6 Unidad

Identidades y ecuaciones trigonométricas

A partir de la introducción de la trigonometría como parte de los estudios astronómicos, se comienzan a trabajar las expresiones relacionadas con las medidas trigonométricas, algunos historiadores señalan la India, con mayor exactitud la escuela de Kerala, como el lugar donde se descubrieron las primeras identidades trigonométricas, sin embargo, estos resultados fueron obtenidos a partir de construcciones geométricas y propiedades de los triángulos y la circunferencia; la región árabe fue la que más interés mostró en la trigonometría y hacia el siglo X ya tenía un gran avance en el estudio de esta.

La oscilación que destruyó el puente Tacoma Narrows en 1940, se puede estudiar utilizando trigonometría.

El estudio de la trigonometría y la definición de las razones trigonométricas como se conocen en la actualidad fue retomado por matemáticos importantes como Newton, Euler o Leibniz, hasta llegar a su conexión con los números complejos y su expresión en series, entre otros resultados, que han llevado a la trigonometría a tener un lugar básico para el desarrollo de las ciencias y la tecnología, así como la física, en la descripción del sonido, la luz o las oscilaciones mecánicas.

Después de conocer las razones trigonométricas, ahora se desarrollará la deducción de las identidades trigonométricas más conocidas; se demostrará el teorema de adición para seno y coseno, y la identidad para el seno y coseno del ángulo doble, para utilizarlas posteriormente en la resolución de ecuaciones que tengan expresiones trigonométricas.

1.1 Identidades trigonométricas de los ángulos $-\theta$, $90° - \theta$ y $180° - \theta$

Problema inicial

Demuestra que

1. $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$
2. $\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
3. $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ y $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

Utiliza simetrías respecto al eje x, a la recta identidad y al eje y.

Solución

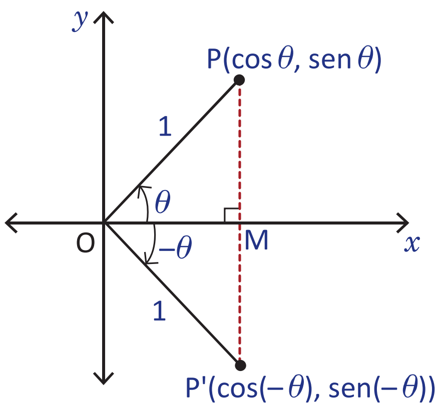
1. De la clase 2.2 de la Unidad 5 se sabe que si P es un punto del plano cartesiano con coordenadas (a, b), las coordenadas del punto simétrico P' respecto al eje x es $(a, -b)$.

   Sea el punto $P(a, b)$ tal que OP = 1 y $\overline{OP}$ forme un ángulo θ con el eje x. Las coordenadas de P son $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Entonces, las coordenadas de su simétrico respecto al eje x es

   $$P'(\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta) \qquad \text{------------------ (1)}$$

   Por otra parte, $\overline{OP'}$ forma un ángulo $-\theta$ con el eje x. Por lo tanto, las coordenadas de P' son

   $$(\cos(-\theta), \operatorname{sen}(-\theta)) \qquad \text{------------------ (2)}$$



   Comparando (1) y (2) se tiene que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$.

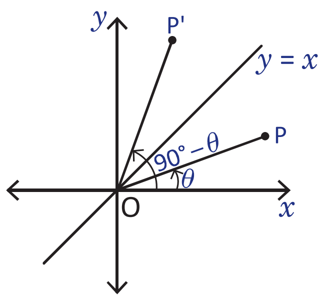
2. Se sabe que si P es un punto sobre el plano cartesiano con coordenadas (a, b), las coordenadas del punto P' simétrico respecto a la recta identidad es (b, a).

   Se considera $P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, entonces su simétrico respecto a la recta identidad es

   $$P'(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \qquad \text{------------------ (3)}$$

   Como P' es el simétrico de P, se tiene que $\overline{OP'}$ forma un ángulo de $90° - \theta$ con el eje x; esto quiere decir que las coordenadas de P' son

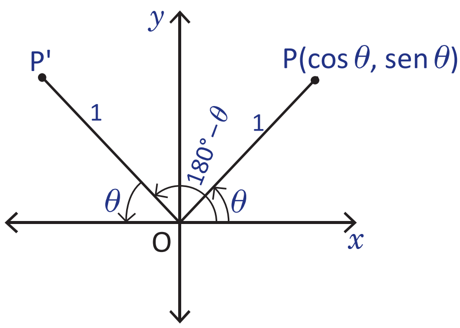
   $$(\cos(90° - \theta), \operatorname{sen}(90° - \theta)) \qquad \text{------------------ (4)}$$



   De (3) y (4) puede determinarse que $\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$.

3. Se sabe que si $P(a, b)$ es un punto del plano cartesiano, entonces $P'(-a, b)$ es su simétrico con respecto al eje y.

Si se considera P un punto del plano cartesiano, tal que OP = 1 y $\overline{OP}$ forme un ángulo θ con el eje x, sus coordenadas son (cos θ, sen θ). Entonces su simétrico respecto al eje y es



P'(– cos θ, sen θ) ------------------ (5)

Por otra parte, $\overline{OP'}$ forma un ángulo de 180° – θ con el eje x. Así, las coordenadas de P' son

(cos(180° – θ), sen(180° – θ)) ------------------ (6)

Luego, de (5) y (6) se concluye que cos(180° – θ) = – cos θ y sen(180° – θ) = sen θ.

Conclusión

Una **identidad trigonométrica** es una igualdad donde intervienen razones trigonométricas y es verdadera para cualquier valor del ángulo.

Para cualquier ángulo θ se cumplen las identidades de ángulos opuestos para el coseno y el seno

a) cos(– θ) = cos θ b) sen(– θ) = – sen θ

Para cualquier ángulo θ se cumplen las identidades de ángulos complementarios y suplementarios para el coseno y el seno

c) cos(90° – θ) = sen θ d) sen(90° – θ) = cos θ

e) cos(180° – θ) = – cos θ f) sen(180° – θ) = sen θ

Además, se cumplen las siguientes identidades para la tangente

g) tan(– θ) = – tan θ h) tan(90° – θ) = $\frac{1}{\tan\theta}$ i) tan(180° – θ) = – tan θ

Ejemplo

Representa cada razón en términos de un ángulo θ tal que 0° ≤ θ < 90°.

1. cos (– 40°) 2. sen 120° 3. tan 320°

1. Utilizando la identidad de ángulos opuestos, cos(– 40°) = cos 40°.
2. Utilizando la identidad de ángulos suplementarios, sen 120° = sen(180° – 120°) = sen 60°.
3. En este caso se aplica primero la identidad de ángulos suplementarios

   tan 320° = – tan(180° – 320°) = – tan(– 140°) = tan 140° = – tan(180° – 140°) = – tan 40°.

   Es decir, tan 320° = – tan 40°.

Problemas

1. Representa cada razón trigonométrica en términos de un ángulo θ tal que 0° ≤ θ < 90°. Indica qué tipo de identidad o identidades hay que utilizar.

   a) cos(–30°) b) sen 170° c) sen 110°

   d) cos 250° e) tan(– 60°) f) tan(– 100°)

2. Demuestra que tan(– θ) = – tan θ.
3. Demuestra que tan(90° – θ) = $\frac{1}{\tan\theta}$.
4. Demuestra que tan(180° – θ) = – tan θ.

Unidad 6

1.2 Identidades trigonométricas de los ángulos $\theta + 180°$, $\theta - 180°$ y $90° + \theta$

Problema inicial

Demuestra que

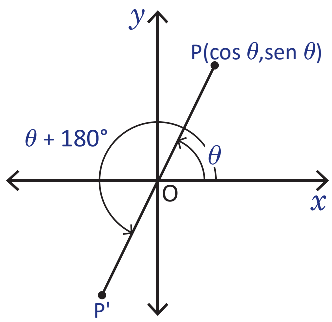
1. $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ y $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\,\theta$
2. $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$ y $\text{sen}(\theta - 180°) = -\text{sen}\,\theta$
3. $\cos(90° + \theta) = -\text{sen}\,\theta$ y $\text{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$

Utiliza la simetría respecto al origen y las identidades de la clase anterior.

Solución

a) Sea el punto $P(a, b)$ tal que $OP = 1$ y $\overline{OP}$ forme un ángulo θ con el eje x. Las coordenadas de P son $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$. Entonces, las coordenadas de su simétrico respecto al origen son

$$P'(-\cos\theta, -\text{sen}\,\theta) \qquad \text{------------------ (1)}$$



Pero $\overline{OP'}$ forma un ángulo de $\theta + 180°$ con el eje x, por lo que las coordenadas de P' son

$$(\cos(\theta + 180°), \text{sen}(\theta + 180°)) \qquad \text{------------------ (2)}$$

Luego, de (1) y (2) se tiene que $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ y $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\,\theta$.

b) El ángulo $\theta - 180°$ puede reescribirse como $-(180° - \theta)$. Entonces,

$$\cos(\theta - 180°) = \cos(-(180° - \theta)) = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta \text{ y}$$

$$\text{sen}(\theta - 180°) = \text{sen}(-(180° - \theta)) = -\text{sen}(180° - \theta) = -\text{sen}\,\theta.$$

c) El ángulo $90° + \theta$ puede reescribirse como $180° - (90° - \theta)$. Entonces,

$$\cos(90° + \theta) = \cos(180° - (90° - \theta)) = -\cos(90° - \theta) = -\text{sen}\,\theta \text{ y}$$

$$\text{sen}(90° + \theta) = \text{sen}(180° - (90° - \theta)) = \text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta.$$

Conclusión

Para cualquier ángulo θ se cumple que

a) $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$ b) $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\,\theta$

c) $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$ d) $\text{sen}(\theta - 180°) = -\text{sen}\,\theta$

e) $\cos(90° + \theta) = -\text{sen}\,\theta$ f) $\text{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$

Además, se cumplen las siguientes identidades para la tangente

g) $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$ h) $\tan(\theta - 180°) = \tan\theta$ i) $\tan(90° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

Ejemplo

Representa cada razón en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

a) cos 200° b) sen 130° c) tan 250°

a) Como $200° = 20° + 180°$, se tiene que $\cos 200° = -\cos 20°$.
b) Como $130° = 90° + 40°$, se tiene que $\text{sen}\,130° = \text{sen}(90° + 40°) = \cos 40°$.
c) Como $250° = 70° + 180°$, se tiene que $\tan 250° = \tan(70°)$.

Problemas

Representa cada razón trigonométrica en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

a) sen 100° b) sen 215° c) cos 160°

d) cos 195° e) tan 205° f) tan 290°

1.3 Ángulo adición*

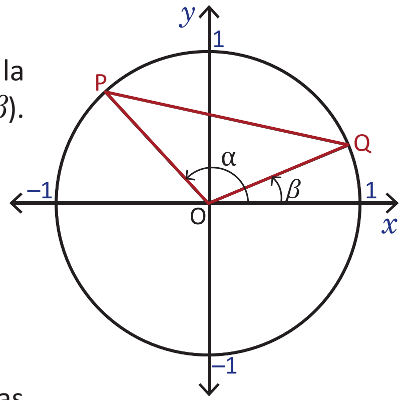
Problema inicial

Demuestra que

a) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

b) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$

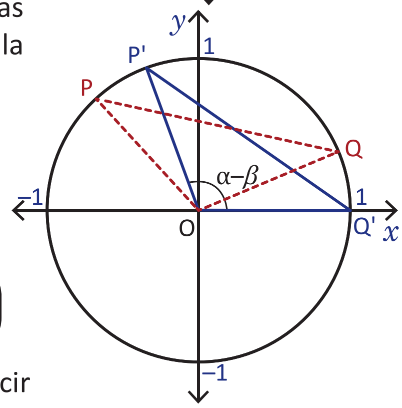
Solución



a) Se dibuja una circunferencia de radio 1 y el triángulo OPQ como muestra la figura. Las coordenadas de P son $(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$ y las de Q son $(\cos\beta, \text{sen}\,\beta)$. El cuadrado de la distancia de P a Q es

$$\begin{aligned}(PQ)^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta)^2\\ &= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \text{sen}^2\alpha - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \text{sen}^2\beta\\ &= (\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) + (\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\\ &= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta.\end{aligned}$$

Si se rota el triángulo OPQ un ángulo $-\beta$ respecto al origen, las coordenadas de P y Q rotados son $P'(\cos(\alpha - \beta), \text{sen}(\alpha - \beta))$ y $Q'(1, 0)$. El cuadrado de la distancia de P' a Q' es



$$\begin{aligned}(P'Q')^2 &= (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\text{sen}(\alpha - \beta) - 0)^2\\ &= \cos^2(\alpha - \beta) - 2(1)\cos(\alpha - \beta) + 1 + \text{sen}^2(\alpha - \beta)\\ &= [\cos^2(\alpha - \beta) + \text{sen}^2(\alpha - \beta)] - 2\cos(\alpha - \beta) + 1\\ &= 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1\\ &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta).\end{aligned}$$

Por la identidad pitagórica, se sabe que $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, para cualquier θ.

Pero una rotación conserva distancias, por lo que $d(P, Q) = d(P', Q')$, es decir

$$(d(P, Q))^2 = (d(P', Q'))^2$$

$\Rightarrow\quad 2 - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow\quad -2(\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \cos\alpha\cos\beta) = -2\cos(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow\quad \cos(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \cos\alpha\cos\beta.$

b) Para demostrar esta parte, como $\text{sen}\,\theta = \cos(90° - \theta)$ y $\cos\theta = \text{sen}(90° - \theta)$, entonces

$$\begin{aligned}\text{sen}(\alpha + \beta) &= \cos(90° - (\alpha + \beta))\\ &= \cos((90° - \alpha) - \beta)\\ &= \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \text{sen}(90° - \alpha)\text{sen}\,\beta\\ &= \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta.\end{aligned}$$

Teorema de la adición

Se satisfacen las siguientes identidades del ángulo adición:

a) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$

b) $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$

c) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

d) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

Además, se satisfacen las siguientes identidades de la tangente:

e) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

f) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Las identidades b, c, e y f se dejan como ejercicio.

Problemas

Demuestra los literales b, c, e y f del teorema de la adición.

Observa que $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. Para las identidades b) y c) utiliza a) y b) de la clase 1.1.

Unidad 6

1.4 Valores exactos de las razones trigonométricas, parte 1

Problema inicial

Calcula el valor exacto de sen 75°, cos 75° y tan 75° utilizando el hecho que 75° = 45° + 30°.

Solución

Como 75° = 45° + 30°, entonces

$$\begin{aligned}\text{sen } 75° = \text{sen}(45° + 30°) &= \text{sen } 45° \cos 30° + \cos 45° \text{ sen } 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Puedes utilizar la tabla de la clase 2.6 de la Unidad 5.

Para calcular cos 75° se hace de la misma manera,

$$\begin{aligned}\cos 75° = \cos(45° + 30°) &= \cos 45° \cos 30° - \text{sen } 45° \text{ sen } 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Para calcular tan 75° se utiliza el hecho que tan 75° = $\frac{\text{sen}(75°)}{\cos(75°)}$, por lo que

$$\tan 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \div \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Conclusión

Se pueden utilizar las identidades del ángulo adición para calcular valores exactos de razones trigonométricas de ángulos no conocidos.

Problemas

1. Utilizando las identidades del ángulo adición, calcula el valor exacto del seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos utilizando los ángulos especiales.

   a) 15° b) 105°

   c) 165° d) 195°

Los ángulos especiales son aquellos para los cuales las razones trigonométricas son conocidas (0°, 30°, 45°, 60°, 90° y 180°). Los ángulos 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315° y 330° también son especiales pero pueden calcularse con los primeros valores mencionados.

2. Utilizando las identidades del ángulo adición demuestra que

   a) $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$ b) $\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen }\theta$

   c) $\cos(270° + \theta) = \text{sen }\theta$ d) $\text{sen}(270° + \theta) = -\cos\theta$

   e) $\cos(45° - \theta) = \text{sen}(45° + \theta)$ f) $\tan(45° + \theta) = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

   g) $\text{sen}(360° + \theta) = \text{sen }\theta$ h) $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$

1.5 Ángulo doble

Problema inicial

Demuestra que

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$ b) $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen } \theta \cos \theta$

Solución

a) Se utiliza la fórmula del ángulo adición del coseno:

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \text{sen } \theta \text{ sen } \theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta. \quad (1)$$

De la identidad pitagórica $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se deduce que $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$, sustituyendo en (1) se tiene:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta.$$

Si de la identidad pitagórica despejamos $\text{sen}^2\theta$ se tiene que $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Sustituyendo en (1) se tiene:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - 1.$$

b) Se utiliza la fórmula del ángulo adición del seno:

$$\text{sen } 2\theta = \text{sen}(\theta + \theta) = \text{sen } \theta \cos \theta + \cos \theta \text{ sen } \theta = \text{sen } \theta \cos \theta + \text{sen } \theta \cos \theta = 2\text{sen } \theta \cos \theta.$$

Teorema del ángulo doble

Para cualquier ángulo θ se satisfacen las identidades del ángulo doble

a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$ b) $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen } \theta \cos \theta$

Además, para la tangente se tiene la siguiente identidad

c) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

Ejemplo 1

Si $90° < \theta < 180°$ y $\text{sen } \theta = \frac{3}{5}$, ¿cuál es el valor de $\text{sen } 2\theta$ y $\cos 2\theta$?

Si se observa la fórmula del ángulo doble del seno y coseno se necesita calcular $\cos \theta$. Como θ está entre 90° y 180°, $\cos \theta$ es negativo. De la identidad pitagórica,

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = -\frac{4}{5}.$$

Luego, $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen } \theta \cos \theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$.

Ejemplo 2

Si $\cos \theta = \frac{1}{4}$, ¿cuál es el valor de $\cos 2\theta$?

Como se conoce el valor de $\cos \theta$ se utiliza la identidad $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{1}{16}\right) - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}.$$

Problemas

1. Si $0° < \theta < 90°$ y $\cos \theta = \frac{7}{9}$, ¿cuál es el valor de $\text{sen } 2\theta$ y $\cos 2\theta$?
2. Si $\text{sen } \theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ determina el valor de $\cos 2\theta$.
3. Determina los valores de $\text{sen } 2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$ si $\tan \theta = \frac{12}{5}$ y θ está en el tercer cuadrante.
4. Demuestra que $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$.

1.6 Ángulo medio

Problema inicial

Demuestra que

a) $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$ b) $\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$

Solución

a) Del teorema del ángulo doble se sabe que

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Si en esta expresión se hace $\alpha = \frac{\theta}{2}$ se obtendría

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad \text{despejando } \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

b) De igual forma que en a), del teorema del ángulo doble se tiene que

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha.$$

Haciendo $\alpha = \frac{\theta}{2}$ se obtiene

$$\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = 1 - 2\text{sen}^2\frac{\theta}{2},$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} \qquad \text{despejando } \text{sen}^2\frac{\theta}{2}.$$

Teorema del ángulo medio

Para cualquier ángulo θ se cumple que

a) $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$ b) $\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$

Además, para la tangente se cumple la identidad

c) $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

Problemas

1. Demuestra el literal c) del teorema del ángulo medio.

2. Utilizando el resultado del Problema 1 demuestra que $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$.

Para el Problema 2, utiliza la relación de $\tan\frac{\theta}{2}$ con $\text{sen}\frac{\theta}{2}$ y $\cos\frac{\theta}{2}$ y la identidad del ángulo doble del seno. Multiplica por un 1 conveniente.

3. Si se multiplica $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ por $\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$ se llega a que $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\frac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$. Esta última difiere del resultado del Problema 2 en el hecho que hay que elegir el signo + o –. Justifica por qué se elige solo el signo +.

1.7 Valores exactos de las razones trigonométricas, parte 2

Problema inicial

1. Calcula los valores exactos de sen 22.5°, cos 22.5° y tan 22.5°.
2. Si $\cos\theta = \frac{3}{5}$, con θ en el cuarto cuadrante, determina el valor de $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$.

Solución

1. Observar que $22.5° = \frac{45°}{2}$. Además, 22.5° está en el primer cuadrante por lo que sen 22.5°, cos 22.5° y tan 22.5° son positivos.

$$\operatorname{sen}^2 22.5° = \operatorname{sen}^2\frac{45°}{2} = \frac{1-\cos 45°}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} 22.5° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos^2 22.5° = \cos^2\frac{45°}{2} = \frac{1+\cos 45°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22.5° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 22.5° = \frac{\operatorname{sen} 22.5°}{\cos 22.5°} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \div \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

2. Como θ está en el cuarto cuadrante significa que $270° < \theta < 360°$, por lo que $135° < \frac{\theta}{2} < 180°$; es decir, $\frac{\theta}{2}$ está en el segundo cuadrante y por lo tanto $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ es positivo y $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$ son negativos. Así,

$$\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{3}{5}}{2} = \frac{2}{5\times 2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{\cancel{8}}{5\times\cancel{2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \div \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{2\cancel{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusión

Se pueden utilizar las fórmulas del ángulo medio para calcular valores exactos de razones trigonométricas.

Problemas

1. Utilizando las identidades del ángulo medio calcula las razones trigonométricas de cada ángulo.

a) 67.5° b) 105° c) 112.5° d) 165°

2. Para cada valor de $\cos\theta$ determina $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$.

a) $\cos\theta = \frac{3}{4}$, $0° < \theta < 90°$
b) $\cos\theta = -\frac{5}{12}$, $90° < \theta < 180°$
c) $\cos\theta = -\frac{1}{9}$, $180° < \theta < 270°$
d) $\cos\theta = \frac{1}{8}$, $270° < \theta < 360°$

3. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ y $180° < \theta < 270°$ determina el valor de $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ y $\tan\frac{\theta}{2}$.

Unidad 6

1.8 Practica lo aprendido

1. Escribe cada razón trigonométrica en términos de un ángulo θ tal que $0° \leq \theta < 90°$.

a) $\text{sen}(-45°)$ b) $\text{sen } 210°$ c) $\text{sen } 350°$
d) $\cos(-130°)$ e) $\cos(-80°)$ f) $\tan 135°$

2. Demuestra que:

a) $\sec(-\theta) = \sec$
b) $\csc(-\theta) = -\csc \theta$
c) $\cot(-\theta) = -\cot \theta$
d) $\sec(90° - \theta) = \csc \theta$
e) $\csc(90° - \theta) = \sec \theta$
f) $\tan(\theta + 45°) \tan(45° - \theta) = 1$

3. Verifica que $\cot 75° = 2 - \sqrt{3}$.

4. Demuestra que:

a) $\tan(\theta + 180°) = \tan \theta$
b) $\tan(\theta - 180°) = \tan \theta$

5. Demuestra que $\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen } \alpha \cos \beta$.

6. Determina $\text{sen } 2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$ en cada caso.

a) $\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ y $0° < \theta < 90°$
b) $\text{sen } \theta = -\frac{1}{3}$ y $180° < \theta < 270°$
c) $\sec \theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y $270° < \theta < 360°$
d) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $90° < \theta < 180°$

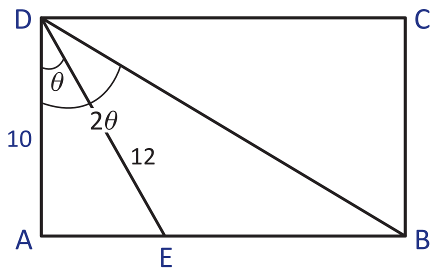
7. Calcula el valor exacto de $\cos 480°$ y $\text{sen } 480°$.

8. Para cada valor de $\text{sen } \theta$ determina $\text{sen } \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ y $\tan \frac{\theta}{2}$.

a) $\text{sen } \theta = -\frac{4}{5}$ y $180° < \theta < 270°$
b) $\text{sen } \theta = \frac{5}{12}$ y $90° < \theta < 180°$

9. En la figura, ABCD es un rectángulo, donde AD = 10, DE = 12 y ∢BDA = 2∢EDA.

a) Determina el valor de $\cos \theta$.
b) Determina el valor de $\cos 2\theta$.
c) Calcula la medida de BD.



2.1 Ecuaciones trigonométricas, parte 1*

Problema inicial

Resuelve $\tan^2\theta = 1$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Para resolver $\tan^2\theta = 1$. Como está elevado al cuadrado, se saca la raíz cuadrada a ambos lados y se tiene que $\tan\theta = \pm 1$. Esto significa que $\tan\theta = 1$ o bien $\tan\theta = -1$. Así,

> Si $\tan\theta$ es positivo entonces el ángulo está en el primer o tercer cuadrante. Si $\tan\theta$ es negativo entonces el ángulo está en el segundo o cuarto cuadrante.

- $\tan\theta = 1$ cuando $\theta = 45°$ o $\theta = 180° + 45° = 225°$.
- $\tan\theta = -1$ cuando $\theta = 180° - 45° = 135°$ o $\theta = 360° - 45° = 315°$.

Por lo tanto, las soluciones de $\tan^2\theta = 1$ son $\theta = 45°, 135°, 225°, 315°$ cuando θ está entre 0° y 360°.

Definición

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación donde la incógnita aparece como argumento de una razón trigonométrica.

Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar todas las soluciones que satisfacen la igualdad.

El número de soluciones de una ecuación trigonométrica depende de los valores en los que se limita la incógnita; por ejemplo, la ecuación $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$ para $0° \leq \theta < 180°$ no tiene solución ya que $\text{sen}\,\theta$ es positivo para ángulos que están entre 0° y 180°.

Ejemplo

Resuelve $2\cos\theta - 6 = -4$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Para resolver se despeja $\cos\theta$ y se obtiene

$$\begin{aligned} & 2\cos\theta - 6 = -4 \\ \Rightarrow\quad & 2\cos\theta = -4 + 6 \\ \Rightarrow\quad & 2\cos\theta = 2 \\ \Rightarrow\quad & \cos\theta = 1 \end{aligned}$$

Como $\cos\theta$ es igual a 1 cuando $\theta = 0°$ se tiene que la solución de la ecuación $2\cos\theta - 6 = -4$ es $\theta = 0°$ cuando θ está entre 0° y 360°.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\text{sen}^2\theta = \frac{1}{4}$

b) $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$

c) $\tan^2\theta = 3$

d) $\text{sen}^2\theta = \frac{3}{4}$

e) $2\text{sen}\,\theta - \sqrt{3} = 0$

f) $2\cos\theta + 3 = 4$

g) $4\text{sen}\,\theta + 5 = 7$

h) $7\tan\theta = 2\sqrt{3} + \tan\theta$

Unidad 6

2.2 Ecuaciones trigonométricas, parte 2 (uso de la identidad pitagórica)

Problema inicial

Resuelve $2\cos^2\theta - \text{sen }\theta - 1 = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Se reescribe la ecuación de modo que aparezca únicamente sen θ y para ello se utiliza la identidad pitagórica.

$$\begin{aligned} & 2\cos^2\theta - \text{sen }\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2(1 - \text{sen}^2\theta) - \text{sen }\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2 - 2\text{sen}^2\theta - \text{sen }\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & -2\text{sen}^2\theta - \text{sen }\theta + 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\text{sen}^2\theta + \text{sen }\theta - 1 = 0 \end{aligned}$$

De la identidad pitagórica $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ puede obtenerse que $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$ o bien $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

Si se hace el cambio de variable $y = \text{sen }\theta$, la ecuación se transforma en $2y^2 + y - 1 = 0$.

Al factorizar el polinomio con el método de las tijeras se obtiene que $2y^2 + y - 1 = (2y - 1)(y + 1) = 0$. Pero $y = \text{sen }\theta$ por lo que se tienen dos ecuaciones trigonométricas:

- $2\text{sen }\theta - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen }\theta = \frac{1}{2}$ y esto sucede cuando $\theta = 30°$ o $\theta = 180° - 30° = 150°$.
- $\text{sen }\theta + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen }\theta = -1$ y esto sucede cuando $\theta = 270°$.

También puede utilizarse la fórmula general para resolver $2y^2 + y - 1 = 0$.

Por lo tanto, las soluciones de $2\cos^2\theta - \text{sen }\theta - 1 = 0$ son $\theta = 30°, 150°, 270°$ cuando $0° \leq \theta < 360°$.

Conclusión

Algunas ecuaciones trigonométricas pueden transformarse en una ecuación cuadrática utilizando la identidad pitagórica, de modo que aparezca solo la razón seno o coseno.

Ejemplo

Resuelve $2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Se reescribe la ecuación de modo que aparezca únicamente cos θ y para ello se utiliza la identidad pitagórica.

$$\begin{aligned} & 2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \\ \Rightarrow\ & -2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0 \end{aligned}$$

Se factoriza $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1$ por el método de la tijera

$$\begin{array}{ccc} 2\cos\theta & -1 & -\cos\theta \\ \cos\theta & -1 & -2\cos\theta \\ \hline 2\cos^2\theta & 1 & -3\cos\theta \end{array}$$

Al considerar la ecuación con incógnita cos θ se tiene que $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$.

Así, $2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$, es decir, $\theta = 60°$ o $\theta = 360° - 60° = 300°$.

O bien $\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$, es decir, $\theta = 0°$.

Por lo tanto, las soluciones de $2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ tal que $0° \leq \theta < 360°$ son $\theta = 0°, 60°, 300°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $2\cos^2\theta + \text{sen }\theta - 1 = 0$

b) $-3\text{sen }\theta + \cos^2\theta = 3$

c) $4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\text{sen }\theta - 7 = 0$

d) $2\text{sen}^2\theta - 3 = \cos\theta - 2$

Recuerda que
$-1 \leq \text{sen }\theta \leq 1$ y
$-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

2.3 Ecuaciones trigonométricas, parte 3 (uso del ángulo doble del coseno)

Problema inicial

Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos 2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Recuerda que
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\theta$.

Utilizando la identidad del ángulo doble del coseno,

$$\begin{aligned} & \cos 2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0 \\ \Rightarrow\quad & (2\cos^2\theta - 1) - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 = 0 \\ \Rightarrow\quad & 2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \end{aligned}$$

Puede utilizarse la fórmula general para resolver esta ecuación, pero también puede utilizarse el método de la tijera observando que

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{2}\cos\theta & -1 & -\sqrt{2}\cos\theta \\ \downarrow & \downarrow & \\ \sqrt{2}\cos\theta & -1 & -\sqrt{2}\cos\theta \\ \hline 2\cos^2\theta & 1 & -2\sqrt{2}\cos\theta \end{array}$$

Es decir, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)(\sqrt{2}\cos\theta - 1) = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2$. De aquí se tiene que

$$\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ahora, se sabe que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cuando θ toma el valor de 45° y de 315°. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación original son $\theta = 45°, 315°$ cuando θ está entre 0° y 360°.

Conclusión

Cuando en una ecuación trigonométrica aparece un término $\cos 2\theta$, esta debe transformarse a una ecuación donde resulten solo términos con ángulo θ utilizando la identidad del ángulo doble del coseno, de modo que aparezca una misma razón. Normalmente, para resolverlas, se debe factorizar y luego igualar a cero los dos factores que se obtengan, teniéndose dos ecuaciones trigonométricas las cuales hay que resolver.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\cos 2\theta + 6\text{sen}^2\theta - 1 + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Sustituyendo la identidad $\cos 2\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta$ se obtiene $4\text{sen}^2\theta + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$

Como en el Problema inicial, esta ecuación puede resolverse con la fórmula general, pero puede notarse que

$$\begin{array}{ccc} 2\text{sen}\,\theta & \sqrt{2} & 2\sqrt{2}\text{sen}\,\theta \\ \downarrow & \downarrow & \\ 2\text{sen}\,\theta & -1 & -2\text{sen}\,\theta \\ \hline 4\text{sen}^2\theta & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\text{sen}\,\theta - 2\text{sen}\,\theta \end{array}$$

Por lo que $4\text{sen}^2\theta + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\theta - \sqrt{2} = (2\text{sen}\,\theta + \sqrt{2})(2\text{sen}\,\theta - 1) = 0$. Entonces, $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ cuando θ toma los valores de 225° y 315°, o bien $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$ cuando θ toma los valores de 30° y 150°. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\cos 2\theta + 6\text{sen}^2\theta - 1 + (2\sqrt{2} - 2)\text{sen}\,\theta - \sqrt{2} = 0$ son $\theta = 30°$, 150°, 225°, 315°.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$

b) $\cos 2\theta + 3\text{sen}\,\theta - 2 = 0$

c) $\cos 2\theta + \text{sen}\,\theta = 0$

d) $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$

e) $\cos 2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 2 = 0$

2.4 Ecuaciones trigonométricas, parte 4 (uso del ángulo doble del seno)

Problema inicial

Resuelve la ecuación trigonométrica sen 2θ + cos θ = 0 para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Utilizando la identidad del ángulo doble para el seno, se tiene

$$\begin{aligned} & \text{sen}\,2\theta + \cos\theta = 0 & \\ \Rightarrow\quad & 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta = 0 & \text{aplicando la identidad del ángulo doble,} \\ \Rightarrow\quad & \cos\theta(2\,\text{sen}\,\theta + 1) = 0 & \text{factorizando,} \\ \Rightarrow\quad & \cos\theta = 0 \text{ o bien } 2\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0. & \end{aligned}$$

- Si $\cos\theta = 0$ entonces $\theta = 90°$ o $\theta = 270°$.
- Si $2\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\,\theta = -1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$. Luego, $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$ cuando $\theta = 180° + 30° = 210°$ o cuando $\theta = 360° - 30° = 330°$.

Luego, las soluciones de sen 2θ + cos θ = 0 tal que $0° \leq \theta < 360°$ son $\theta = 90°, 210°, 270°, 330°$.

Conclusión

Cuando en una ecuación trigonométrica aparece un término sen 2θ se utiliza la identidad del ángulo doble del seno, sen 2θ = 2 cos θ sen θ, para transformarla a una ecuación donde aparezcan solo términos con ángulo θ. Normalmente, para resolverlas se factoriza, obteniendo dos valores trigonométricos para los cuales hay que determinar el ángulo que las satisface.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\text{sen}\,2\theta + 2\,\text{sen}\,\theta = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Al utilizar la identidad del ángulo doble del seno, se tiene,

$$\begin{aligned} & \text{sen}\,2\theta + 2\,\text{sen}\,\theta = 0 \\ \Rightarrow\quad & 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 2\,\text{sen}\,\theta = 0 \\ \Rightarrow\quad & 2\,\text{sen}\,\theta(\cos\theta + 1) = 0 \end{aligned}$$

De aquí se tiene que $\text{sen}\,\theta = 0$ o bien $\cos\theta + 1 = 0$.

- Si $\text{sen}\,\theta = 0$ entonces θ debe ser 0° o 180°.
- Si $\cos\theta + 1 = 0$ entonces $\cos\theta = -1$, por lo que $\theta = 180°$.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\text{sen}\,2\theta + 2\,\text{sen}\,\theta = 0$ son $\theta = 0°, 180°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) sen 2θ + sen θ = 0

b) sen $2\theta - \sqrt{3}$sen θ = 0

c) sen 2θ = sen θ

d) sen $2\theta + \sqrt{2}$cos θ = 0

e) sen 2θ – cos θ = 0

f) sen 2θ + 2sen θ = 0

2.5 Ecuaciones trigonométricas, parte 5*

Problema inicial

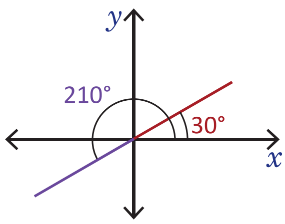
Resuelve la ecuación $\tan 2\theta = \cot\theta$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Solución

Se aplica la identidad del ángulo doble de tangente y además se utiliza el hecho de que $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$.

$$\begin{aligned}
\tan 2\theta = \cot\theta \quad &\Rightarrow \quad \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{\tan\theta}\\
&\Rightarrow \quad (2\tan\theta)(\tan\theta) = 1-\tan^2\theta\\
&\Rightarrow \quad 2\tan^2\theta = 1-\tan^2\theta\\
&\Rightarrow \quad 3\tan^2\theta = 1 \;\Rightarrow\; \tan^2\theta = \frac{1}{3}\\
&\Rightarrow \quad \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Luego, se tienen dos casos: cuando $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y cuando $\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Así,



- Si $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ entonces $\theta = 30°$ o $\theta = 180° + 30° = 210°$.
- Si $\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ entonces $\theta = 180° - 30° = 150°$ o $\theta = 360° - 30° = 330°$.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación trigonométrica $\tan 2\theta = \cot\theta$ tal que $0° \leq \theta < 360°$ son $\theta = 30°, 150°, 210°, 330°$.

Conclusión

Cuando en una ecuación trigonométrica aparecen las razones secante, cosecante y cotangente se utilizan las relaciones entre estas y las razones coseno, seno y tangente para transformar la ecuación a una donde aparezcan únicamente estas últimas razones.

Ejemplo

Resuelve $\sec\theta\csc\theta - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0$ para $0° \leq \theta < 360°$.

Puede observarse que hay un factor común $\sec\theta$, por lo que se puede resolver por factorización.

$$\sec\theta\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sec\theta\left(\csc\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

De aquí se tiene que, $\sec\theta = 0$ o bien $\csc\theta - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 0$. Así,

- $\sec\theta = 0$ significa que $\dfrac{1}{\cos\theta} = 0$. Pero esto no es posible, ya que una fracción puede ser cero solo cuando el numerador es cero. Por lo que esta ecuación no tiene solución.
- O bien, $\csc\theta - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 0$, es decir $\csc\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Pero $\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
  Esto sucede cuando θ toma los valores de 60° y 120°.

Por lo tanto, las soluciones de $\sec\theta\csc\theta - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sec\theta = 0$ son $\theta = 60°, 120°$ cuando $0° \leq \theta < 360°$.

Problemas

Resuelve las ecuaciones para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $2\sec\theta + 3 = \sec\theta + 5$

b) $\sec\theta\csc\theta + \sqrt{2}\csc\theta = 0$

c) $2\operatorname{sen}\theta + 1 = \csc\theta$

d) $3\csc\theta + 5 = \csc\theta + 9$

e) $4(\cot\theta + 1) = 2(\cot\theta + 2)$

$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

f) $\sec\theta + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Unidad 6

2.6 Practica lo aprendido

Resuelve cada ecuación para $0° \leq \theta < 360°$.

a) $5(\cos\theta + 1) = 5$

b) $4\text{sen}\,\theta - 1 = 2\text{sen}\,\theta + 1$

c) $3(\tan\theta - 2) = 2\tan\theta - 7$

d) $3\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

e) $\tan^2\theta - 3 = 0$

f) $\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta = 1$

g) $1 + \text{sen}\,\theta - \cos^2\theta = 0$

h) $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta = 0$

i) $\cos 2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$

j) $3\cos 2\theta - 4\cos^2\theta + 2 = 0$

k) $\text{sen}\,2\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$

l) $\text{sen}\,2\theta = \tan\theta$

m) $2\tan\theta = 1 + \tan^2\theta$

n) $\tan\theta - 3\cot\theta = 0$

2.7 Problemas de la unidad

Para el Problema 1, calcula el valor de $\text{sen}(\alpha + \beta)$ y utiliza la identidad del ángulo adición.

1. Si $0° < \alpha < 90°$, $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5}$, determina los valores de $\text{sen}\,\beta$, $\cos\beta$ y $\tan\beta$.

2. Si $0° \leq \theta < 360°$, resuelve cada ecuación.
   a) $\text{sen}\,2\theta - 3\cos\theta = 0$
   b) $\cos 2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$

3. Si $A + B + C = 180°$, demuestra que $\text{sen}(B + C) = \text{sen}\,A$.

4. Si $\tan 35° = x$, deduce que

$$\frac{\tan 145° - \tan 125°}{1 + \tan 145° \tan 215°} = \frac{1}{x}.$$

5. El ángulo θ cumple que $\text{sen}(\theta + 30°) = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$ y $\text{sen}(\theta - 30°) = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$. Determina los valores de $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$.