) $f(x) = -\frac{x}{3} + 1$; $x = 6$

   d) $f(x) = -5x^2$; $x = 3$ e) $f(x) = x^2 + 4$; $x = -1$ f) $f(x) = -\frac{x^2}{2} - 2$; $x = 2$

2. Dada la función lineal $f(x) = 2x - 3$, ¿cuál debe ser el valor de x para que $f(x) = 5$?

3. Dada la función $f(x) = 4x^2 + 5$, ¿cuáles deben ser los valores de x para que $f(x) = 11$?

1.2 Gráfica de una función

Problema inicial

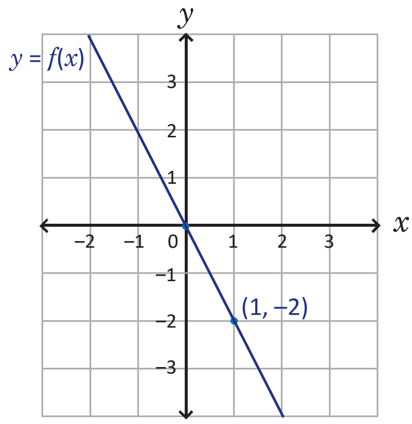
Dadas las funciones $f(x) = -2x$ y $g(x) = 2x^2$:

1. Elabora la gráfica de cada una de ellas.

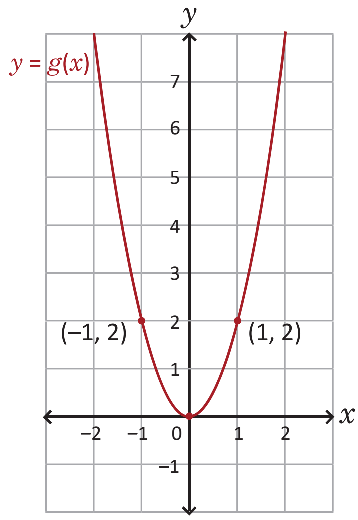
La gráfica de f es una línea recta mientras que la de g es una parábola.

2. Traza líneas rectas verticales en cada gráfica. ¿Cuántas veces cortan las rectas verticales a las gráficas de f y g?
3. Si se continúan trazando rectas verticales, ¿cuántas veces cortarán a las gráficas de las funciones f y g?

Solución

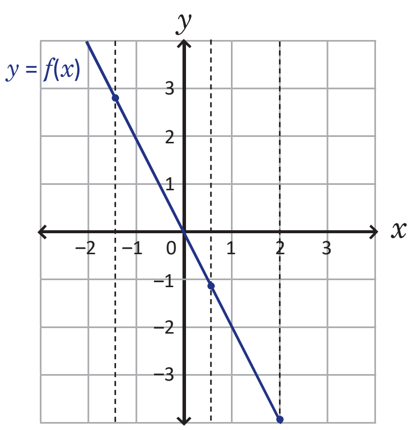


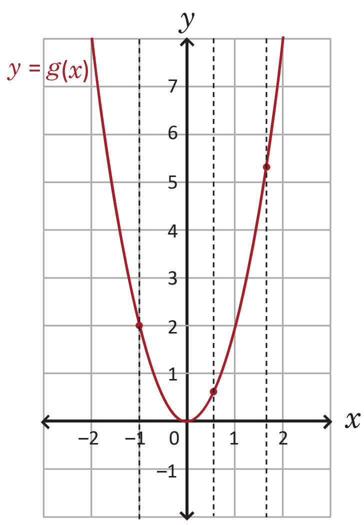
1. La función f es una función lineal y su gráfica es una línea recta que pasa por el origen. A partir de este, si x aumenta una unidad (es decir, $x = 1$) entonces $f(x)$ disminuye 2. La gráfica de $f(x) = -2x$ se presenta a la derecha.



La gráfica de la función g es una parábola con vértice en el origen. Para graficarla se buscan otros dos puntos a la izquierda y derecha del vértice: si $x = -1$ entonces $g(-1) = 2(-1)^2 = 2$ y el punto $(-1, 2)$ pertenece a la parábola de g; de igual forma si $x = 1$ entonces $g(1) = 2(1)^2 = 2$ y el punto $(1, 2)$ pertenece a la parábola. La gráfica de $g(x) = 2x^2$ se presenta a la derecha.

2. En cada gráfica se han trazado tres rectas verticales. Cada una de ellas corta a la gráfica de f o g, según sea el caso, en un único punto:





3. Sin importar la cantidad de rectas verticales que se tracen, cada una de ellas cortará a la gráfica de la función f o g (según sea el caso) en un único punto.

Conclusión

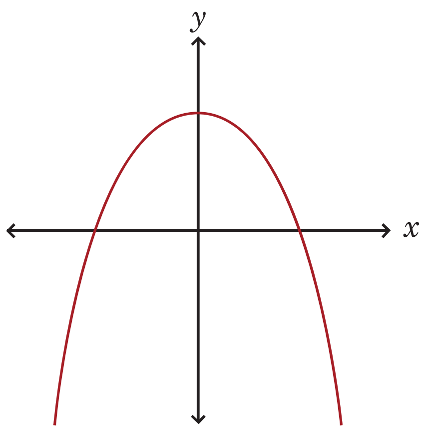
Una línea trazada en el plano cartesiano, cuyos valores de x se encuentran en un intervalo I, corresponde a la gráfica de una función si toda recta vertical trazada en el intervalo I corta a la línea en un único punto. A esta manera de reconocer gráficas de funciones se le conoce como **prueba de la recta vertical**.

Esto ocurre debido a la definición misma de función, a cada elemento x le corresponde un único elemento y. Las rectas verticales trazadas en cada gráfica representan un valor específico para x, si esta recta corta a la gráfica de una función en un único punto, entonces esto indica que para ese valor de x hay un único valor para $f(x)$ o $g(x)$.

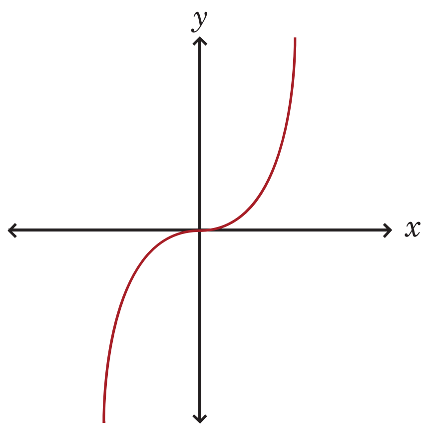
Problemas

Utilizando la prueba de la recta vertical determina, en cada caso, si la línea representa la gráfica de una función (no es necesario encontrar la ecuación de la función):

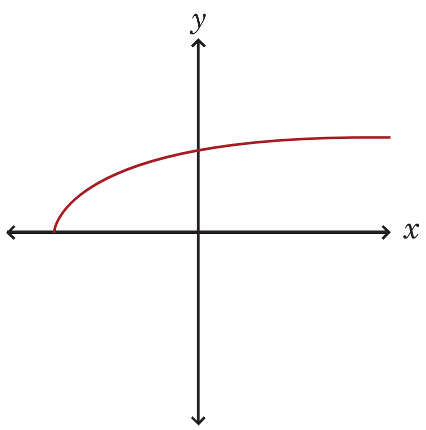
a)



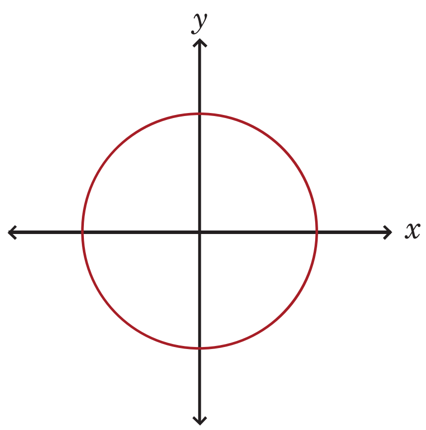
b)



c)



d)



1.3 Dominio y rango de una función*

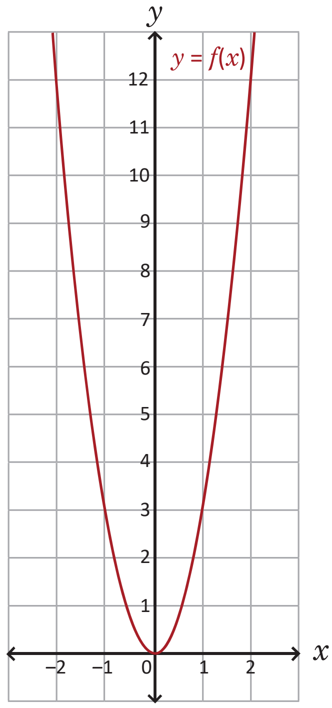
Problema inicial

Utilizando la ecuación y la gráfica de la función $f(x) = 3x^2$ responde lo siguiente:

1. ¿Para qué valores de x está definida $f(x)$?
2. ¿Cuáles son todos los posibles valores para $f(x)$?

Solución

La gráfica de la función es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (0, 0) como se muestra en la figura de la derecha.



1. En la ecuación de la función $f(x) = 3x^2$, la variable independiente x puede tomar el valor de cualquier número real y siempre será posible encontrar su correspondiente $f(x)$. Por lo tanto, $f(x)$ está definida para cualquier número real que tome el valor de x.

2. En la gráfica de la función, el valor más pequeño que toma la variable dependiente $y = f(x)$ ocurre cuando $x = 0$. A medida que x aumenta o disminuye, el valor de $f(x)$ siempre aumentará (esto lo refleja el hecho de que la parábola se abre hacia arriba). Por lo tanto, los valores posibles para $f(x)$ son los números reales mayores o iguales a 0, es decir, los números pertenecientes al intervalo $[0, \infty[$.

Definición

El **dominio** de una función f se denota por D_f y es el conjunto de todos los números x para los cuales $f(x)$ está definida. El **rango** de una función f se denota por R_f y es el conjunto de todos los posibles valores para $f(x)$.

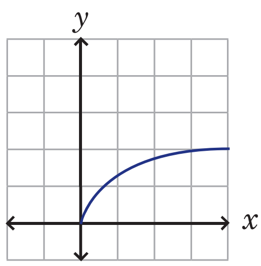
En el caso de las funciones lineales, tanto el dominio como el rango son el conjunto de los números reales, es decir $\mathbb{R}$. Mientras que para funciones de la forma $f(x) = ax^2$ el dominio es $\mathbb{R}$ y el rango depende del valor de a:
1. Si $a > 0$ entonces $R_f = [0, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_f =]-\infty, 0]$.

Problemas

1. Encuentra el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$ b) $f(x) = -10x + 3$ c) $f(x) = -x - 5$
d) $f(x) = x^2$ e) $f(x) = 2x^2$ f) $f(x) = -x^2$
g) $f(x) = -3x^2$ h) $f(x) = 3x^2$ i) $f(x) = -2x^2$

2. La gráfica de una función se presenta en la figura de la derecha. Utilizando únicamente este recurso, ¿cuál es el dominio y el rango de la función?

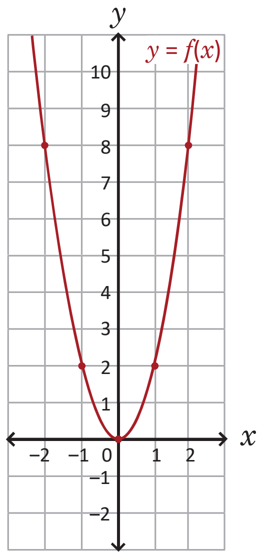


Unidad 4

2.1 Desplazamiento vertical

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ realiza lo siguiente:

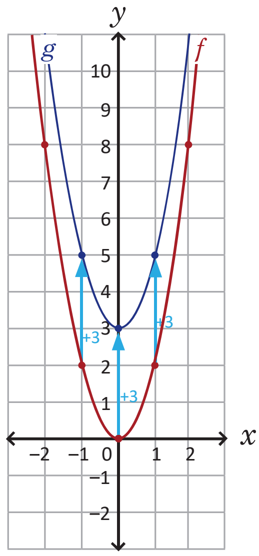


1. Grafica las funciones $g(x) = 2x^2 + 3$ y $h(x) = 2x^2 - 2$. ¿Cuál es el dominio y el rango en cada una?

La gráfica de $g(x)$ corresponde a un desplazamiento de 3 unidades hacia arriba de la gráfica de f. ¿Hacia dónde será el desplazamiento de h?

2. Explica qué le ocurre a la gráfica de f para obtener las gráficas de g y h.

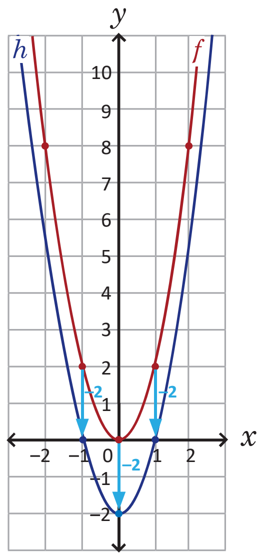
Solución



1. Para graficar $g(x) = 2x^2 + 3$ se desplaza verticalmente la gráfica de $f(x) = 2x^2$ tres unidades hacia arriba (ver figura de la derecha).

   Es decir, si el vértice de la gráfica de f es (0, 0) entonces el de g será (0, 3); si los puntos (–1, 2) y (1, 2) pertenecen a la parábola de f entonces los puntos (–1, 5) y (1, 5) pertenecen a la gráfica de g.

   De la gráfica de la función se deduce que: $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [3, \infty[$.



Mientras que para graficar $h(x) = 2x^2 - 2$ se desplaza verticalmente la gráfica de $f(x) = 2x^2$ dos unidades hacia abajo.

Es decir, si el vértice de la gráfica de f es (0, 0) entonces el de h será (0, –2); si los puntos (–1, 2) y (1, 2) pertenecen a la parábola de f entonces los puntos (–1, 0) y (1, 0) pertenecen a la gráfica de h.

De la gráfica de la función se deduce que: $D_h = \mathbb{R}$ y $R_h = [-2, \infty[$.

2. Utilizando $f(x) = 2x^2$:

a) la gráfica de la función $g(x) = 2x^2 + 3$ se obtiene desplazando verticalmente hacia arriba tres unidades la gráfica de $f(x) = 2x^2$;

b) la gráfica de la función $h(x) = 2x^2 - 2$ se obtiene desplazando verticalmente hacia abajo dos unidades la gráfica de $f(x) = 2x^2$.

Definición

Dada una función $f(x)$ y un número real k diferente de cero, la gráfica de la función $g(x) = f(x) + k$ es un **desplazamiento vertical de k unidades** de la gráfica de f, y: si $k > 0$ entonces la gráfica se desplaza hacia arriba, y si $k < 0$ entonces la gráfica se desplaza hacia abajo.

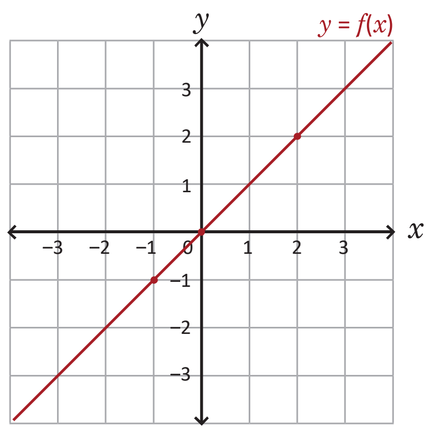
Si $f(x) = ax^2$ entonces la gráfica de $g(x) = ax^2 + k$ es una parábola con vértice en $(0, k)$, y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_f = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_f =]-\infty, k]$.

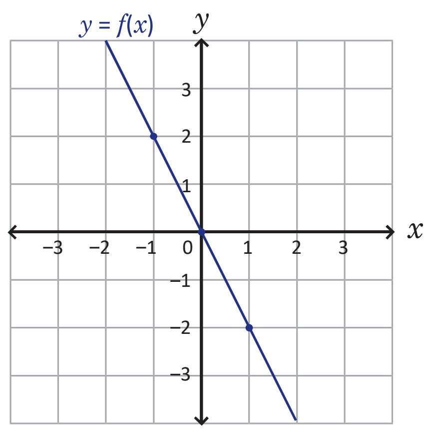
Problemas

Para cada caso y utilizando la gráfica de la función $f(x)$, grafica la función $g(x)$ y encuentra su dominio y rango:

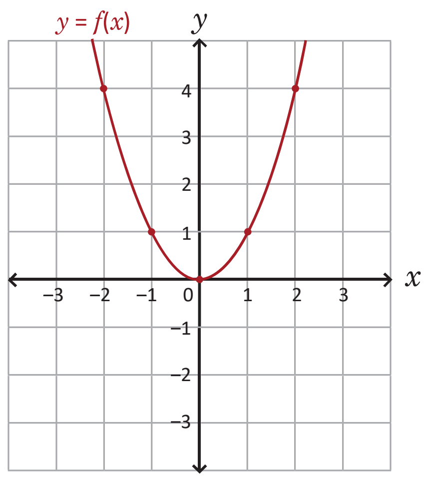
a) $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$



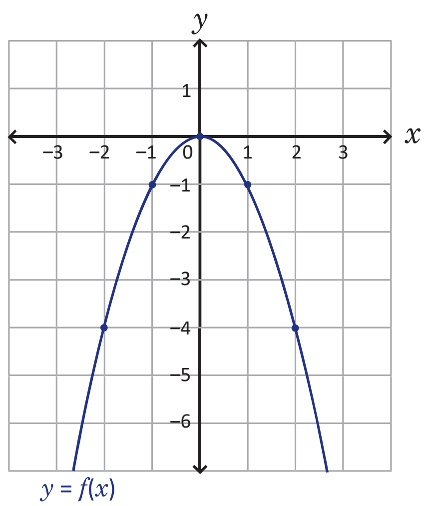
b) $f(x) = -2x$ y $g(x) = -2x - 3$



c) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 2$



d) $f(x) = -x^2$ y $g(x) = -x^2 - 3$



Unidad 4

2.2 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, $h > 0$

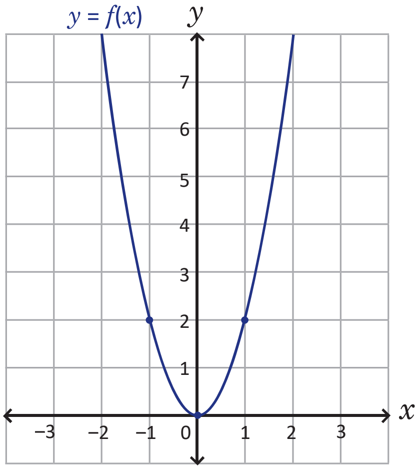
Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ realiza lo siguiente:

1. Completa la tabla y grafica la función $g(x) = 2(x - 1)^2$:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$							

La gráfica de g es una parábola.



2. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de g? ¿Cuál es el dominio y rango de g?
3. ¿Cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener la de g?

Solución

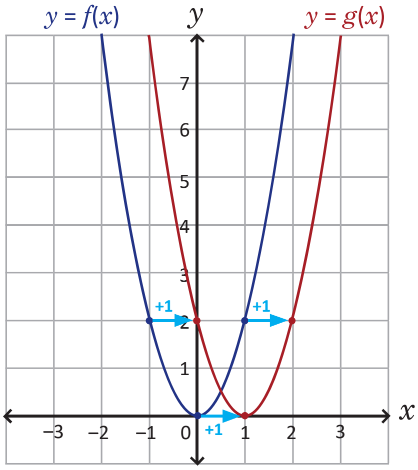
1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$	32	18	8	2	0	2	8

se observa lo siguiente: dado un valor de x, su correspondiente $g(x)$ es igual al valor de $f(x - 1)$. Por ejemplo, si $x = 0$:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0 - 1) \\ &= f(-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

La gráfica de g se muestra a la derecha.



2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (1, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, \infty[$.

3. La gráfica de $f(x) = 2x^2$ se desplazó una unidad horizontalmente hacia la derecha para obtener la gráfica de $g(x) = 2(x - 1)^2$.

Conclusión

Sean $f(x) = ax^2$, donde a es cualquier número real diferente de cero, y $h > 0$. La gráfica de la función:

$$g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$$

es un **desplazamiento horizontal de h unidades hacia la derecha** de la gráfica de f. El vértice de la parábola es $(h, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [0, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, 0]$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$, grafica la función $g(x)$ en cada caso. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función g:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x - 2)^2$
b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x - 1)^2$
c) $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 2(x - 2)^2$
d) $f(x) = -2x^2$; $g(x) = -2(x - 3)^2$

2.3 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, $h < 0$

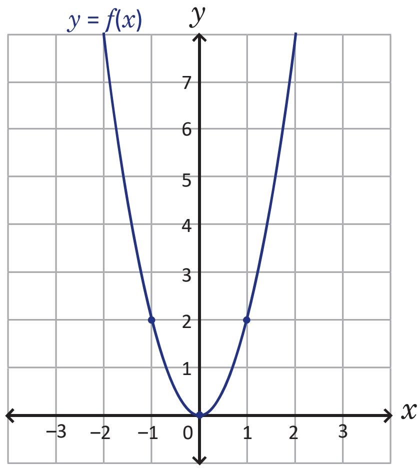
Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ realiza lo siguiente:

1. Completa la tabla y grafica la función $g(x) = 2(x + 1)^2$:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$							

La gráfica de g es una parábola.



2. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de g? ¿Cuál es el dominio y rango de g?

3. ¿Cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener la de g?

Solución

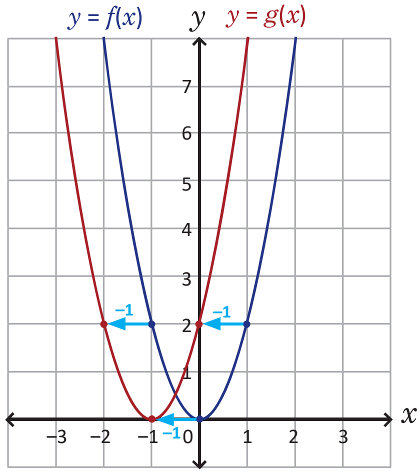
1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	18	8	2	0	2	8	18
$g(x)$	8	2	0	2	8	18	32

se observa lo siguiente: dado un valor de x, su correspondiente $g(x)$ es igual al valor de $f(x + 1)$. Por ejemplo, si $x = 0$:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0 + 1) \\ &= f(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

La gráfica de g se muestra a la derecha.



2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son (–1, 0), $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g = [0, +\infty[$.

3. La gráfica de $f(x) = 2x^2$ se desplazó una unidad horizontalmente hacia la izquierda para obtener la gráfica de $g(x) = 2(x + 1)^2$.

La ecuación de la función g también puede escribirse como $g(x) = 2[x - (-1)]^2$.

Conclusión

Sean $f(x) = ax^2$ donde a es cualquier número real diferente de cero, y $h < 0$. La gráfica de la función:

$$g(x) = f(x - h) = a(x - h)^2$$

es un **desplazamiento horizontal de h unidades hacia la izquierda** de la gráfica de f. El vértice de la parábola es $(h, 0)$, $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [0, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, 0]$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$, grafica la función $g(x)$ en cada caso. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función g:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x + 2)^2$

b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x + 1)^2$

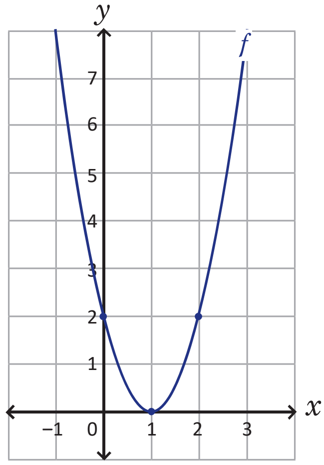
c) $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 2(x + 2)^2$

d) $f(x) = -2x^2$; $g(x) = -2(x + 3)^2$

2.4 Función de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, parte 1

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2(x-1)^2$ realiza lo siguiente:

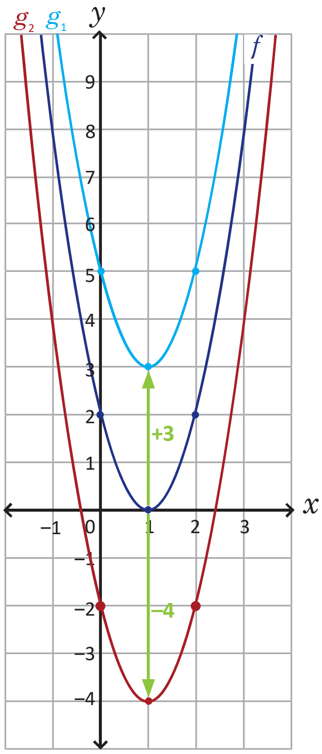


1. Grafica las funciones $g_1(x) = 2(x-1)^2 + 3$ y $g_2(x) = 2(x-1)^2 - 4$. Describe cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener cada gráfica.

> La gráfica de $g(x) = f(x) + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la gráfica de f, hacia arriba si k es positivo y hacia abajo si k es negativo.

2. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango en cada caso.

Solución



1. Ambas funciones son de la forma $f(x) + k$, es decir, son desplazamientos verticales de k unidades.

   En el caso de $g_1(x) = 2(x-1)^2 + 3$, $k = 3$ y por tanto la gráfica de f se desplaza tres unidades verticalmente hacia arriba. La parábola en color celeste de la figura de la derecha corresponde a la gráfica de g_1.

   En el caso de $g_2(x) = 2(x-1)^2 - 4$, $k = -4$ y por tanto la gráfica de f se desplaza cuatro unidades verticalmente hacia abajo. La parábola en color rojo de la figura de la derecha corresponde a la gráfica de g_2.

2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de la función g_1 son (1, 3) y además $D_{g_1} = \mathbb{R}$ y $R_{g_1} = [3, \infty[$.

   Mientras que las coordenadas del vértice de la gráfica de la función g_2 son (1, –4) y además $D_{g_2} = \mathbb{R}$ y $R_{g_2} = [-4, \infty[$.

Conclusión

Sean $f(x) = a(x-h)^2$ donde a y h son números reales cualesquiera, y a es diferente de cero. La gráfica de la función:

$$g(x) = a(x-h)^2 + k$$

donde k es un número real, es un **desplazamiento vertical de k unidades** de la gráfica de f. Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba, y si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo. El **vértice de la parábola de g** es **(h, k)**, $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, k]$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$, grafica la función $g(x)$ en cada caso. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función g:

a) $f(x) = (x-2)^2$; $g(x) = (x-2)^2 + 3$

b) $f(x) = -(x-1)^2$; $g(x) = -(x-1)^2 + 2$

c) $f(x) = 2(x+2)^2$; $g(x) = 2(x+2)^2 - 1$

d) $f(x) = -2(x+3)^2$; $g(x) = -2(x+3)^2 - 4$

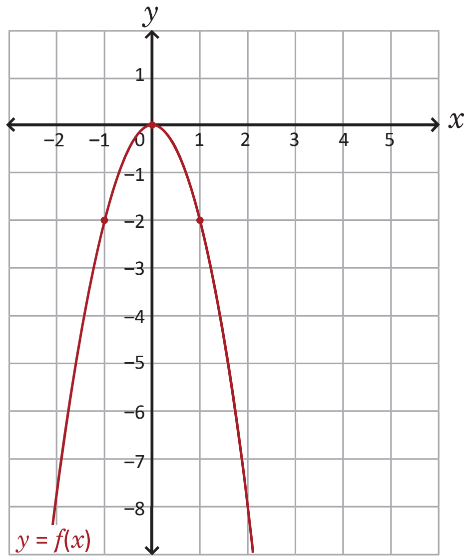
2.5 Función de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, parte 2

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la función $f(x) = -2x^2$ realiza lo siguiente:

1. Grafica la función $g(x) = -2(x - 3)^2 - 1$. Describe cómo se debe desplazar la gráfica de f para obtener g.

2. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función g.

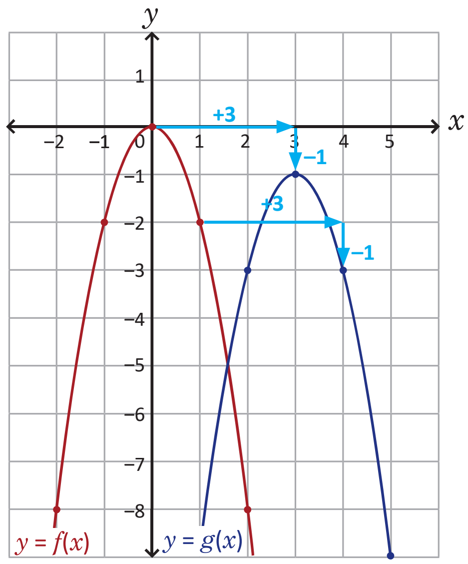


Solución

1. La función g es de la forma $f(x - h) + k$, es decir, combina desplazamientos tanto horizontales como verticales. En este caso, $h = 3$ y $k = -1$:

   Primero se desplaza la gráfica de f tres unidades horizontalmente hacia la derecha, luego se desplaza una unidad verticalmente hacia abajo. La gráfica de g corresponde a la parábola en color azul de la figura de la derecha.

2. Las coordenadas del vértice de la gráfica de g son $(3, -1)$ y además $D_g = \mathbb{R}$ y $R_g =]-\infty, -1]$.



Conclusión

Dada una función $f(x) = ax^2$, donde a es un número real diferente de cero. La gráfica de la función:

$$g(x) = a(x - h)^2 + k$$

es una parábola que resulta de desplazar h **unidades horizontalmente** y k **unidades verticalmente** la gráfica de f. El vértice de la gráfica de g es (h, k), $D_g = \mathbb{R}$ y:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, k]$.

Problemas

Para cada caso, traza la gráfica de $f(x)$ y a partir de esta elabora la gráfica de $g(x)$. Encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de g:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x + 1)^2 + 2$

b) $f(x) = -x^2$; $g(x) = -(x + 3)^2 - 3$

c) $f(x) = 3x^2$; $g(x) = 3(x - 2)^2 + 1$

d) $f(x) = -3x^2$; $g(x) = -3(x - 4)^2 - 2$

Unidad 4

2.6 Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx$*

Problema inicial

Traza la gráfica y encuentra el dominio y rango de las siguientes funciones:

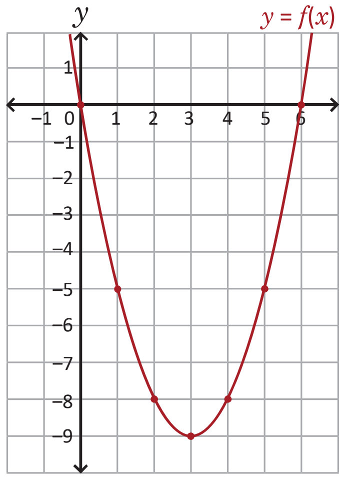
a) $f(x) = x^2 - 6x$ b) $g(x) = -2x^2 - 4x$

Completa los cuadrados en las ecuaciones de cada función.

Solución

a) Se completa el cuadrado en la ecuación de la función f:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\ &= (x^2 - 6x + \mathbf{3}^2) - \mathbf{3}^2 \\ &= (x - \mathbf{3})^2 - \mathbf{3}^2 \\ &= (x - \mathbf{3})^2 - 9 \end{aligned}$$

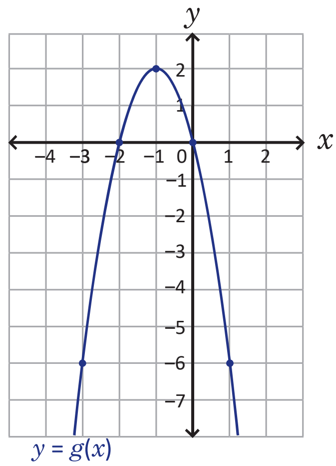


La función f es de la forma $a(x - h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-9, \infty[$ y su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en $(3, -9)$ como lo muestra la figura de la derecha.

$f(x) = (x - 3)^2 - 9$ es un desplazamiento de 3 unidades horizontalmente a la derecha y 9 unidades verticalmente hacia abajo de la gráfica de $h(x) = x^2$.

b) De forma similar, se completa el cuadrado en la ecuación de la función g:

$$\begin{aligned} g(x) &= -2(x^2 + 2x) \\ &= -2\left[x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] \\ &= -2[x^2 + 2x + \mathbf{1}^2 - \mathbf{1}^2] \\ &= -2[(x + \mathbf{1})^2 - 1] \\ &= -2(x + \mathbf{1})^2 + 2 \end{aligned}$$



La función g es de la forma $a(x - h)^2 + k$: $D_g = \mathbb{R}$, $R_g =]-\infty, 2]$ y su gráfica es una parábola abierta hacia abajo con vértice en $(-1, 2)$ como lo muestra la figura de la derecha.

$g(x) = -2(x + 1)^2 + 2$ es un desplazamiento de 1 unidad horizontalmente a la izquierda y 2 unidades verticalmente hacia arriba de la gráfica de $h(x) = -2x^2$.

En resumen

Dada una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx$, esta puede llevarse a la forma $a(x - h)^2 + k$ completando cuadrados en la ecuación de la función f y su gráfica es una parábola, abierta hacia arriba si $a > 0$ o abierta hacia abajo si $a < 0$.

Problemas

Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, y encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función:

a) $f(x) = x^2 - 4x$ b) $f(x) = -x^2 + 2x$ c) $f(x) = 3x^2 + 6x$

2.7 Función de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$

Problema inicial

Traza la gráfica y encuentra el vértice, el dominio y rango de la función:

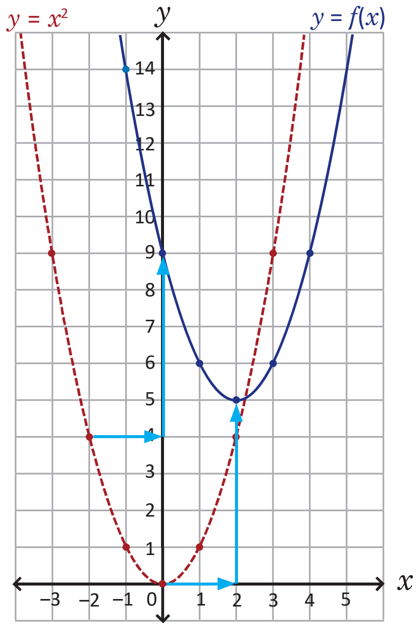
$$f(x) = x^2 - 4x + 9.$$

Completa el cuadrado en la ecuación de f.

Solución

Se completa el cuadrado en la ecuación de la función f:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x^2 - 4x + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{4}{2}\right)^2\right] + 9 \\ &= (x^2 - 4x + \mathbf{2}^2) - \mathbf{2}^2 + 9 \\ &= (x - \mathbf{2})^2 - 4 + 9 \\ &= (x - \mathbf{2})^2 + 5 \end{aligned}$$



luego la función f se ha reescrito en la forma $(x - h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [5, \infty[$ y su gráfica es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (2, 5) como lo muestra la figura de la derecha.

$f(x) = (x - 2)^2 + 5$ es un desplazamiento de 2 unidades horizontalmente a la derecha y 5 unidades verticalmente hacia arriba de la gráfica de $y = x^2$.

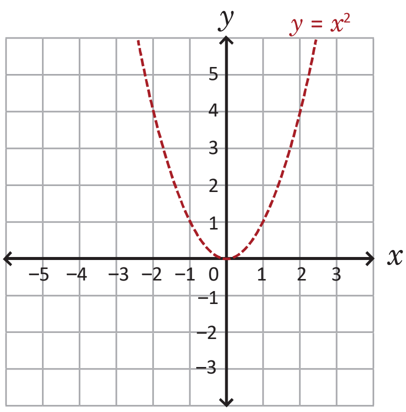
En resumen

Dada una función de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$, esta puede llevarse a la forma $(x - h)^2 + k$ completando cuadrados en la ecuación de la función f y su gráfica es una parábola, abierta hacia arriba.

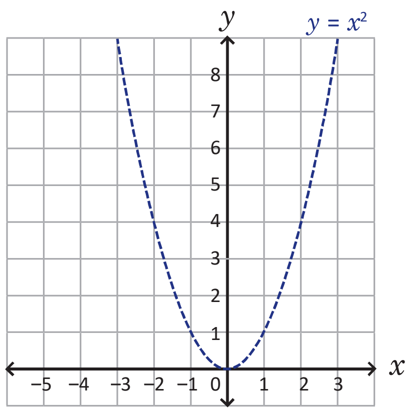
Problemas

Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$



b) $f(x) = x^2 + 4x + 5$



c) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

d) $f(x) = x^2 - 8x + 18$

2.8 Función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Problema inicial

Traza la gráfica y encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y rango de la función:

$$f(x) = -2x^2 - 12x - 16.$$

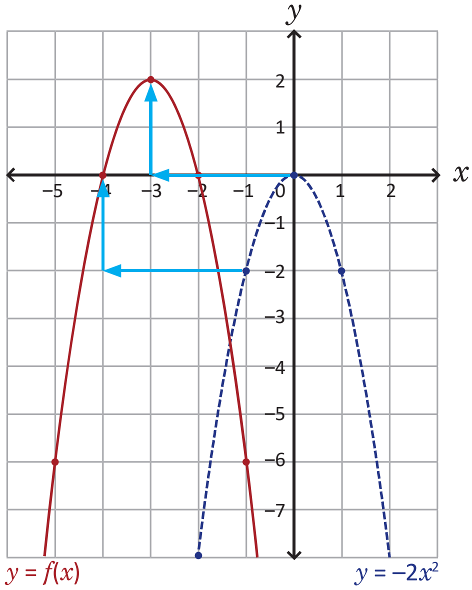
Completa el cuadrado en la ecuación de la función f.

Solución

Se completa el cuadrado en la ecuación de la función f:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2[x^2 + 6x] - 16 \\ &= -2\left[x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] - 16 \\ &= -2[x^2 + 6x + 3^2 - 3^2] - 16 \\ &= -2[(x + 3)^2 - 9] - 16 \\ &= -2(x + 3)^2 + 18 - 16 \\ &= -2(x + 3)^2 + 2 \end{aligned}$$

luego, la función f se ha reescrito en la forma $a(x - h)^2 + k$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f =]-\infty, 2]$ y su gráfica es una parábola abierta hacia abajo con vértice en $(-3, 2)$ como lo muestra la figura de la derecha.



La función $f(x) = -2(x + 3)^2 + 2$ es un desplazamiento de 3 unidades horizontalmente a la izquierda y 2 unidades verticalmente hacia arriba de la gráfica de $y = -2x^2$.

Definición

La función de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, donde a, b y c son números reales cualesquiera y a es diferente de cero se llama **función cuadrática**.

Una función cuadrática también puede escribirse en la forma $\boldsymbol{a(x - h)^2 + k}$ completando el cuadrado en la ecuación de la función f y, por tanto, su gráfica es una parábola con vértice en el punto (h, k) que se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

El dominio de una función cuadrática siempre es igual al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) y el rango dependerá del valor de a y de la segunda coordenada del vértice (h, k) de la gráfica de la función:

1. Si $a > 0$ entonces $R_g = [k, \infty[$.
2. Si $a < 0$ entonces $R_g =]-\infty, k]$.

Problemas

Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, encuentra además las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$

b) $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$

c) $f(x) = 2x^2 - 20x + 44$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

2.9 Condiciones iniciales

Problema inicial

Encuentra la ecuación de la función cuadrática f en cada caso:

1. El vértice de la gráfica de f es (4, 5) y pasa por el punto (2, –7).
2. f es de la forma $ax^2 + bx$ y la gráfica pasa por los puntos (–1, –10) y (–4, –16).

Solución

1. Las condiciones iniciales indican las coordenadas del vértice de la gráfica de f, por tanto, es conveniente escribir la ecuación en la forma:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \qquad \text{------------------ (1)}$$

sustituyendo los valores de h y k en (1), se tiene:

$$f(x) = a(x - 4)^2 + 5$$

ahora, si la gráfica pasa por el punto (2, –7) entonces cuando $x = 2$, $f(2) = -7$. Se sustituye en la ecuación anterior y se despeja el valor de a:

$$-7 = a(2 - 4)^2 + 5$$
$$-7 = 4a + 5$$
$$-12 = 4a$$
$$-3 = a$$

Por lo tanto, la ecuación de la función es $f(x) = -3(x - 4)^2 + 5$.

$f(x) = -3(x - 4)^2 + 5$ también puede escribirse como:
$f(x) = -3x^2 + 24x - 43$.

2. Las condiciones iniciales indican que $f(x) = ax^2 + bx$. Si la gráfica de f pasa por el punto (–1, –10), entonces cuando $x = -1$, $f(-1) = -10$. Se sustituyen estos valores y se despeja a en la forma de la función:

$$-10 = a(-1)^2 + b(-1)$$
$$-10 = a - b$$
$$-10 + b = a \qquad \text{------------------ (2)}$$

de forma similar, cuando $x = -4$, $f(-4) = -16$. Se sustituyen estos valores, incluyendo el de a encontrado en (2), y se despeja el valor de b:

$$-16 = a(-4)^2 + b(-4)$$
$$-16 = (b - 10)16 - 4b$$
$$-16 = 16b - 160 - 4b$$
$$144 = 12b$$
$$12 = b$$

Luego, $a = 2$ y la ecuación de la función es $f(x) = 2x^2 + 12x$.

En resumen

Si f es una función cuadrática, entonces su ecuación puede escribirse en la forma $a(x - h)^2 + k$ o $ax^2 + bx + c$. Si en las condiciones iniciales se proporcionan las coordenadas del vértice de la gráfica de f entonces conviene escribirla en la forma $a(x - h)^2 + k$.

Problemas

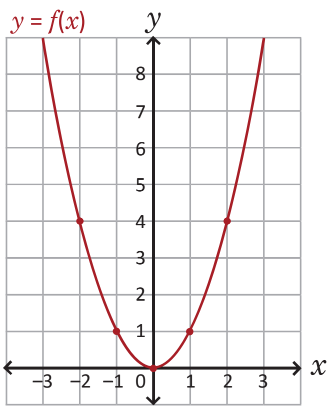
1. Encuentra la ecuación de la función cuadrática f en cada caso:
   a) el vértice de la gráfica de f es (–2, 1) y pasa por el punto (0, 5);
   b) el vértice de la gráfica de f es (3, –6) y pasa por el punto (4, –8);
   c) f es de la forma $ax^2 + bx$ y su gráfica pasa por los puntos (8, 0) y (2, –12).

2. Encuentra la ecuación de una función cuadrática f si su gráfica pasa por los puntos (–2, 8), (0, 2) y (2, 4).

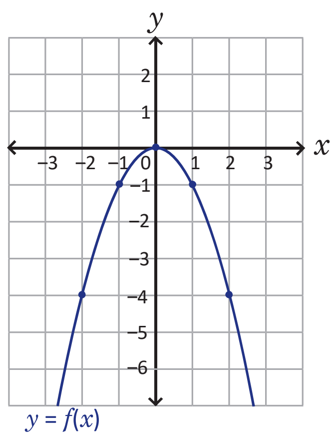
2.10 Practica lo aprendido

Utilizando la gráfica de f traza la gráfica de g; encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango en cada caso:

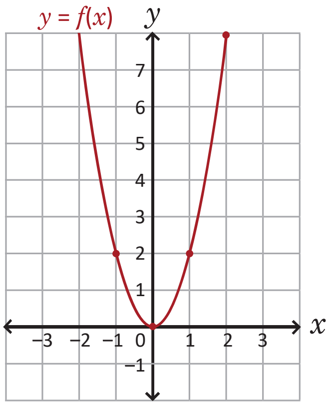
a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 3$



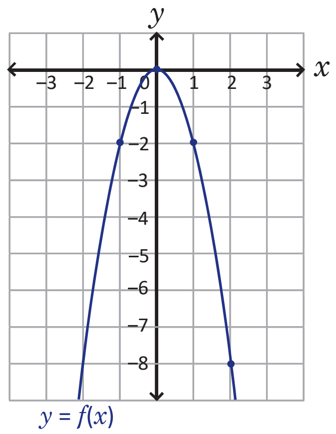
b) $f(x) = -x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$



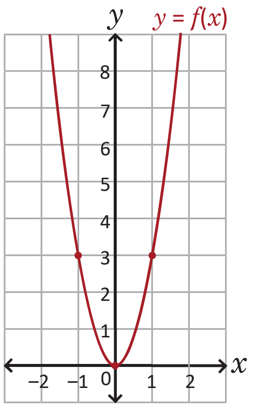
c) $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = 2x^2 - 1$



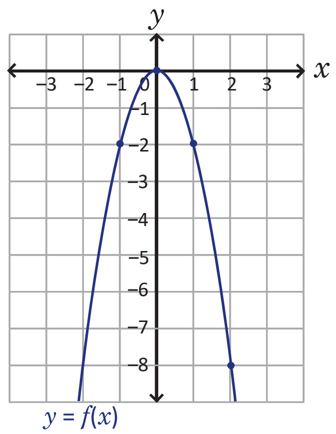
d) $f(x) = -2x^2$ y $g(x) = -2x^2 - 3$



e) $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = 3(x - 4)^2$



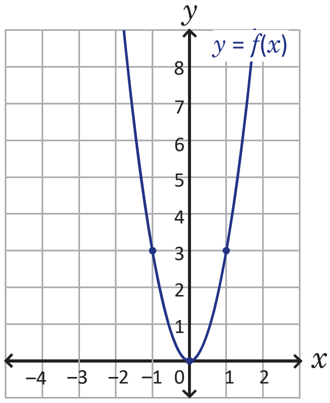
f) $f(x) = -2x^2$ y $g(x) = -2(x - 1)^2$



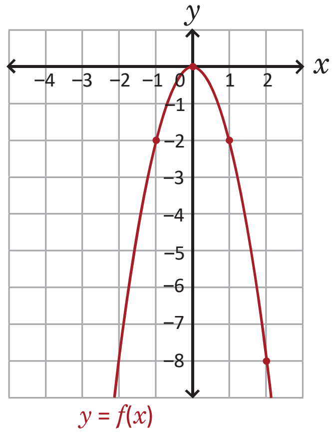
2.11 Practica lo aprendido

1. Utilizando la gráfica de f traza la gráfica de g; encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango en cada caso:

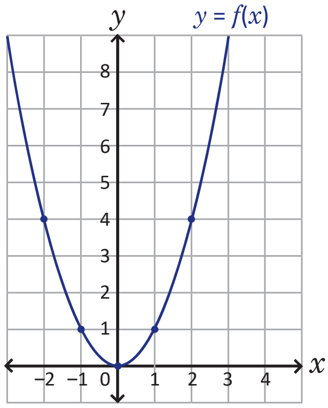
a) $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = 3(x + 2)^2$



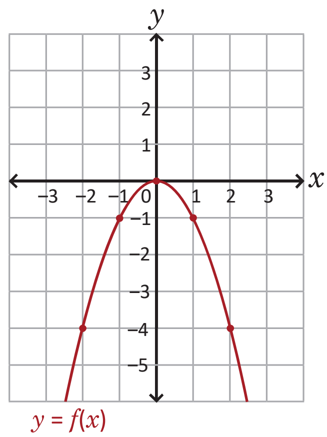
b) $f(x) = -2x^2$ y $g(x) = -2(x + 2)^2$



c) $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 4)^2 + 2$



d) $f(x) = -x^2$ y $g(x) = -(x + 1)^2 + 3$



2. Completa los cuadrados en cada caso para trazar la gráfica de f, encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$
b) $f(x) = 5x^2 + 10x$
c) $f(x) = -x^2 - 4x$
d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
e) $f(x) = x^2 + 2x + 2$
f) $f(x) = x^2 - 10x + 23$
g) $f(x) = -x^2 - 4x - 7$
h) $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$
i) $f(x) = -3x^2 - 6x + 2$

3. Encuentra la ecuación de la función cuadrática f si:

a) la gráfica de f tiene vértice en (0, 0) y pasa por el punto (2, 2);
b) la gráfica de f tiene vértice en (0, –1) y pasa por el punto (–1, –3);
c) la gráfica de f tiene vértice en (3, 0) y pasa por el punto (2, 4);
d) la gráfica de f tiene vértice en (2, –5) y pasa por el punto (4, 3);
e) f es de la forma $ax^2 + bx$ y su gráfica pasa por los puntos (2, 0) y (–1, 3);
f) f es de la forma $ax^2 + bx$ y su gráfica pasa por los puntos (1, –4) y (4, 8);
g) la gráfica de f pasa por los puntos (–2, 3), (0, –3) y (1, 0).

3.1 Monotonía

Problema inicial

Dadas las funciones cuadráticas $f(x) = 2(x - 1)^2 - 5$ y $g(x) = -2(x - 1)^2 + 5$ responde lo siguiente:

1. Si $-1 \leq x \leq 1$, ¿entre cuáles números se encuentran $f(x)$ y $g(x)$?
2. Si $1 \leq x \leq 3$, ¿entre cuáles números se encuentra $f(x)$ y $g(x)$?

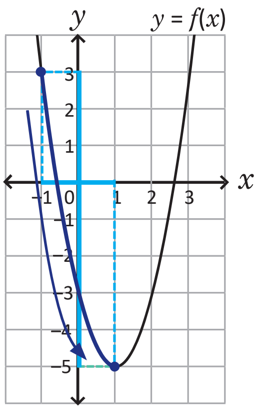
Utiliza las gráficas de f y g.

Solución

1. Se trazan las gráficas de las funciones para poder determinar los valores de $f(x)$ y $g(x)$: la parábola de f es abierta hacia arriba con vértice en (1, –5); mientras que la parábola de g es abierta hacia abajo con vértice en (1, 5). En ambas gráficas, sobre el eje x se ha sombreado en verde el intervalo [–1, 1] de los valores que toma x.

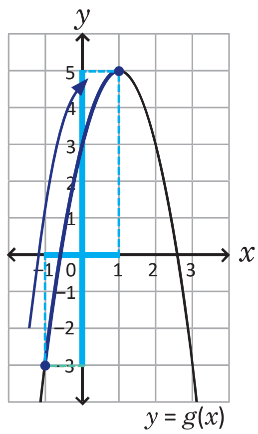
En f: a medida que x aumenta de –1 a 1, $f(x)$ disminuye de $f(-1) = 3$ a $f(1) = -5$.

Luego, $-5 \leq f(x) \leq 3$.



En g: a medida que x aumenta de –1 a 1, $g(x)$ aumenta de $g(-1) = -3$ a $g(1) = 5$.

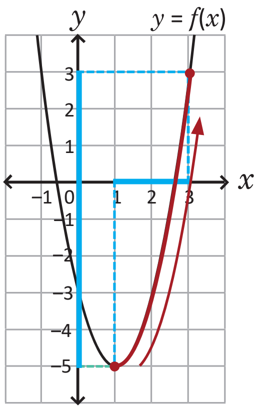
Luego, $-3 \leq g(x) \leq 5$.



2. Nuevamente, utilizando las gráficas de las funciones se concluye lo siguiente:

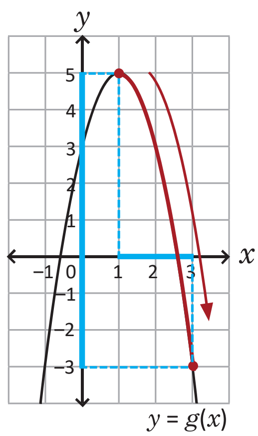
En f: a medida que x aumenta de 1 a 3, $f(x)$ aumenta de $f(1) = -5$ a $f(3) = 3$.

Luego, $-5 \leq f(x) \leq 3$.



En g: a medida que x aumenta de 1 a 3, $g(x)$ disminuye de $g(1) = 5$ a $g(3) = -3$.

Luego, $-3 \leq g(x) \leq 5$.



Definición

Una función f es **creciente** en un intervalo $[x_1, x_2]$ si a medida que x aumenta de x_1 a x_2 entonces $f(x)$ aumenta de $f(x_1)$ a $f(x_2)$, es decir, **si m y n pertenecen a $[x_1, x_2]$ con $m \leq n$ entonces $f(m) \leq f(n)$**. Por otro lado f es **decreciente** en un intervalo $[x_1, x_2]$ si a medida que x aumenta de x_1 a x_2 entonces $f(x)$ disminuye de $f(x_1)$ a $f(x_2)$, es decir, **si m y n pertenecen a $[x_1, x_2]$ con $m \leq n$ entonces $f(m) \geq f(n)$**.

Una función es **monótona** en $[x_1, x_2]$ si es creciente o decreciente en el intervalo.

Problemas

Para cada caso, determina si la función f es creciente o decreciente en el intervalo dado; escribe el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$:

a) $f(x) = (x - 5)^2$; $5 \leq x \leq 7$

b) $f(x) = -2x^2 + 3$; $0 \leq x \leq 2$

c) $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1$; $2 \leq x \leq 3$

d) $f(x) = (x + 2)^2 + 3$; $-5 \leq x \leq -3$

3.2 Variación: valor máximo o mínimo

Problema inicial

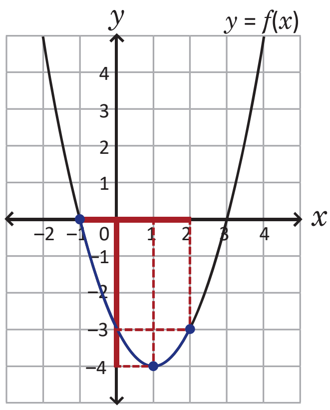
Dadas las funciones cuadráticas $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ y $g(x) = -x^2 - 4x - 1$ responde lo siguiente:

1. Si $-1 \leq x \leq 2$, ¿entre cuáles números se encuentra $f(x)$?
2. Si $-4 \leq x \leq 1$, ¿entre cuáles números se encuentra $g(x)$?

Utiliza las gráficas de f y g.

Solución

1. Se traza la gráfica de la función para poder determinar los valores de $f(x)$ como se muestra en la figura de la derecha. La parábola es abierta hacia arriba con vértice en $(1, -4)$.

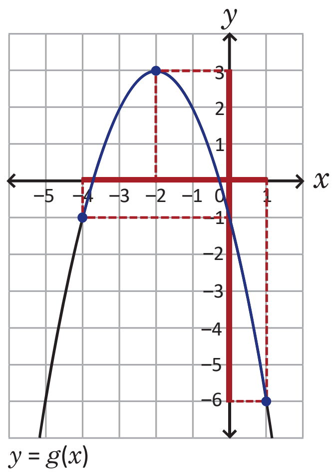


Sobre el eje x se ha sombreado en rojo el intervalo $[-1, 2]$ de los valores que toma x. Si $x = -1$ entonces $f(-1) = 0$ y si $x = 2$ entonces $f(2) = -3$; esto puede llevar a pensar que: $-3 \leq f(x) \leq 0$.

Sin embargo, el valor mínimo de $f(x)$ se alcanza cuando $x = 1$, es decir, en $f(1) = -4$. Por lo tanto, $-4 \leq f(x) \leq 0$.

2. Primero se escribe g en la forma $a(x - h)^2 + k$ completando el cuadrado:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= -(x^2 + 4) - 1 \\
&= -\left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] - 1 \\
&= -[x^2 + 4x + \mathbf{2}^2 - \mathbf{2}^2] - 1 \\
&= -[(x + \mathbf{2})^2 - 4] - 1 \\
&= -(x + \mathbf{2})^2 + 4 - 1 \\
&= -(x + \mathbf{2})^2 + 3
\end{aligned}
$$



La parábola se abre hacia abajo con vértice en $(-2, 3)$. Sobre el eje x se ha sombreado en rojo el intervalo $[-4, 1]$ de los valores que toma x. Si $x = -4$ entonces $g(-4) = -1$ y si $x = 1$ entonces $g(1) = -6$; para este caso, el valor máximo de $g(x)$ se alcanza cuando $x = -2$, es decir, en $g(-2) = 3$.
Por lo tanto, $-6 \leq g(x) \leq 3$.

En resumen

Dada una función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ y $x_1 \leq h \leq x_2$:

1. Si $a > 0$ entonces el valor mínimo $f(x)$ se alcanza en $x = h$.
   Además si x es un número real tal que $x_1 \leq x \leq x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ entonces $k \leq f(x) \leq f(x_2)$; caso contrario si $f(x_1) \geq f(x_2)$ entonces $k \leq f(x) \leq f(x_1)$.

2. Si $a < 0$ entonces el valor máximo $f(x)$ se alcanza en $x = h$.
   Además si x es un número real tal que $x_1 \leq x \leq x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ entonces $f(x_1) \leq f(x) \leq k$; caso contrario si $f(x_1) > f(x_2)$ entonces $f(x_2) \leq f(x) \leq k$.

Problemas

Para cada caso, determina el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$ si:

a) $f(x) = (x - 5)^2$; $2 \leq x \leq 6$

b) $f(x) = -2x^2 + 3$; $-2 \leq x \leq 1$

c) $f(x) = -3(x - 3)^2 - 1$; $2 \leq x \leq 5$

d) $f(x) = (x + 2)^2 + 3$; $-6 \leq x \leq 0$

e) $f(x) = 2(x - 6)^2 + 1$; $4 \leq x \leq 8$

f) $f(x) = -(x + 4)^2 - 2$; $-6 \leq x \leq -2$

Unidad 4

3.3 Aplicación: valor máximo*

Problema inicial

Los estudiantes de primer año de bachillerato del Instituto Nacional de San Matías, en La Libertad, realizan experimentos en su clase de ciencias naturales sobre tiro vertical. Han descubierto que, al lanzar una pelota de fútbol verticalmente hacia arriba, la distancia $f(x)$ en metros sobre el suelo después de x segundos está dada por la función:

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 0.5$$

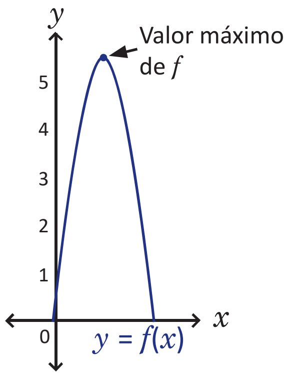
¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿Después de cuántos segundos alcanza la altura máxima?

Solución

Si la pelota se lanza verticalmente hacia arriba llegará a un punto en que debe descender; el problema pide calcular cuántos metros se elevará desde el suelo y cuántos segundos transcurrirán después de ser lanzada antes que empiece a descender.

La función encontrada por los estudiantes que relaciona la distancia sobre el suelo después de x segundos es una función cuadrática, cuyo valor máximo para $f(x)$ se encuentra en el vértice de la gráfica de la función pues el coeficiente de x^2 es negativo. Entonces, el problema se reduce a encontrar las coordenadas del vértice de la gráfica de f:

$$\begin{aligned} f(x) &= -5(x^2 - 2) + 0.5 \\ &= -5\left[x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] + 0.5 \\ &= -5[x^2 - 2x + 1^2 - 1^2] + 0.5 \\ &= -5(x - 1)^2 + 5 + 0.5 \\ &= -5(x - 1)^2 + 5.5 \end{aligned}$$



El vértice de la gráfica de f es (1, 5.5) y la parábola se muestra en la figura de la derecha (solo se toma la parte que queda sobre el eje x pues $f(x)$ debe ser positivo o cero). Por lo tanto, la altura máxima que alcanza la pelota es 5.5 metros después de transcurrir 1 segundo.

En resumen

En problemas donde se plantea una función cuadrática cuyo coeficiente de x^2 es negativo y se desea conocer el valor máximo de una cantidad, este se encuentra en el vértice de la gráfica de la función.

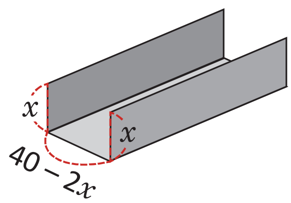
Problemas

1. Carlos, un adolescente con discapacidad intelectual, es parte del equipo de baloncesto que participará en los Juegos Latinoamericanos de Olimpiadas Especiales. Si Carlos lanza la pelota hacia el aro en determinada posición, la distancia en metros de la pelota al suelo después de x segundos está dada por la función:

$$f(x) = -5x^2 + 6x + 1.4$$

¿Cuál es la altura máxima que alcanzará la pelota lanzada por Carlos? ¿Cuántos segundos transcurrirán para alcanzar dicha altura?

2. Marta colocará un canal en el techo de su casa. Para ello dispone de una hoja rectangular metálica cuyos lados deben doblarse para formar el canal. Si la hoja tiene 40 centímetros de ancho, ¿cuántos centímetros debe doblarse en cada lado para que den al canal su mayor capacidad?



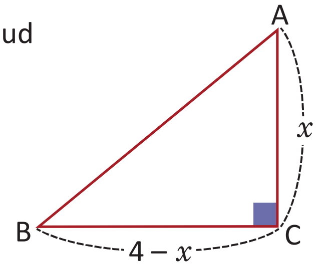
La capacidad será máxima cuando el área de la sección transversal de lados x y $40 - 2x$ sea máxima.

3.4 Aplicación: valor mínimo*

Problema inicial

En el triángulo rectángulo ABC, ¿cuál debe ser el valor de x para que la longitud de la hipotenusa sea mínima?

Por el teorema de Pitágoras:
$AB^2 = BC^2 + CA^2$,
además, $0 < x < 4$.



Solución

Utilizando el teorema de Pitágoras:

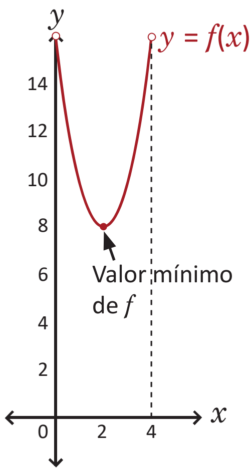
$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

se sustituyen BC y CA por $4 - x$ y x, respectivamente, y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (4 - x)^2 + x^2 \\ &= 16 - 8x + x^2 + x^2 \\ &= 2x^2 - 8x + 16 \end{aligned}$$

La longitud de la hipotenusa AB será mínima cuando AB^2 también sea mínima. Sea $f(x) = 2x^2 - 8x + 16$; como es una función cuadrática y el coeficiente de x^2 es positivo entonces la parábola se abre hacia arriba. Se completa el cuadrado para trazar la gráfica de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 - 4x) + 16 \\ &= 2\left[x^2 - 4x + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{4}{2}\right)^2\right] + 16 \\ &= 2[x^2 - 4x + \mathbf{2}^2 - \mathbf{2}^2] + 16 \\ &= 2[(x - \mathbf{2})^2 - 4] + 16 \\ &= 2(x - \mathbf{2})^2 - 8 + 16 \\ &= 2(x - \mathbf{2})^2 + 8 \end{aligned}$$



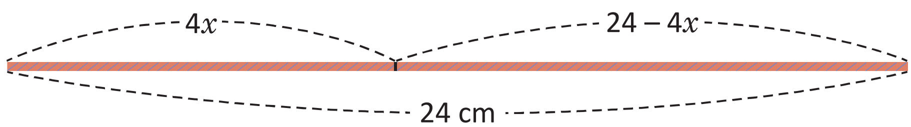
En la figura de la derecha se muestra la gráfica en el intervalo]0, 4[cuyo vértice es (2, 8). Por lo tanto, para que la longitud de la hipotenusa sea mínima, x debe ser igual a 2.

En resumen

En problemas donde se plantea una función cuadrática cuyo coeficiente de x^2 es positivo y se desea conocer el valor mínimo de una cantidad, este se encuentra en el vértice de la gráfica de la función.

Problemas

1. Encuentra dos números enteros cuya diferencia sea igual a 20 y su producto sea mínimo.
2. Un pedazo de lana de 24 cm de longitud se divide en dos partes con las que se formarán dos cuadrados. Si la primera parte tiene longitud $4x$ y la segunda tiene longitud $24 - 4x$, ¿cuál debe ser el valor de x que reduzca al mínimo la suma de las áreas de los dos cuadrados?



Unidad 4

3.5 Intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje y

Problema inicial

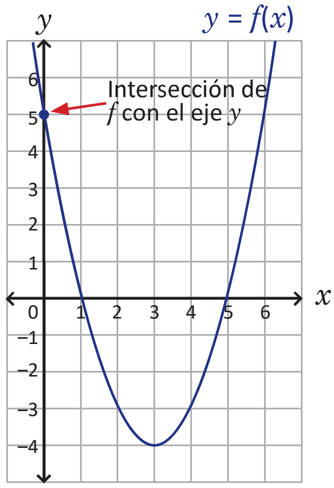
Encuentra las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de la función cuadrática f con el eje y si:

a) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ b) $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$

La primera coordenada del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y es igual a cero.

Solución

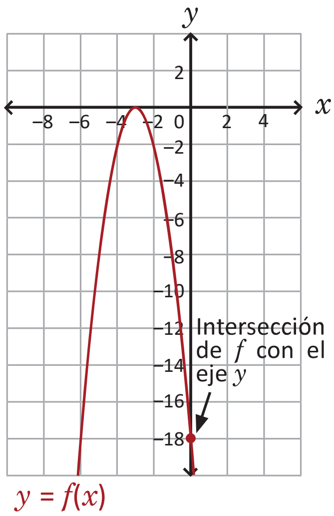
a) La intersección de la gráfica de f con el eje y ocurre cuando $x = 0$, es decir, se debe calcular el valor de $f(0)$ y las coordenadas del punto de corte entre f y el eje y serán $(0, f(0))$.



$$\begin{aligned} f(0) &= (0 - 3)^2 - 4 \\ &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ con el eje y es $(0, 5)$.

b) De forma similar al literal anterior, encontrar las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ con el eje y equivale a encontrar $(0, f(0))$:



$$\begin{aligned} f(0) &= -2(0)^2 - 12(0) - 18 \\ &= -18 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ con el eje y es $(0, -18)$.

En general

Las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de una función f con el eje y son: $(0, f(0))$. Si f es una función cuadrática entonces la gráfica de f corta al eje y en un único punto.

Problemas

1. Para cada caso, determina las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de f con el eje y:

a) $f(x) = -(x + 4)^2 + 6$ b) $f(x) = 3(x - 2)^2 - 10$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

d) $f(x) = -2x^2 + 7$ e) $f(x) = -5(x + 10)^2$ f) $f(x) = 2x^2 + 24x + 52$

g) $f(x) = -3x^2 + 6x - 11$ h) $f(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$ i) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{1}{5}$

2. ¿Es posible que una función cualquiera tenga dos intersecciones con el eje y? Justifica tu respuesta.

3.6 Intersección de la gráfica de una función cuadrática con el eje x

Problema inicial

Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de la función cuadrática f con el eje x si:

a) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ b) $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ c) $f(x) = 3x^2 + 2$

La segunda coordenada del punto de intersección de la gráfica de f con el eje x es igual a cero.

Solución

a) Los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje x tienen segunda coordenada igual a cero, es decir, son de la forma $(x, 0)$. Para encontrar el valor de x se iguala a cero la ecuación de f y se resuelve la ecuación cuadrática:

$$(x - 3)^2 - 4 = 0$$
$$(x - 3)^2 = 4$$
$$x - 3 = \pm 2$$
$$x = 3 \pm 2 \longrightarrow x = 1 \text{ y } x = 5$$

Observa la gráfica de $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ trazada en la clase anterior.

Por lo tanto, los puntos de intersección de $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ con el eje x son $(1, 0)$ y $(5, 0)$.

b) De forma similar al literal anterior, se iguala la ecuación de la función f y se resuelve la ecuación cuadrática (en este caso puede factorizarse el polinomio):

$$-2x^2 - 12x - 18 = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$(x + 3)^2 = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

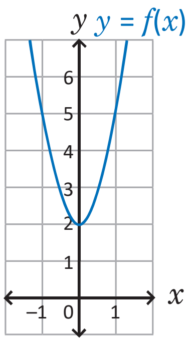
Observa la gráfica de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ trazada en la clase anterior.

Por lo tanto, el punto de intersección de $f(x) = -2x^2 - 12x - 18$ con el eje x es $(-3, 0)$.

c) Al igualar a cero la ecuación de la función:

$$3x^2 + 2 = 0$$

Esta ecuación cuadrática no tiene solución en los números reales. Esto quiere decir que la gráfica de la función f no corta al eje x, como lo muestra la figura de la derecha.



En general

Las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de una función f con el eje x se encuentra igualando a cero la ecuación de f y resolviendo la ecuación cuadrática resultante:

1. Si la ecuación tiene dos soluciones reales $x = x_1$ y $x = x_2$ entonces la gráfica de f corta al eje x en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.
2. Si la ecuación tiene una solución real $x = x_1$ entonces la gráfica de f corta al eje x en el punto $(x_1, 0)$. Este punto es el vértice de la parábola y se dice que la gráfica de f es tangente al eje x.
3. Si la ecuación no tiene solución real entonces la gráfica de f no corta al eje x, es decir, la parábola se encuentra arriba del eje o debajo de este.

Problemas

Para cada caso, determina las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje x:

a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = -(x + 4)^2$ c) $f(x) = -(x + 6)^2 + 1$

d) $f(x) = (x - 5)^2 - 9$ e) $f(x) = -(x - 2)^2 - 4$ f) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

g) $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$ h) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ i) $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

3.7 Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a > 0$, parte 1*

Problema inicial

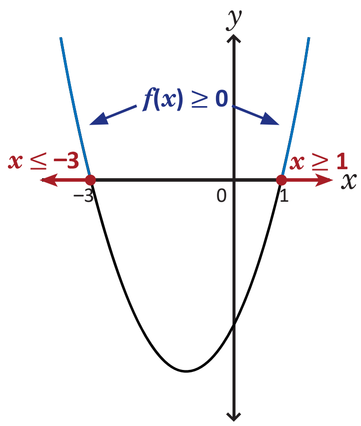
Determina todos los valores de x que satisfacen la desigualdad:

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

Solución

Sea $f(x) = x^2 + 2x - 3$; deben determinarse los valores de x para los cuales $f(x)$ es igual o mayor que cero, es decir, los puntos donde la gráfica de f corta al eje x o está arriba de este. Se encuentran las intersecciones con el eje x resolviendo la ecuación cuadrática $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} &x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &(x + 3)(x - 1) = 0 \\ &x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \\ &\quad x = -3 \qquad\quad x = 1 \end{aligned}$$



La gráfica de f corta al eje x en los puntos (–3, 0) y (1, 0). Como el coeficiente de x^2 es positivo la parábola se abre hacia arriba como lo muestra la figura de la derecha.

Se observa lo siguiente: $f(x) \geq 0$ se cumple para $x \leq -3$ o $x \geq 1$; la desigualdad $x \leq -3$ denota al intervalo $]-\infty, -3]$; mientras que, $x \geq 1$ al intervalo $[1, +\infty[$. La solución $x \leq -3$ o $x \geq 1$ se escribe, utilizando intervalos:

$$x \in]-\infty, -3] \cup [1, \infty[$$

El símbolo "U" indica que el valor de x está en el primer intervalo o en el segundo.

En general

Resolver una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ con $a > 0$ significa encontrar todos los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c \geq 0$ es verdadero. Si se denota por $f(x) = ax^2 + bx + c$ entonces $f(x) \geq 0$ significa gráficamente encontrar los valores de x para los cuales la parábola de f corta o se encuentra arriba del eje x.

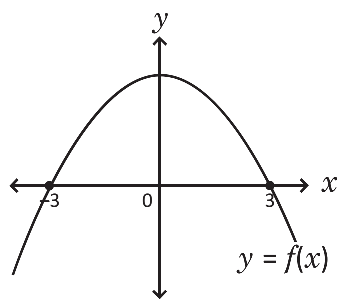
Si la gráfica de f corta al eje x en dos puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x) \geq 0$ se cumple para $x \leq x_1$ o $x \geq x_2$. Utilizando intervalos se escribe: $x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty[$.

Problemas

1. Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

a) $x^2 - 4 \geq 0$	b) $4x^2 - 9 \geq 0$	c) $2x^2 + 4x \geq 0$
d) $x^2 - 10x + 21 \geq 0$	e) $x^2 + x - 20 \geq 0$	f) $x^2 + 7x + 6 \geq 0$
g) $x^2 - 4x - 45 \geq 0$	h) $x^2 - 8 \geq 0$	i) $9x^2 - 5 \geq 0$

2. Utilizando la gráfica de la función cuadrática f que se muestra a la derecha, determina los valores de x para los cuales se cumple $f(x) \geq 0$:



3.8 Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a > 0$, parte 2

Problema inicial

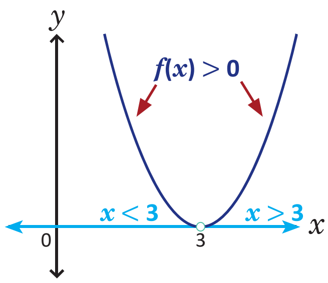
Determina todos los valores de x que satisfacen, en cada caso, la desigualdad:

a) $x^2 - 6x + 9 > 0$ b) $x^2 - 2x + 2 > 0$

Solución

a) Sea $f(x) = x^2 - 6x + 9$; de forma similar a la clase anterior, resolver $f(x) = x^2 - 6x + 9 > 0$ equivale a encontrar los valores de x para los cuales la gráfica de f queda arriba del eje x; esta vez no deben incluirse los puntos donde $f(x) = 0$ ya que la desigualdad es estricta, sin embargo deben encontrarse las intersecciones con el eje x:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$(x - 3)^2 = 0$$
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$



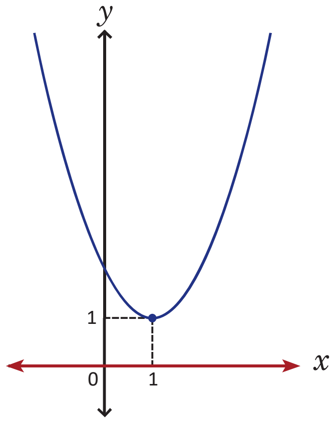
La gráfica de f corta al eje x en el vértice (3, 0) y es una parábola que se abre hacia arriba como lo muestra la figura de la derecha. Se cumple lo siguiente: $f(x)$ es positivo para cualquier número real x diferente de 3.

Por lo tanto, $x < 3$ o $x > 3$; utilizando intervalos se escribe:

$$x \in]-\infty, 3[\cup]3, \infty[.$$

b) Sea $f(x) = x^2 - 2x + 2$; si se buscan las intersecciones de la gráfica de f con el eje x, se obtiene la ecuación:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$



Esta ecuación no tiene solución en los números reales. Si se completa el cuadrado para llevar a la forma $a(x - h)^2 + k$ se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x) + 2 \\ &= \left[x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] + 2 \\ &= (x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 2 \\ &= (x - \mathbf{1})^2 + 1 \end{aligned}$$

La gráfica es una parábola abierta hacia arriba, con vértice en (1, 1) como muestra la figura de la derecha. Toda la gráfica queda sobre el eje x, por lo tanto $f(x) > 0$ para todo número real x.

En general

Dada la desigualdad $ax^2 + bx + c > 0$, con $a > 0$; al denotar por $f(x) = ax^2 + bx + c$:

1. Si la gráfica de f corta al eje x únicamente en el vértice $(h, 0)$ entonces $f(x) > 0$ se cumple para $x < h$ o $x > h$. Utilizando intervalos se escribe: $x \in]-\infty, h[\cup]h, \infty[$.
2. Si la gráfica de f NO corta al eje x entonces $f(x) > 0$ se cumple para todo número real x, es decir, la gráfica de f queda arriba del eje x.

Problemas

Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

a) $2x^2 > 0$ b) $x^2 - 4x + 6 > 0$ c) $x^2 + 4x + 4 > 0$

d) $x^2 - 14x + 49 \geq 0$ e) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$ f) $\frac{1}{3}x^2 \geq 0$

Unidad 4

3.9 Desigualdad cuadrática $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a > 0$

Problema inicial

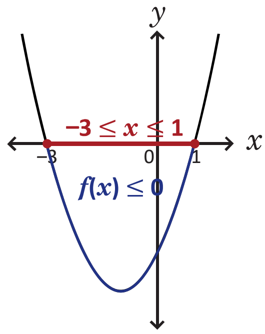
Determina todos los valores de x que satisfacen, en cada caso, la desigualdad:

a) $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ b) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ c) $x^2 - 2x + 2 < 0$

Utiliza las gráficas de la clase anterior.

Solución

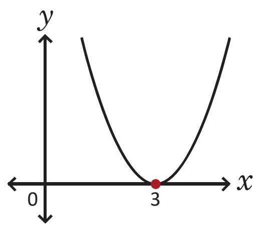
a) Sea $f(x) = x^2 + 2x - 3$; ahora deben encontrarse los valores de x para los cuales la gráfica de f queda debajo del eje x, incluyendo los puntos donde $f(x) = 0$.



La parábola de la función se muestra a la derecha, en ella se observa que $f(x) \leq 0$ si $-3 \leq x \leq 1$. Utilizando intervalos se escribe:

$$x \in [-3, 1].$$

b) Sea $f(x) = x^2 - 6x + 9$; en la clase anterior se llegó a $f(x) = (x - 3)^2$, cuya gráfica se muestra a la derecha; se deben encontrar los valores de x para los cuales $f(x)$ es menor o igual a cero. La parábola de la función queda siempre arriba del eje x, y es igual a cero en el vértice de la parábola. Por lo tanto, la desigualdad:



$$f(x) = (x - 3)^2 \leq 0$$

se cumple únicamente para $x = 3$.

c) Sea $f(x) = x^2 - 2x + 2$; en la clase anterior se concluyó que $f(x) > 0$ para todo número real x, es decir, la gráfica queda totalmente arriba del eje x. Por lo tanto, $f(x) = x^2 - 2x + 2 < 0$ no tiene solución.

En general

Resolver una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$, con $a > 0$, significa encontrar todos los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c \leq 0$ es verdadero. Si se denota por $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $f(x) \leq 0$ significa gráficamente encontrar los valores de x para los cuales la parábola de f corta o se encuentra debajo del eje x. Para ello se encuentran las intersecciones de la gráfica de la función con el eje x:

1. Si la gráfica de f corta al eje x en dos puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x) \leq 0$ se cumple para $x_1 \leq x \leq x_2$. Utilizando intervalos se escribe: $x \in [x_1, x_2]$.
2. Si la gráfica de f corta al eje x únicamente en el vértice $(h, 0)$ entonces $f(x) \leq 0$ se cumple solo para $x = h$.
3. Si la gráfica de f no corta al eje x entonces $f(x) \leq 0$ no tiene solución.

En las desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c < 0$ NO deben incluirse los puntos donde $f(x) = 0$; para el numeral 2, $f(x) < 0$ no tiene solución.

Problemas

Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

a) $x^2 - 4 \leq 0$	b) $x^2 + 2x \leq 0$	c) $x^2 - 10x + 21 < 0$
d) $x^2 + 8x + 15 < 0$	e) $2x^2 \leq 0$	f) $x^2 - 10x + 25 < 0$
g) $x^2 - 4x - 3 \leq 0$	h) $x^2 + 2x - 8 < 0$	i) $x^2 + 8 \leq 0$

3.10 Desigualdad cuadrática, $a < 0$

Problema inicial

Determina todos los valores de x que satisfacen la desigualdad:

$$-x^2 + 4x - 3 < 0.$$

Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

Solución

Utilizando propiedades de desigualdades, se multiplican ambos miembros de la desigualdad por – 1, esto hace que el símbolo “menor que” cambie a “mayor que”:

$$(-x^2 + 4x - 3)(-1) > 0(-1)$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \qquad \text{-----------------} \ (1)$$

La desigualdad (1) se resuelve como lo visto en las clases anteriores. Primero se encuentran las intersecciones de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ con el eje x:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 3$$

Entonces, $x^2 - 4x + 3 > 0$ si $x < 1$ o $x > 3$. Esta solución satisface también la desigualdad original:

$$-x^2 + 4x - 3 < 0.$$

Por lo tanto, $x \in \,]-\infty, 1[\, \cup \,]3, \infty[$.

En general

A las desigualdades de la forma:

a) $ax^2 + bx + c \geq 0$ b) $ax^2 + bx + c \leq 0$ c) $ax^2 + bx + c > 0$ d) $ax^2 + bx + c < 0$

donde a es cualquier número real diferente de cero, se les llama **desigualdades cuadráticas con una incógnita**. Si $a > 0$ entonces su solución está dada como en las clases 3.7, 3.8 y 3.9; si $a < 0$ entonces se multiplica por –1 ambos miembros de la desigualdad y se soluciona como en las clases 3.7, 3.8 y 3.9.

Problemas

1. Para cada caso encuentra los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad:

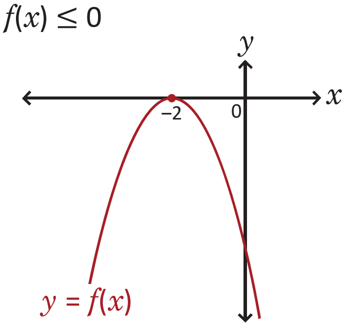
a) $-x^2 + 2x + 15 \leq 0$ b) $-(x + 3)^2 \leq 0$ c) $-x^2 + 1 \geq 0$

d) $-x^2 - 6x - 5 \leq 0$ e) $-2x^2 + 4x - 3 > 0$ f) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$

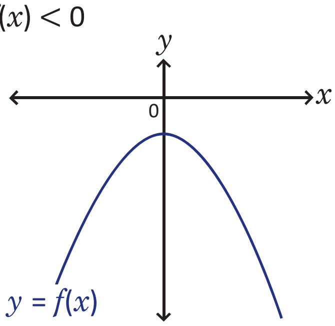
g) $-x^2 - 4x - 4 < 0$ h) $-2x^2 - 1 > 0$ i) $-x^2 + 5 > 0$

2. Utilizando la gráfica de f en cada caso, encuentra los valores de x que satisfacen la desigualdad:

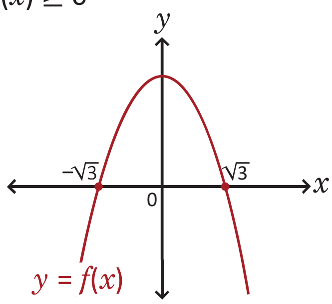
a) $f(x) \leq 0$



b) $f(x) < 0$



c) $f(x) \geq 0$



Unidad 4

3.11 Cuadro de variación, parte 1*

Problema inicial

Resuelve la siguiente desigualdad cuadrática:

$$2x^2 - x - 3 > 0$$

Solución

Se escribe $2x^2 - x - 3$ como producto de binomios:

$$2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$$

la desigualdad se convierte en $(x + 1)(2x - 3) > 0$. Para que este producto sea mayor que cero ambos binomios deben ser, o bien positivos o bien negativos. Es necesario dividir los números reales en intervalos y determinar, en cada intervalo, el signo de $x + 1$ y de $2x - 3$. Los intervalos a considerar se toman con base a las raíces del trinomio, a saber:

$$(x + 1)(2x - 3) = 0$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 3 = 0$$

$$x = -1 \qquad\qquad x = \frac{3}{2}$$

Se construye una tabla como la siguiente, cuya línea superior simula la recta numérica donde se colocan los valores -1 y $\frac{3}{2}$ por ser las raíces del trinomio y se coloca cero en la línea vertical donde el factor es cero:

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$			0				
$2x - 3$					0		
$(x + 1)(2x - 3)$							

Para determinar el signo de cada factor en un intervalo basta tomar un número que se encuentre dentro del mismo y evaluarlo en el factor. Por ejemplo, -2 pertenece al intervalo $]-\infty, -1[$; entonces si $x = -2$ resulta $-2 + 1 = -1$ negativo para el primer factor y $2(-1) - 3 = -5$ negativo para el segundo factor. En la tabla se escriben los signos de los factores:

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$		$-$	0				
$2x - 3$		$-$			0		
$(x + 1)(2x - 3)$							

También se puede resolver la desigualdad lineal $x + 1 > 0$ para determinar los intervalos donde $x + 1$ es positivo y donde es negativo.

De forma similar se hace para los otros intervalos; la tabla queda de la siguiente manera:

	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		∞
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x + 1)(2x - 3)$							

Luego, se multiplican los signos de los factores en cada columna, por ejemplo en el intervalo $]-\infty, -1[$ los signos de los factores $x + 1$ y $2x - 3$ son "–" y "–" respectivamente, por tanto al multiplicarlos el resultado será "+":

	$]-\infty$	-1		$\frac{3}{2}$	$\infty[$
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$
$2x - 3$	$-$		$-$	0	$+$
$(x + 1)(2x - 3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Los ceros sobre las líneas indican que en ese número el producto de los factores es igual a cero. Como interesa cuando $(x + 1)(2x - 3) > 0$ entonces los valores para x serán aquellos donde el producto es positivo.

Por lo tanto, $2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3) > 0$ si $x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$.

En resumen

Si x_1 y x_2 son raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$, con $x_1 < x_2$ entonces para resolver una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c > 0$ o $ax^2 + bx + c < 0$ se hace lo siguiente:

1. Se escribe $ax^2 + bx + c = pq$, donde p y q son binomios lineales cuyas raíces son x_1 y x_2, respectivamente.
2. Se dividen los números reales en los intervalos $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$ y $]x_2, \infty[$.
3. Si n es un número que pertenece a cualquiera de los tres intervalos descritos en 2 y el valor de p o q es positivo o negativo al evaluar $x = n$ entonces p o q será positivo o negativo en todo el intervalo.
4. Se multiplican los signos de p y q en cada intervalo. La solución serán aquellos intervalos donde el producto sea positivo para el caso de $ax^2 + bx + c > 0$, o negativo para el caso de $ax^2 + bx + c < 0$.

A la tabla construida en la solución del Problema inicial se le llama **cuadro de variación**.

Problemas

1. Resuelve las siguientes desigualdades:

a) $2x^2 - x - 1 > 0$
b) $3x^2 + 8x - 3 < 0$
c) $3x^2 - 8x + 4 < 0$
d) $2x^2 + 9x + 4 > 0$
e) $-3x^2 - 4x + 15 > 0$
f) $-4x^2 + 7x - 3 < 0$
g) $6x^2 + x - 1 < 0$
h) $x^2 - 4x + 4 > 0$
i) $4x^2 - 1 < 0$

2. Antonio es dueño de una tienda de ropa. Ha estimado que la ganancia diaria en dólares en la venta de camisas está dado por la función $f(x) = x^2 - 14x - 32$, donde x es la cantidad de camisas vendidas en un día. ¿Cuántas camisas debe vender Antonio para obtener ganancias y no pérdidas?

3.12 Cuadro de variación, parte 2

Problema inicial

Resuelve la siguiente desigualdad cuadrática:

$$-6x^2 \geq -11x - 7$$

Deben dejarse todos los términos a un solo lado del símbolo "≥".

Solución

Deben dejarse todos los términos a un solo lado del símbolo "≥". Utilizando propiedades de desigualdades se suma $6x^2$ a ambos miembros de la desigualdad:

$$\cancel{-6x^2} \cancel{+6x^2} \geq -11x - 7 + 6x^2$$
$$0 \geq 6x^2 - 11x - 7$$

esta última es equivalente a $6x^2 - 11x - 7 \leq 0$. Se factoriza el trinomio como producto de dos binomios lineales, a saber:

$$6x^2 - 11x - 7 = (3x - 7)(2x + 1)$$

De lo anterior se obtienen las raíces del polinomio $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{7}{3}$. De forma similar a la clase anterior se construye el cuadro de variación para determinar los intervalos donde el polinomio es negativo:

	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{7}{3}$		∞
$3x - 7$		−		−	0	+	
$2x + 1$		−	0	+		+	
$(3x - 7)(2x + 1)$		+	0	−	0	+	

El símbolo "≤" indica que también deben tomarse en cuenta los valores de x para los cuales el polinomio $6x^2 - 11x - 7$ es igual a cero.

Entonces, $6x^2 - 11x - 7 = (3x - 7)(2x + 1) \leq 0$ si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right]$. Este intervalo también satisface la desigualdad original.

En resumen

En una desigualdad cuadrática se cumplen las siguientes propiedades:

1. Sumar o restar un número real a ambos miembros no altera la desigualdad.
2. Multiplicar o dividir ambos miembros de la desigualdad por un número real positivo no altera la desigualdad.
3. Multiplicar o dividir ambos miembros de la desigualdad por un número real negativo cambia el sentido de la desigualdad.

Problemas

1. Para cada caso, determina el intervalo donde se encuentran los valores de x si:

a) $6x^2 \geq 11x - 3$ b) $15x^2 + 2x \leq 1$ c) $31x + 15 \geq -10x^2$

d) $3x \geq -20x^2 + 2$ e) $-6x^2 + 23x - 7 \geq 0$ f) $9x^2 - 25 \geq 0$

g) $x^2 - 2 \leq 0$ h) $4x^2 - 3 \leq 0$ i) $x^2 \leq 1 + 2x$

2. Sean x_1 y x_2 las raíces del trinomio $x^2 + bx + c$ con $x_1 < x_2$. Utilizando el cuadro de variación demuestra que la solución de la desigualdad $x^2 + bx + c \leq 0$ es $[x_1, x_2]$.

3.13 Practica lo aprendido

1. Determina si la función f es creciente o decreciente en el intervalo dado, luego escribe el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$:

a) $f(x) = -(x + 3)^2 - 5; -7 \leq x \leq -4$

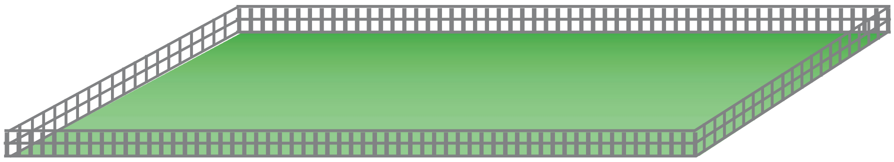
b) $f(x) = 2(x - 2)^2 - 4; -1 \leq x \leq 1$

2. En cada caso, determina el intervalo donde se encuentran los valores de $f(x)$ si:

a) $f(x) = -2(x + 3)^2 + 7; -4 \leq x \leq -1$

b) $f(x) = (x - 5)^2 - 8; 1 \leq x \leq 8$

3. En el Instituto Nacional Puerto El Triunfo construirán un huerto escolar en un terreno con forma rectangular, para promover el consumo de frutas y hortalizas, y así contribuir a la formación de valores y conocimientos en el cuido del medio ambiente. Si se cuenta con 32 metros de malla para cercar el terreno, ¿cuáles deben ser las dimensiones del terreno para tener la mayor área posible? ¿Cuál sería el área para el huerto escolar?



4. Una sastrería confecciona y distribuye trajes para hombre cuyo precio es de $100.00. Si una tienda de ropa solicita 50 o más trajes, entonces el precio se reduce a razón de $0.50 por el número pedido. ¿De qué cantidad debe ser el pedido para producir la máxima ganancia para la sastrería? No tomes en cuenta los costos de producción.

5. Un proyectil se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo. La altura alcanzada, en metros, después de x segundos está dada por la función:

$$f(x) = -5x^2 + 100x.$$

Calcula la altura máxima que alcanza el proyectil y el tiempo que tarda en llegar al suelo.

6. Encuentra dos números enteros cuya suma sea igual a 30 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

7. Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes de coordenadas si:

a) $f(x) = (x - 3)^2 - 9$

b) $f(x) = -(x + 5)^2 + 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 8$

d) $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$

8. Resuelve las siguientes desigualdades:

a) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

b) $x^2 - 5x - 24 < 0$

c) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2 > 0$

e) $-x^2 - 6x \geq 10$

f) $2x^2 + 15 < 13x$

g) $-3x^2 - 11x + 4 > 0$

h) $5x^2 + 3x \leq 8$

i) $-4x^2 + 20x - 9 < 0$

j) $x^2 + 3x - 5 < 0$

4.1 Función $f(x) = x^3$

Problema inicial

$x^3 = (x)(x)(x)$

Sea $y = x^3$:

1. Completa la siguiente tabla (aproxima hasta las centésimas):

x	–1	–0.8	–0.6	–0.4	–0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	–1										

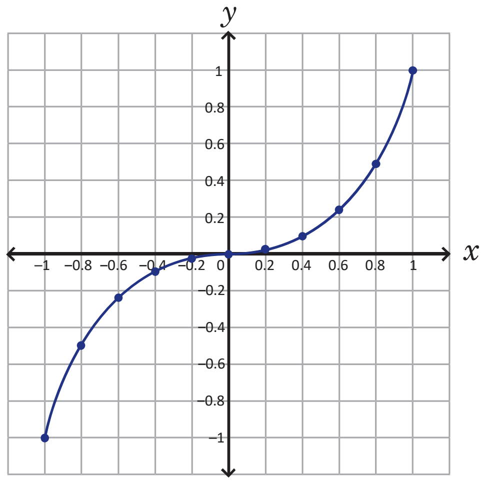
2. Ubica los pares ordenados (x, y) encontrados en el literal anterior. ¿Cómo es la línea que se forma?

Solución

1. Cada valor de y es igual a multiplicar el correspondiente valor de x por sí mismo tres veces. Debe cuidarse el signo, por ejemplo: $(–1)^3 = (–1)(–1)(–1) = –1$. De acuerdo con esto, la tabla queda de la siguiente manera:

x	–1	–0.8	–0.6	–0.4	–0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	–1	–0.51	–0.22	–0.06	–0.01	0	0.01	0.06	0.22	0.51	1

2. Los puntos del numeral anterior quedan situados como se muestra en la figura de la derecha. La línea que se forma no es recta y tampoco es una parábola.



x^3 es la potencia cúbica del número x; también se lee “x elevado al cubo”.

Conclusión

La ecuación $y = x^3$ corresponde a una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que asigna a cada número real x su valor elevado al cubo. Para la función $f(x) = x^3$: el dominio y rango son el conjunto de los números reales, su gráfica pasa por el origen y es creciente en todo su dominio.

Una función x de A en B significa que a cada elemento x del conjunto A le corresponde un único elemento y del conjunto B. Si la función es de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ entonces los valores para x son números reales y su correspondiente $f(x)$ también es un número real.

Problemas

1. Sea $f(x) = x^3$; completa la siguiente tabla y ubica los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano (aproxima hasta las centésimas). Utiliza los puntos encontrados en el problema 1 del Problema inicial para continuar la gráfica de f:

x	–2	–1.8	–1.6	–1.4	–1.2	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$										

2. ¿Qué relación hay entre los valores de $f(x) = x^3$ cuando $x = –1$ y $x = 1$? ¿Y si $x = –2$ y $x = 2$?

3. En general, ¿qué relación hay entre los valores de $f(x) = x^3$ cuando $x = –m$ y $x = m$?

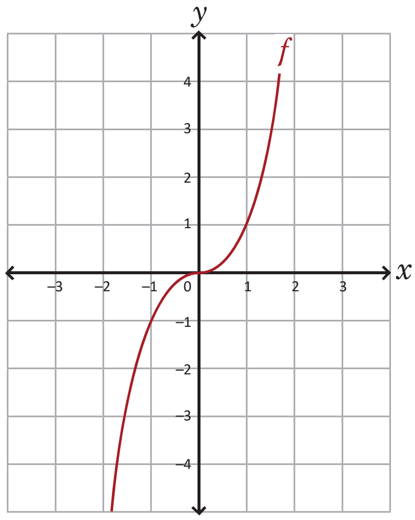
4.2 Función $f(x) = ax^3$, $a > 0$

Problema inicial

Con la gráfica de $f(x) = x^3$, realiza lo siguiente:

1. Utiliza los valores de $f(x)$ para completar la tabla y grafica las funciones $g(x) = 2x^3$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^3$:

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$									
$h(x)$									



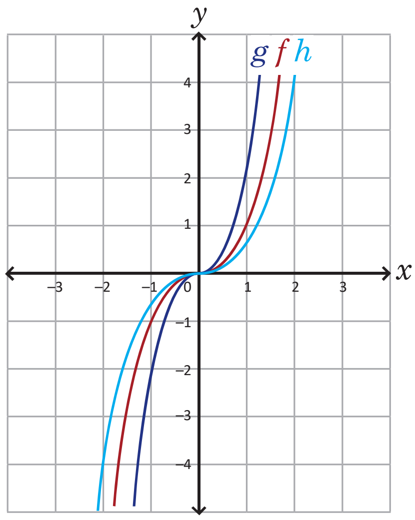
2. ¿Cuáles son las similitudes y diferencias de las funciones g y h con respecto a la función f?

Solución

1. Los valores de $g(x)$ son el resultado de multiplicar por 2 los de $f(x)$; mientras que los de $h(x)$ son el resultado de multiplicar por $\frac{1}{2}$ los de $f(x)$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−8	−3.38	−1	−0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	−16	−6.76	−2	−0.26	0	0.26	2	6.76	16
$h(x)$	−4	−1.69	−0.5	−0.07	0	0.07	0.5	1.69	4

Las gráficas de g y h se muestran en la figura de la derecha.



2. Similitudes entre las funciones:
   a) el dominio y el rango de las tres es $\mathbb{R}$;
   b) las gráficas de las tres funciones tienen la misma forma y pasan por el origen.

   Diferencias entre las funciones:
   a) todos los puntos, excepto el origen, no coinciden;
   b) si $x < 0$ entonces $g(x)$ está debajo de $f(x)$ y $h(x)$ está arriba de $f(x)$;
   c) si $x > 0$ entonces $g(x)$ está arriba de $f(x)$ y $h(x)$ está debajo de $f(x)$.

En resumen

La función $g(x) = ax^3$, con $a > 0$, tiene como dominio y rango el conjunto de los números reales y es creciente en todo su dominio; su gráfica pasa por el origen, tiene la misma forma que la gráfica de $f(x) = x^3$ y resulta de multiplicar por a los valores de $f(x)$.

Problemas

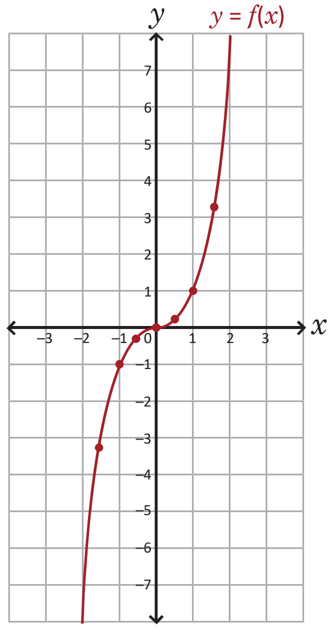
Utilizando la gráfica de $f(x) = x^3$ grafica las funciones $g(x) = 3x^3$ y $h(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Elabora una tabla similar a la del Problema inicial.

4.3 Función $f(x) = -ax^3$, $a > 0$

Problema inicial

Con la gráfica de $f(x) = x^3$, realiza lo siguiente:



1. Utiliza los valores de $f(x)$ para completar la tabla y grafica la función $g(x) = -x^3$:

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	-8	-3.38	-1	-0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$									

2. ¿Cuáles son las similitudes y diferencias entre las funciones f y g?

La función de la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

donde a es un número real diferente de cero, se llama **función cúbica**; $f(x) = ax^3$ es un caso particular de la función cúbica.

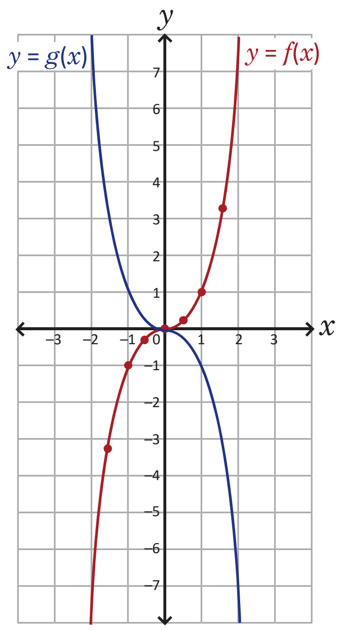
Solución

1. Los valores de $g(x)$ son el resultado de multiplicar por -1 los de $f(x)$; la tabla queda de la siguiente manera:

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	-8	-3.38	-1	-0.13	0	0.13	1	3.38	8
$g(x)$	8	3.38	1	0.13	0	-0.13	-1	-3.38	-8

$\times(-1)$

Las gráficas de f y g se muestran en la figura de la derecha.



2. Similitudes entre las funciones:
   a) el dominio y el rango de ambas es $\mathbb{R}$;
   b) las gráficas tienen la misma forma, y pasan por el origen.

   Diferencias entre las funciones:
   a) todos los puntos, excepto el origen, no coinciden;
   b) si $x < 0$ entonces $g(x)$ está sobre el eje x mientras que $f(x)$ está debajo del eje;
   c) si $x > 0$ entonces $g(x)$ está debajo del eje x mientras que $f(x)$ está sobre el eje.

En resumen

Si $f(x) = ax^3$ y $a > 0$ entonces la gráfica de la función $g(x) = -f(x) = -ax^3$ es una **reflexión con respecto al eje x** de la gráfica de la función f; tiene como dominio y rango el conjunto de los números reales y es decreciente en todo su dominio; su gráfica pasa por el origen, tiene la misma forma que la gráfica de f y resulta de multiplicar por -1 los valores de $f(x)$.

Problemas

Utilizando la gráfica de $f(x)$ grafica la función $g(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = -2x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$

c) $f(x) = 3x^3$, $g(x) = -3x^3$

4.4 Función $f(x) = \frac{k}{x}$ y sus desplazamientos

Problema inicial

Sean $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{2}{x}$:

1. Encuentra los valores de $f(x)$ y $g(x)$ correspondientes a cada valor de x en la siguiente tabla:

x	–8	–4	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$												
$g(x)$												

2. Determina otros valores para f y g que no estén en 1, luego ubica los puntos $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$ y traza las gráficas de ambas funciones.

3. Encuentra las ecuaciones de las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de f y g una unidad horizontalmente hacia la derecha y tres unidades verticalmente hacia arriba.

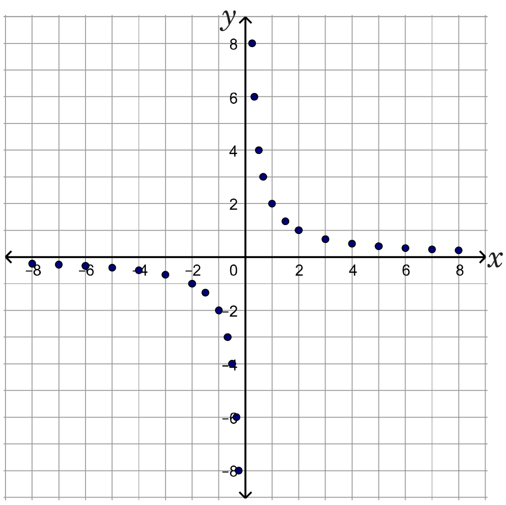
Solución

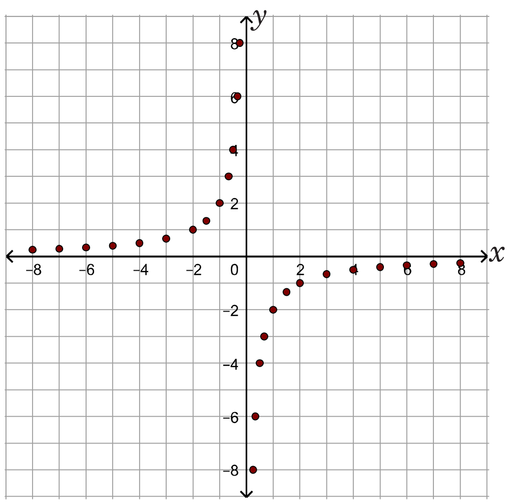
1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–8	–4	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	–0.25	–0.5	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1	0.5	0.25
$g(x)$	0.25	0.5	1	2	4	8	–8	–4	–2	–1	–0.5	–0.25

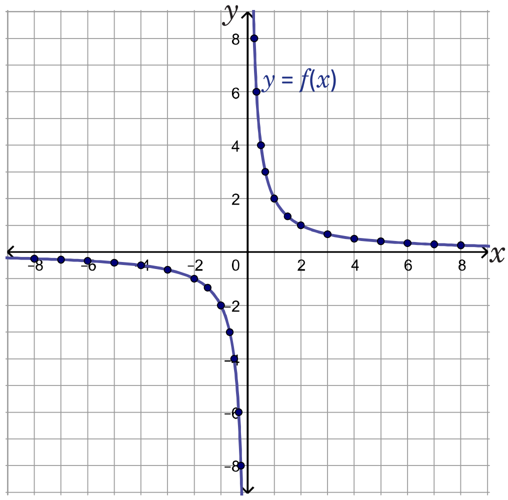
2. Se encuentran otros valores de f y g, por ejemplo para $x = -7, -6, -5, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, 5, 6, 7$ y se ubican los puntos $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$ en el plano cartesiano:

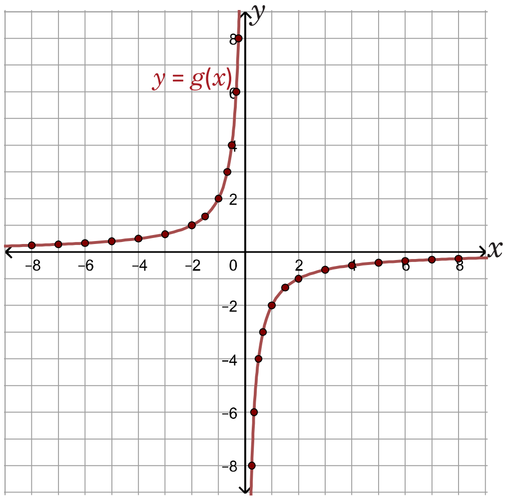
x	–7	–6	–5	–3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	3	5	6	7
$f(x)$	–0.29	–0.33	–0.4	–0.67	–1.33	–3	–6	6	3	1.33	0.67	0.4	0.33	0.29
$g(x)$	0.29	0.33	0.4	0.67	1.33	3	6	–6	–3	–1.33	–0.67	–0.4	–0.33	–0.29





Esto permite visualizar mejor la forma de cada gráfica, como se muestra a continuación:





3. Sea $h(x)$ la función cuya gráfica resulta de desplazar la de f una unidad horizontalmente hacia la derecha y tres unidades verticalmente hacia arriba. Si (a, b) es un punto sobre la gráfica de h entonces $(a - 1, b - 3)$ es un punto sobre la gráfica de f, es decir:

$$f(a - 1) = b - 3$$
$$b = f(a - 1) + 3$$

luego, la ecuación de $h(x)$ es $f(x - 1) + 3$, o sea, $h(x) = \frac{2}{x-1} + 3$.

De forma similar, si $l(x)$ es la función cuya gráfica resulta de desplazar la de g una unidad horizontalmente a la derecha y tres unidades verticalmente hacia arriba entonces:

$$l(x) = g(x - 1) + 3 = -\frac{2}{x-1} + 3.$$

Conclusión

Sea $f(x) = \frac{k}{x}$, con k un número real diferente de cero. A f se le llama **función de proporcionalidad inversa**; cuando el valor absoluto de x, o sea $|x|$, aumenta sin límites entonces la gráfica de f se acerca al eje x sin llegar a cortarlo; además, si $|x|$ se acerca a cero entonces la gráfica de $f(x)$ se acerca al eje y sin llegar a cortarlo.

En general, la gráfica de la función de proporcionalidad inversa tiene la misma forma que las del problema inicial según sea el caso ($k > 0$ o $k < 0$).

Lo anterior indica que la función de proporcionalidad inversa no posee intersecciones con los ejes de coordenadas; al **eje x** y al **eje y** se les llama **asíntota horizontal** y **asíntota vertical**, respectivamente, de la gráfica de $f(x) = \frac{k}{x}$.

Si $g(x)$ es la función cuya gráfica resulta de desplazar la de $f(x) = \frac{k}{x}$, p unidades horizontalmente y q unidades verticalmente entonces:

$$g(x) = \frac{k}{x-p} + q.$$

Si $p > 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, y si $p < 0$, entonces es hacia la izquierda. Por otra parte, si $q > 0$, el desplazamiento es hacia arriba, y si $q < 0$, entonces es hacia abajo.

Problemas

Usando las funciones f y g del Problema inicial, encuentra las ecuaciones de las funciones cuyas gráficas resultan de desplazar las de f y g, p unidades horizontalmente y q unidades verticalmente:

a) $p = 2, q = 1$ b) $p = -2, q = 1$ c) $p = 2, q = -1$ d) $p = -2, q = -1$

4.5 Gráfica de la función $h(x) = \frac{k}{x-p} + q$*

Problema inicial

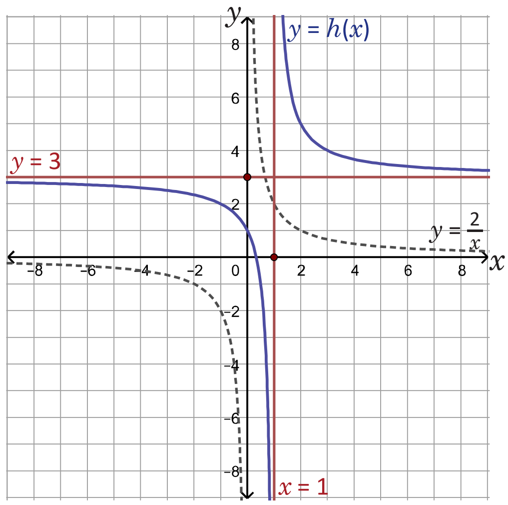
Sea $h(x) = \frac{2}{x-1} + 3$

1. Encuentra las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de h.
2. Traza las asíntotas del literal anterior, y luego la gráfica de h.
3. Encuentra el dominio y el rango de la función h.

Solución

1. De la clase anterior se sabe que la gráfica de $h(x)$ corresponde a un desplazamiento de una unidad horizontalmente y tres unidades verticalmente de la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x}$. Las asíntotas se trasladan de la misma manera, es decir, si $y = 0$ (eje x) y $x = 0$ (eje y) son las asíntotas de f entonces $y = 3$ y $x = 1$ son las asíntotas de la gráfica de h.

2. La gráfica de $y = 3$ es una línea recta horizontal que pasa por (0, 3); mientras que $x = 1$ es una línea recta vertical que pasa por (1, 0). Luego de trazar las asíntotas se traza la gráfica de h, cuya forma es similar a la de $f(x) = \frac{2}{x}$:



3. En la ecuación de la función h, el denominador no puede ser igual a cero; esto se cumple si x es diferente de 1 y, por tanto, el dominio de h es $]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$. De la gráfica de $h(x)$ se deduce que su rango es $]-\infty, 3[\cup]3, \infty[$.

Conclusión

Sean k, p y q números reales, con k diferente de cero. Las asíntotas horizontal y vertical de la función $h(x) = \frac{k}{x-p} + q$ son $y = q$ y $x = p$, respectivamente. El dominio de la función h es $D_h =]-\infty, p[\cup]p, \infty[$, y su rango es $R_h =]-\infty, q[\cup]q, \infty[$.

Al momento de trazar la gráfica de h se recomienda primero trazar las asíntotas y luego la gráfica.

Problemas

Traza las asíntotas y la gráfica de la función $h(x)$ en cada caso; luego encuentra su dominio y su rango:

a) $h(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ b) $h(x) = \frac{1}{x+2} + 1$ c) $h(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ d) $h(x) = -\frac{1}{x-2} + 1$

Unidad 4

4.6 Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Problema inicial

Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$:

1. Efectúa la división $(x + 1) \div (x - 2)$; escribe $\dfrac{x+1}{x-2}$ en la forma $\dfrac{k}{x-p} + q$.
2. Traza la gráfica de $f(x)$.

Solución

1. Utilizando la división sintética se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 1 \\ 2 & \downarrow & 2 \\ \hline & 1 & 3 \end{array}$$

En la división sintética se colocan los coeficientes de los polinomios del dividendo y divisor en la siguiente forma:

$$\begin{array}{c|l|l} & \text{Dividendo} & \\ \hline a & \text{Cociente} & \text{Residuo} \end{array}$$

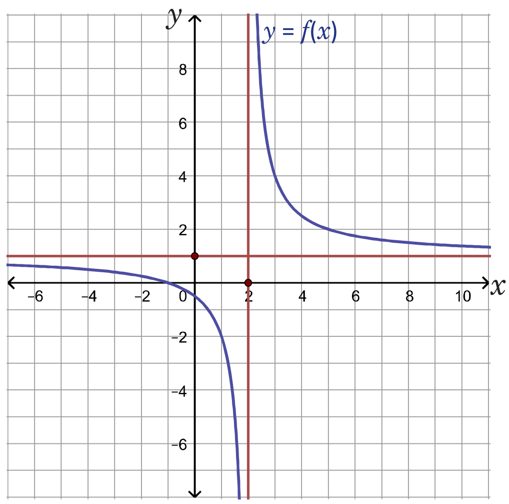
Luego, $x + 1 = 1(x - 2) + 3$. Se dividen ambos miembros de esta ecuación por $x - 2$:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{1\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1.$$

Por lo tanto, $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3}{x-2} + 1$.

2. Del numeral anterior, $f(x) = \dfrac{3}{x-2} + 1$; entonces la gráfica de f se obtiene desplazando dos unidades horizontalmente y una unidad verticalmente la gráfica de $y = \dfrac{3}{x}$.

Las asíntotas de f son $y = 1$ y $x = 2$.



Conclusión

Sean a, b y d números reales no todos iguales a cero y $c \neq 0$; se le llama **función racional** a la función de la forma $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. La ecuación de f puede llevarse a la forma $\dfrac{k}{x-p} + q$ efectuando la división del polinomio del numerador entre el polinomio del denominador.

En general, una función racional es de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios cualesquiera, no solamente polinomios lineales.

Problemas

Para cada caso, escribe la ecuación de la función f en la forma $\dfrac{k}{x-p} + q$, luego traza las asíntotas y la gráfica de la función:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{-x+3}{x-2}$

4.7 Función irracional $f(x) = a\sqrt{x}$

Problema inicial

Sea $y = \sqrt{x}$:

1. Completa la siguiente tabla (aproxima hasta las centésimas):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0									

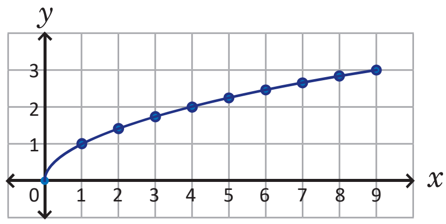
2. Coloca los puntos (x, y) en el plano cartesiano y únelos con una línea, ¿es similar a alguna gráfica de las funciones estudiadas anteriormente?
3. ¿Para cuáles valores de x se encuentra definido el valor de y?

Solución

1. La tabla queda de la siguiente manera:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3

2. La línea que se forma al unir los puntos aparece en la figura de la derecha. La línea se asemeja a la mitad de una parábola, solo que esta vez se abre hacia la derecha.



3. El valor de y se encuentra definido para todo x positivo o igual a cero, es decir, $x \in [0, \infty[$.

Conclusión

La ecuación $y = \sqrt{x}$ es la ecuación de una función de $[0, \infty[$ a $\mathbb{R}$, cuya gráfica pasa por el origen y es similar a la mitad de una parábola que se abre hacia la derecha. En general, $f(x) = a\sqrt{x}$, con $a \neq 0$, es una función cuyo dominio es $[0, \infty[$ y:

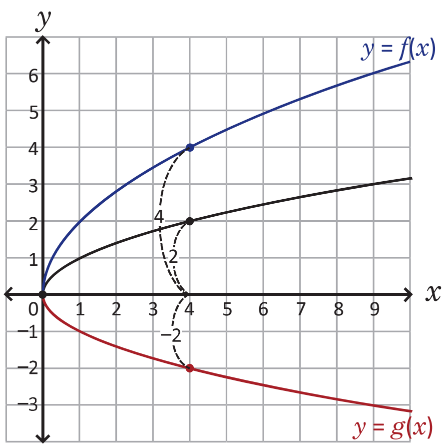
1. Si $a > 0$ entonces el rango de f es $[0, \infty[$ y su gráfica queda arriba del eje x.
2. Si $a < 0$ entonces el rango de f es $]-\infty, 0]$ y su gráfica queda debajo del eje x.

Ejemplo

Grafica las funciones $f(x) = 2\sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x}$, encuentra el dominio y el rango en cada una.

La gráfica de f queda arriba del eje x y resulta de multiplicar por 2 los valores de $\sqrt{x}$; mientras que la gráfica de g queda debajo del eje x y resulta de multiplicar por –1 los valores de $\sqrt{x}$.

Ambas gráficas se muestran en la figura de la derecha, su dominio es $[0, \infty[$ y los rangos son $R_f = [0, \infty[$, $R_g =]-\infty, 0]$.



Problemas

Para cada caso, grafica la función f, encuentra el dominio y el rango.

a) $f(x) = 3\sqrt{x}$
b) $f(x) = -2\sqrt{x}$
c) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

4.8 Función irracional $f(x) = \sqrt{ax}$

Problema inicial

Sea $f(x) = \sqrt{-x}$:

1. ¿Cuál es el dominio de la función f?
2. Calcula los valores de $f(x)$ en la siguiente tabla, luego traza la gráfica de la función (aproxima hasta las centésimas):

x	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
$f(x)$										

3. ¿Cuál es el rango de la función?

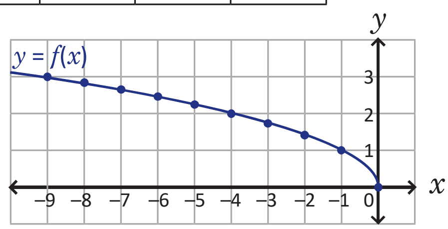
Solución

1. Los números dentro de la raíz deben ser mayores o iguales a cero; entonces el dominio de la función deben ser los números reales para los cuales $-x \geq 0$, es decir, $x \leq 0$. Por lo tanto $D_f =]-\infty, 0]$.

2. La tabla queda de la siguiente manera:

x	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
$f(x)$	3	2.83	2.65	2.45	2.24	2	1.73	1.41	1	0

La gráfica de f se muestra en la figura de la derecha:



3. El valor de $f(x) = \sqrt{-x}$ siempre será un número positivo o igual a cero, por lo tanto $R_f = [0, \infty[$.

En resumen

Las funciones de la forma $f(x) = a\sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{ax}$, donde a es un número real diferente de cero, son casos particulares de las llamadas **funciones irracionales**. Las gráficas de f y g pasan por el origen y se asemejan a la mitad de una parábola que se abre a lo largo del eje x. En el caso de la función g, su rango son los números reales positivos y el cero, o sea $[0, \infty[$, y:

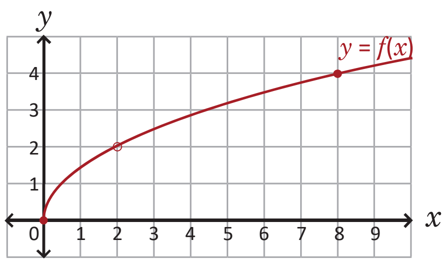
1. Si $a > 0$ entonces el dominio de f es $[0, \infty[$ y su gráfica queda a la derecha del eje y.
2. Si $a < 0$ entonces el dominio de f es $]-\infty, 0]$ y su gráfica queda a la izquierda del eje y.

Ejemplo

Grafica la función $f(x) = \sqrt{2x}$, encuentra su dominio y su rango.

La gráfica de f queda a la derecha del eje y como se muestra en la figura de la derecha; $D_f = [0, \infty[$ y $R_f = [0, \infty[$.

La gráfica de $f(x) = \sqrt{2x}$ no es igual a la de $g(x) = 2\sqrt{x}$, sino a la de $h(x) = \sqrt{2}\sqrt{x}$.



Problemas

Para cada caso, grafica la función f, encuentra el dominio y el rango:

a) $f(x) = \sqrt{3x}$

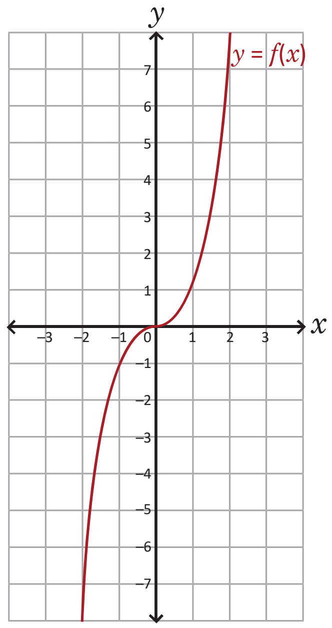
b) $f(x) = \sqrt{-2x}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$

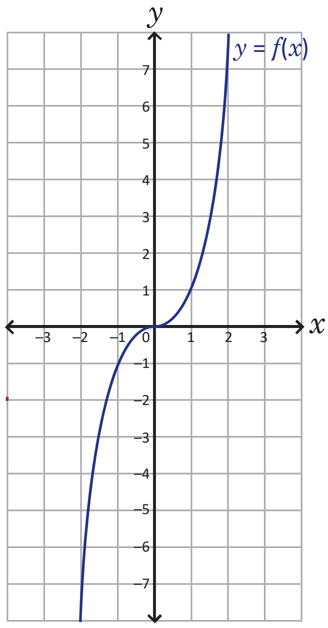
4.9 Practica lo aprendido

1. Utilizando la gráfica de $f(x) = x^3$, grafica la función g y encuentra su dominio y su rango:

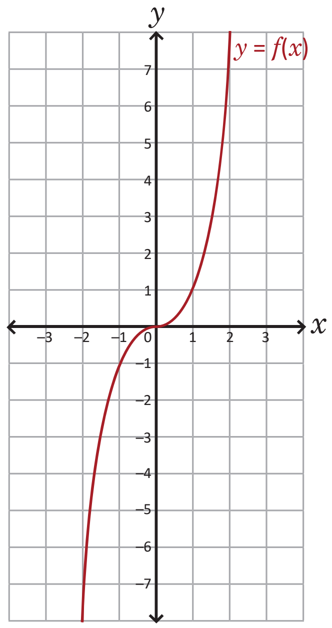
a) $g(x) = 4x^3$



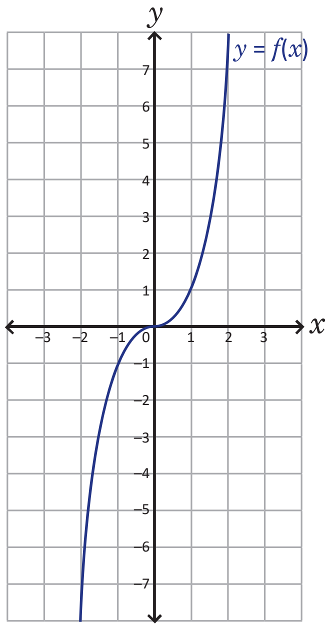
b) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$



c) $g(x) = -\,4x^3$



d) $g(x) = -\,\frac{1}{4}x^3$



2. Para cada caso, grafica la función y encuentra su dominio y su rango.

a) $f(x) = \dfrac{-\,2x}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

3. Para cada caso, grafica la función y encuentra su dominio y su rango.

a) $f(x) = -3\sqrt{x}$

b) $f(x) = 4\sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt{-3x}$

d) $f(x) = \sqrt{4x}$

4.10 Problemas de la unidad

1. Para cada caso, traza la gráfica de f, encuentra las coordenadas del vértice, el dominio y el rango de la función:

   a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$

   b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 1$

   c) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

   d) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$

2. Encuentra la ecuación de la función cuadrática g si la gráfica pasa por los puntos (–12, 0), (–9, 3) y (–7, –5).

3. El sector de sol general del Estadio Nacional Jorge "Mágico" González tiene capacidad para 10 000 aficionados. En un determinado partido el precio del boleto para ese sector fue de $10.00 y en promedio asistieron 3 000 aficionados. Un estudio de mercado indicó que por cada dólar que se hubiera bajado al precio del boleto, el promedio de asistencia hubiese aumentado en 1 000. ¿Cuál debió haber sido el precio para obtener la máxima ganancia en la venta de boletos para el sector de sol general?

4. Resuelve las siguientes desigualdades:

   a) $12x^2 - 5x - 2 \leq 0$

   b) $4x > -4x^2 + 15$

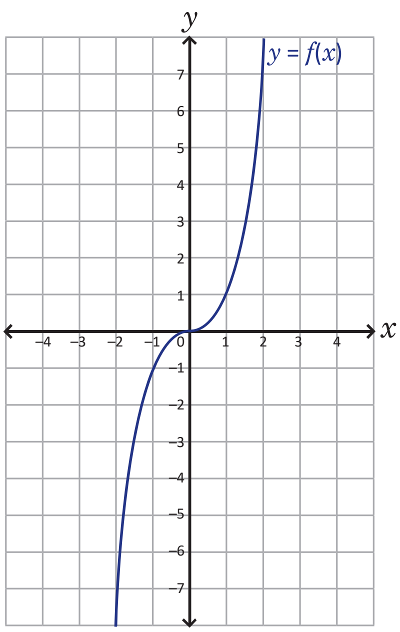
   c) $2x^2 - x \leq 1$

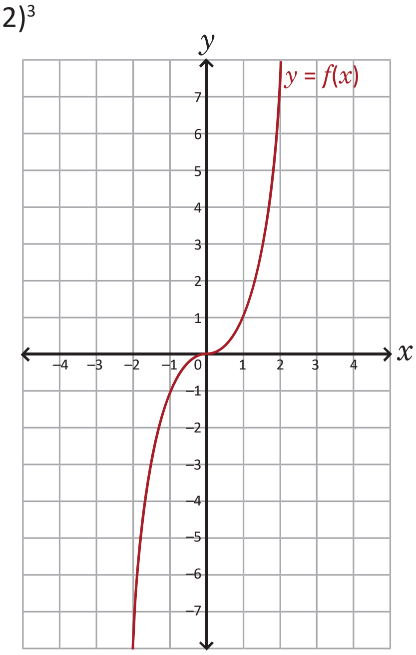
   d) $x^2 - 4x - 1 \geq 0$

5. Utilizando la gráfica de $f(x) = x^3$ traza la gráfica de la función g y encuentra el dominio y el rango:

   a) $g(x) = x^3 + 1$

   b) $g(x) = (x - 2)^3$





6. Para cada caso, grafica la función f y encuentra el dominio y el rango:

   a) $f(x) = -\sqrt{-x}$

   b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

   c) $f(x) = \sqrt{-x} - 3$

   d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

5.1 Práctica en GeoGebra: generalidades

GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos; en él pueden trabajarse contenidos relacionados con geometría, álgebra, estadística y cálculo, pues cuenta con numerosas herramientas fáciles de usar.

En esta clase explorarás la interfaz para conocer sobre sus generalidades y el uso de algunos comandos. Busca en tu computadora el ícono de GeoGebra (es el que aparece en la esquina superior derecha de esta página); si la PC no cuenta con el software puedes descargarlo de manera gratuita en el siguiente enlace:

GeoGebra https://goo.gl/jRmmdc

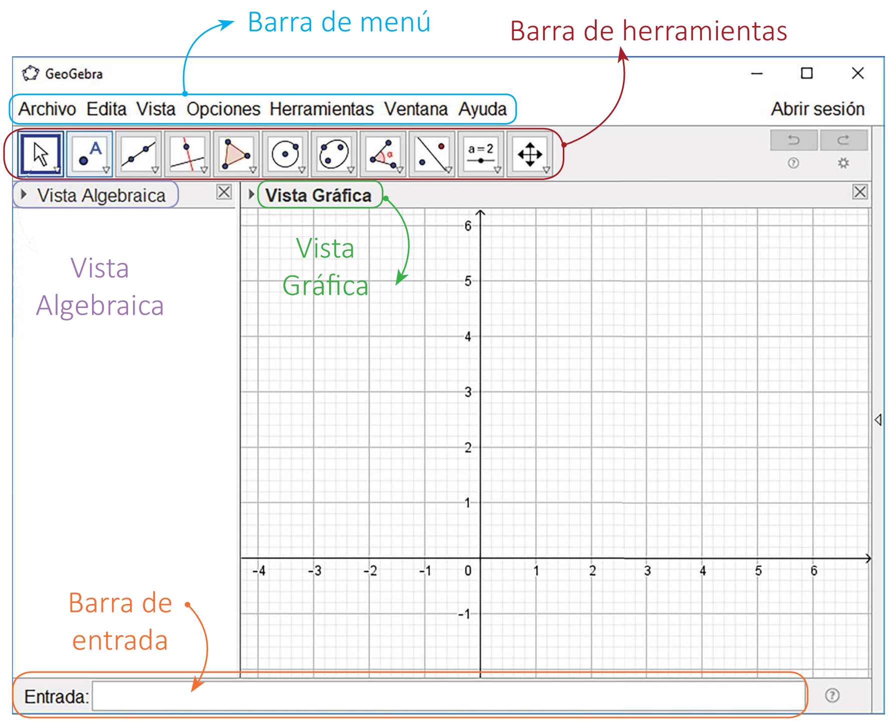
Asegúrate de descargar (instalar) “GeoGebra Clásico 5”. También puedes descargar la app para el celular o trabajar “GeoGebra en línea” en los siguientes enlaces:

App → https://goo.gl/wf5mHx **En línea** → https://goo.gl/ThXbeB

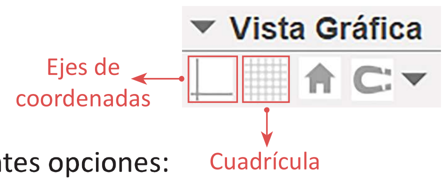
Práctica

Realiza lo siguiente:

1. Abre un nuevo archivo de GeoGebra dando clic al ícono del software. En la ventana puedes identificar las siguientes partes: la Barra de menú, la Barra de herramientas, la Vista Algebraica, la Vista Gráfica y la Barra de entrada.



2. Da clic sobre el triángulo que se encuentra a la izquierda de Vista Gráfica. Puedes ocultar o aparecer los ejes de coordenadas y la cuadrícula.

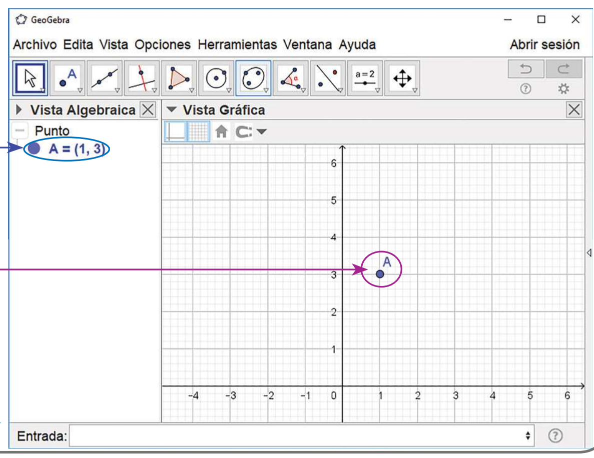


3. Para ubicar puntos en el plano puedes realizar una de las siguientes opciones:
   a) En la barra de entrada escribir las coordenadas del punto en la forma (x, y). Por ejemplo, al escribir (1,3) y presionar Enter, automáticamente aparecerá en la Vista Algebraica el punto A = (1,3) y en la Vista Gráfica el punto sobre el plano cartesiano:

   Entrada: **(1,3)**

   GeoGebra designa los puntos con letras mayúsculas. Para denotar un punto con una letra específica, por ejemplo P(–2,5), se escribe en la barra de entrada:

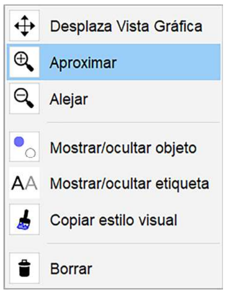
   Entrada: **P=(–2,5)**



b) Selecciona la herramienta Punto. En la Vista Gráfica ubica el cursor en la posición donde quieras colocar el punto y luego da clic. Cuando las coordenadas del punto son números enteros es fácil utilizar esta herramienta y auxiliarse de la cuadrícula; caso contrario es mejor ingresar las coordenadas en la barra de entrada como en el literal anterior.

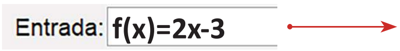
4. Para borrar objetos da clic derecho sobre ellos (ya sea en la Vista Algebraica o en la Vista Gráfica) y selecciona Borrar. Si lo que quieres es ocultar el objeto y no borrarlo, en el cuadro selecciona Objeto visible, desaparecerá de la Vista Gráfica pero permanecerá en la Vista Algebraica.

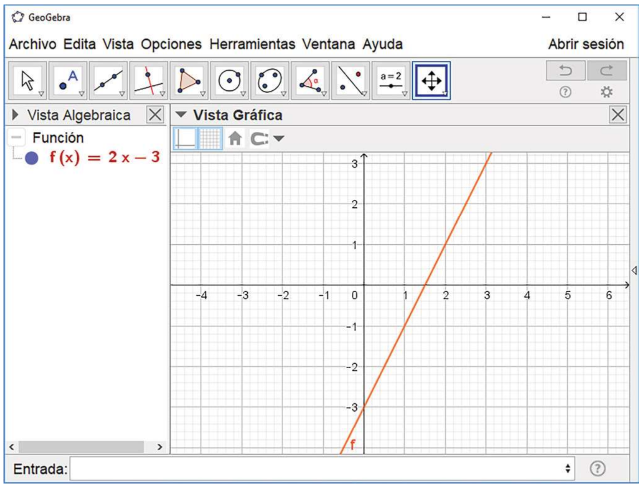
5. Para desplazar el plano cartesiano selecciona la herramienta Desplaza Vista Gráfica. Luego sobre la Vista Gráfica mantén presionado clic izquierdo y arrastra al lugar donde quieres colocar el plano.



6. Para acercar o alejar el plano cartesiano selecciona la esquina inferior derecha del ícono Desplaza Vista Gráfica y elige Aproximar o Alejar, luego da clic sobre la Vista Gráfica.

7. Para graficar funciones se utiliza la notación $f(x)$. Por ejemplo, para graficar la función $f(x) = 2x - 3$ se escribe f(x)=2x-3 en la barra de entrada seguido de Enter. En la Vista Algebraica aparecerá la ecuación de la función y en la Vista Gráfica su gráfica:





Puedes usar también g(x), h(x), etc.; la variable x siempre debe estar en minúscula, de esa forma GeoGebra la reconocerá como una variable.

8. En GeoGebra, para graficar funciones cuadráticas, la potencia x^2 se escribe x^2. Por ejemplo, para graficar $f(x) = 3x^2$ se escribe en la barra de entrada f(x)=3x^2.

Actividades

1. Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano, utilizando la barra de entrada y la herramienta “Punto” en aquellos casos que sea posible:

a) A(–3, 4) b) B(2, 7) c) P(–6, 0) d) $Q\left(4, -\frac{1}{2}\right)$

En GeoGebra la fracción $\frac{m}{n}$ se escribe m/n.

2. Grafica las siguientes funciones:

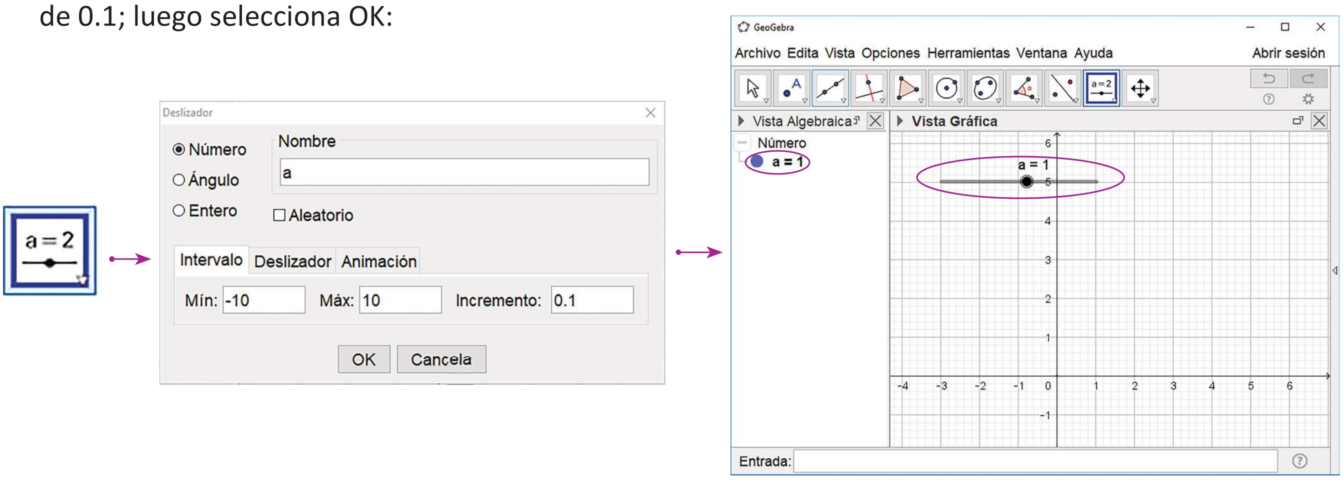
a) $f(x) = -x + 3$ b) $g(x) = \frac{2}{3}x - 5$ c) $h(x) = 4x^2$ d) $p(x) = -x^2$ e) $q(x) = \frac{x^2}{2}$

5.2 Práctica en GeoGebra: desplazamientos verticales

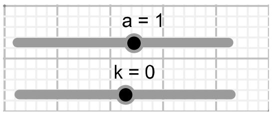
Esta práctica te ayudará a visualizar los desplazamientos verticales de funciones cuadráticas utilizando la herramienta Deslizador; un deslizador es una variable que toma valores determinados dentro de un intervalo indicado.

Práctica

1. Selecciona la herramienta Deslizador. Da clic sobre la Vista Gráfica, te aparecerá un cuadro de diálogo para especificar el nombre del deslizador, el tipo (número, ángulo o entero), el intervalo y el incremento. Nombra al deslizador **a**, en el intervalo coloca el valor mínimo –10 y el valor máximo 10, con un incremento de 0.1; luego selecciona OK:



2. De forma similar crea otro deslizador, nómbralo **k** y asígnale las mismas características de **a** (intervalo e incremento). Coloca el cursor sobre el punto que aparece en el deslizador, muévelo hasta que **k** tenga el valor de cero.



3. Escribe en la barra de entrada f(x)=ax^2; en la Vista Algebraica aparecerá la función $f(x) = 1x^2$ y en la Vista Gráfica la parábola correspondiente. Mueve el deslizador **a**, primero para valores positivos y luego negativos; ¿qué ocurre con la gráfica de f? Anota lo que observas en tu cuaderno.

4. Escribe en la barra de entrada g(x)=f(x)+k.

5. Para determinar el vértice de la gráfica de g escribe en la barra de entrada extremo. Selecciona la opción Extremo(<Polinomio>); luego, en lugar de <Polinomio> escribe "y=g(x)", aparecerá en la Vista Algebraica las coordenadas del vértice y en la Vista Gráfica el punto.

6. Mueve el deslizador **k**, primero para valores positivos y luego para negativos. ¿Qué ocurre con la gráfica y el vértice de la función si **k** es positivo o si es negativo? Anota lo que observas en tu cuaderno.

Actividades

Ahora utilizarás otra herramienta para construir la gráfica de la función $f(x) = x^2$ como se hizo en noveno grado, es decir, a partir de puntos:

1. Abre una nueva ventana. Crea un deslizador y nómbralo "**n**", con intervalo de –5 a 5 e incremento de 0.001. Mueve el deslizador hasta que **n** tenga el valor de –5, aleja la Vista Gráfica.
2. En la barra de entrada ingresa el punto "P=(n,n^2)". Luego da clic derecho sobre P y selecciona la opción "Rastro".
3. Da clic derecho sobre "**n**" y selecciona "Animación". Anota lo que observas en tu cuaderno.

5.3 Práctica en GeoGebra: desplazamientos horizontales

Con esta práctica visualizarás los desplazamientos horizontales, combinaciones de desplazamientos horizontales, verticales y las gráficas de otras funciones que no son cuadráticas.

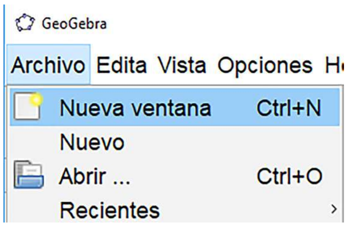
Práctica

Desplazamientos horizontales:

1. Crea dos deslizadores, al primero nómbralo **a** con intervalo de –10 a 10 e incremento 0.1, y al segundo nómbralo **h** y con las mismas características de **a** (intervalo e incremento). Mueve el deslizador **h** hasta que su valor sea igual a cero.

2. Crea las funciones "f(x)=ax^2" y "g(x)=f(x-h)" y encuentra el vértice de la gráfica de g.

3. Mueve el deslizador **a** de tal forma que sea diferente de 1. Luego activa la animación para el deslizador **h**, ¿qué ocurre con la gráfica y el vértice de g para valores positivos de **h**? ¿Y para valores negativos? Anota los resultados en tu cuaderno.



Combinaciones de desplazamientos horizontales y verticales:

1. Abre una nueva ventana en GeoGebra, ve al menú "Archivo" y selecciona "Nueva ventana".

2. Crea tres deslizadores, nómbralos **a**, **h** y **k**, y asígnales las siguientes características: intervalo de –10 a 10 e incremento de 0.1. Mueve los deslizadores **h** y **k** para que su valor sea cero.

3. Crea las funciones "f(x)=ax^2" y "g(x)=f(x-h)+k". Encuentra además el vértice de la gráfica de g.

4. Mueve el deslizador **a** de tal forma que sea diferente de 1. Luego mueve los deslizadores **h** y **k** en ese orden y sin activar la animación. Anota lo que le ocurre a la gráfica y el vértice de g con respecto a f.

Gráficas de otras funciones que no son cuadráticas:

1. Abre una nueva ventana en GeoGebra.

2. Crea el deslizador **m** y asígnale las siguientes características: intervalo de –4 a 4 e incremento de 0.001; mueve el deslizador para que su valor sea –4.

3. Crea el punto "P=(m,m^3)" y actívale el rastro. Luego activa la animación del deslizador **m**, ¿cuál es la función cuya gráfica se asemeja a la que se está elaborando?

4. Crea el deslizador **n** con intervalo de 0 a 30 e incremento 0.001; muévelo para que su valor sea 0.

5. Crea el punto "Q=(n, sqrt(n))" y actívale el rastro. Luego activa la animación del deslizador **n**, ¿cuál es la función cuya gráfica se asemeja a la que se está elaborando? ¿Para qué sirve el comando "sqrt"?

Actividades

1. Utiliza GeoGebra para comprobar si has elaborado correctamente las gráficas de las funciones de los problemas, desde la clase 2.1 hasta la clase 2.8.

2. Comprueba los resultados de las gráficas de la clase 4.9, y los problemas 5 y 6 de la clase 4.10.