Unidad 7

Vectores y números complejos

La noción de vector surge en la matemática como una exigencia de la física, ya que hacia el siglo XVII era necesaria la cuantificación de fenómenos dinámicos, es decir, dotar al movimiento de una representación matemática. Hacia estas fechas se había tenido un avance bastante marcado en el álgebra abstracta, a modo de lograr separarse de los valores de los sistemas numéricos comunes y conseguir resultados algebraicos en cualquier campo numérico que cumpla ciertas propiedades, así mismo la concepción de un número complejo, cuya estructura hasta ese entonces era meramente algebraica. Después que se logra el establecimiento teórico de los números reales por el matemático alemán Dedekind y el ruso Cantor a principios del siglo XIX, se avanza en la representación geométrica del conjunto de los números complejos, como segmento dirigido o como un par ordenado en el plano complejo, por el matemático irlandés Hamilton en 1843. A partir de este contexto se construye el área matemática del análisis vectorial.

Uso de la proyección estereográfica (análisis vectorial) para la elaboración de mapas.

El análisis vectorial dotó a la física de una herramienta fundamental para la modelación de fenómenos como el movimiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, la carga eléctrica, los campos eléctricos, el calor, etc. Además que la propia área del análisis vectorial ha tenido diversas aplicaciones en los últimos siglos, como la elaboración de mapas (cartografía), modelación del universo, trayectorias espaciales, ubicación de satélites en el espacio, entre otros.

En esta unidad aprenderás los conceptos y nociones básicas sobre vectores, las operaciones que se pueden realizar con ellos, la importancia del concepto de producto escalar, y la relación del concepto de vectores con la representación gráfica de un número complejo, y se culmina con algunas prácticas en GeoGebra para consolidar lo aprendido.

1.1 Vectores

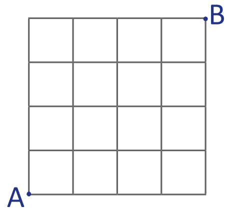
Problema inicial

Una persona se encuentra en un punto A dentro de la ciudad de San Salvador y desea dirigirse hacia el punto B. Determina:

a) Al menos 3 formas para llegar de A a B.

b) El camino más corto para llegar de A hasta B.

c) Una forma para representar que el camino va de A a B y no de B a A.

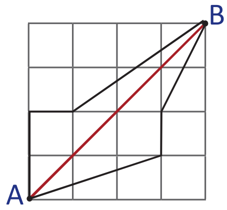


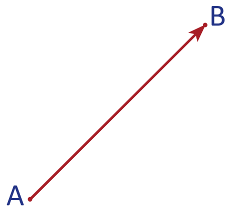
Solución

a) Algunas opciones para llegar de A a B se muestran en la figura de la derecha.

b) El camino más corto para llegar de A a B es el que está en color rojo.

c) Para representar que este camino va de A hacia B se puede utilizar una flecha que lo indique como lo muestra la figura.

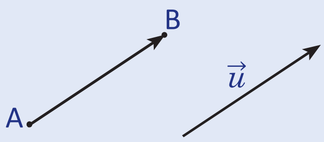




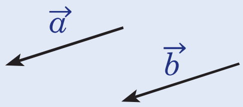
Definición

La flecha cuyo **punto inicial** es A y su **punto final** es B se conoce como **segmento dirigido**.

El conjunto de segmentos dirigidos que poseen la misma longitud, dirección (inclinación) y sentido (hacia donde apunta la flecha) se conoce como **vector**. Se representa un vector con cualquier segmento dirigido que pertenece a ese vector, si este segmento dirigido tiene su punto inicial A y su punto final B, se denota este vector por $\overrightarrow{AB}$; si no se expresan los vectores con sus puntos inicial y final se pueden usar las letras minúsculas a, b, c, ... por ejemplo, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

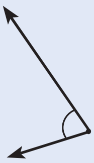


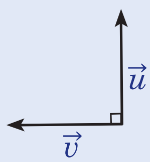
Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son iguales si los segmentos dirigidos que los representan tienen la misma longitud, dirección y sentido, es decir, uno se obtiene del otro por medio de un desplazamiento paralelo.



La longitud de un vector $\vec{u}$ se conoce por **norma** del vector $\vec{u}$, y se denota por $\|\vec{u}\|$. Un vector $\vec{u}$ es **unitario** si su norma es 1, es decir, $\|\vec{u}\| = 1$.

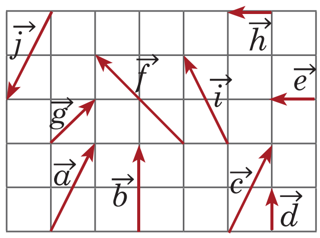
El **ángulo entre dos vectores** se mide al unir por los puntos iniciales ambos vectores y se utilizan valores de 0° hasta 180°. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales** si el ángulo formado entre ellos es de 90°.



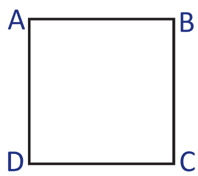


Problemas

1. Considerando los vectores en la cuadrícula donde el lado de cada cuadrado es 1, responde:
   a) ¿Cuáles vectores son iguales?
   b) ¿Cuáles vectores tienen la misma norma?
   c) ¿Cuáles vectores son unitarios?
   d) ¿Cuáles vectores son ortogonales?



2. Considerando el cuadrado ABCD de lado 1, determina:
   a) ¿Cuáles vectores son iguales?
   b) La norma del vector $\overrightarrow{AC}$.
   c) ¿Cuáles vectores son unitarios?
   d) ¿Cuáles vectores son ortogonales?



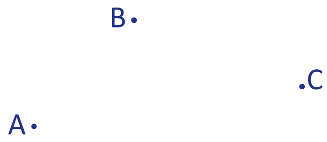
1.2 Suma y resta de vectores

Problema inicial

Resuelve los siguientes literales:

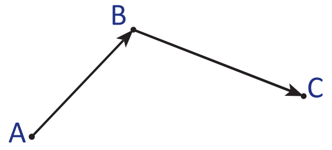
a) Representa con vectores la forma de ir de A hacia C pasando por B.

b) Representa con vectores la forma de ir de A hacia B pasando por C.

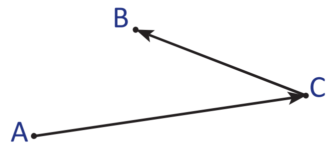


Solución

a) La representación sería:

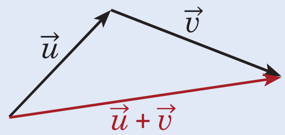


b) La representación sería:



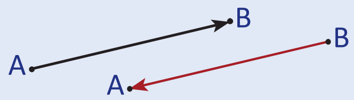
Definición

Al unir el punto final de un vector $\vec{u}$ con el punto inicial de otro vector $\vec{v}$, se define la operación **suma de vectores** como el vector determinado por el punto inicial de $\vec{u}$ con el punto final de $\vec{v}$, como lo muestra la figura. En el literal a) del Problema inicial se cumple que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

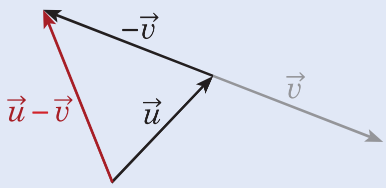


Dados 3 vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ se cumple que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (conmutatividad) y que $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (asociatividad).

Dado un vector $\overrightarrow{AB}$, se define el vector $\overrightarrow{BA}$ como **el opuesto** del vector $\overrightarrow{AB}$, y se denota por $-\overrightarrow{AB}$, es decir, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.



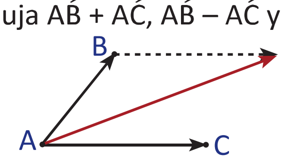
Se define la **resta** del vector $\vec{u}$ con el vector $\vec{v}$ como la suma del vector $\vec{u}$ con $-\vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ como lo muestra la figura. En el literal b) del Problema inicial se cumple que $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.



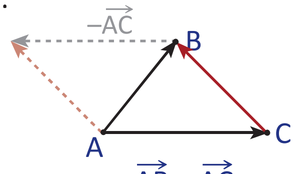
El vector que resulta de realizar la resta $\vec{u} - \vec{u} = \vec{u} + (-\vec{u})$ se conoce como **vector cero**, y se denota por $\vec{0}$ y cumple que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

Ejemplo

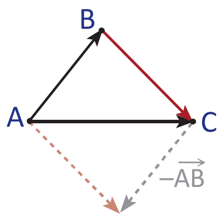
Dibuja $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Estas representaciones de vectores son muy importantes.

Problemas

Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa las operaciones de cada literal.

a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{a} + \vec{c}$

c) $\vec{c} + \vec{d}$

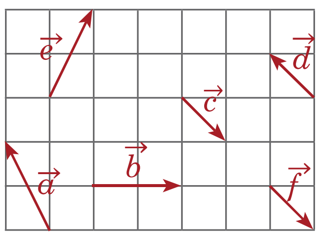
d) $\vec{a} + \vec{e} + \vec{c}$

e) $\vec{a} - \vec{b}$

f) $\vec{d} - \vec{f}$

g) $\vec{c} - \vec{f}$

h) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$



Unidad 7

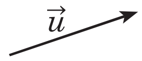
1.3 Producto por escalar

Problema inicial

Dibuja el vector que resulta en las siguientes sumas de vectores:

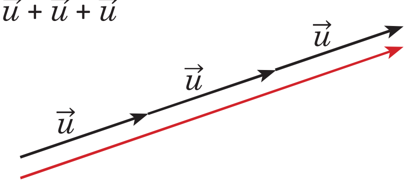
a) $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$

b) $-\vec{u} - \vec{u}$

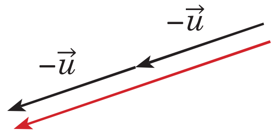


Solución

a) $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$



b) $-\vec{u} - \vec{u}$

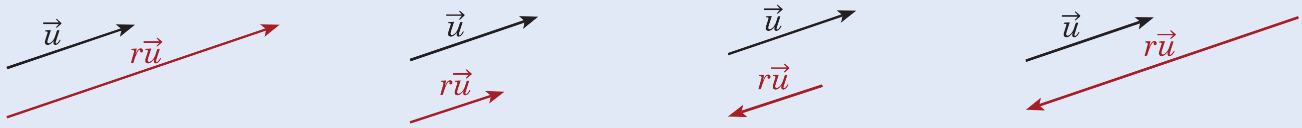


Definición

Para un vector $\vec{u}$ y un número real r, de modo que $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $r \neq 0$, se define el **producto por escalar** para representar dilataciones ($r > 1$) o contracciones ($0 < r < 1$) en el mismo sentido ($r > 0$) o en sentido contrario ($r < 0$), y se denota por $r\vec{u}$.

Para el producto por escalar se cumple que $\|r\vec{u}\| = |r|\,\|\vec{u}\|$. Se define que $0\vec{u} = \vec{0}$ y que $r\vec{0} = \vec{0}$.

$r > 1$ $\quad$ $0 < r < 1$ $\quad$ $-1 < r < 0$ $\quad$ $r < -1$



Considerando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, los números reales r y s, se cumplen las siguientes propiedades del producto por escalar:

1. $r(s\vec{u}) = rs\vec{u}$ $\quad$ 2. $(r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$ $\quad$ 3. $r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$

Se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diferentes de $\vec{0}$ son **paralelos** (o colineales) cuando los segmentos dirigidos que representan estos vectores, son paralelos. Esto equivale a que existe un número real r tal que $\vec{u} = r\vec{v}$.

Ejemplo

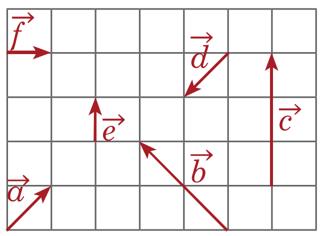
Determina en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector resultante de la expresión $2(2\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(2\vec{u} - \vec{v})$.

$$\begin{aligned} 2(2\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(2\vec{u} - \vec{v}) &= 2(2\vec{u}) + 2(3\vec{v}) + (-3)(2\vec{u}) + (-3)(-\vec{v}) \\ &= 4\vec{u} + 6\vec{v} + (-6\vec{u}) + 3\vec{v} \\ &= -2\vec{u} + 9\vec{v} \end{aligned}$$

Recuerda que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Problemas

1. Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa cada literal.



a) $4\vec{e}$ $\quad$ b) $4\vec{a}$ $\quad$ c) $\frac{1}{3}\vec{c}$

d) $-3\vec{f}$ $\quad$ e) $-\frac{3}{2}\vec{b}$ $\quad$ f) $2\vec{d} + 3\vec{e}$

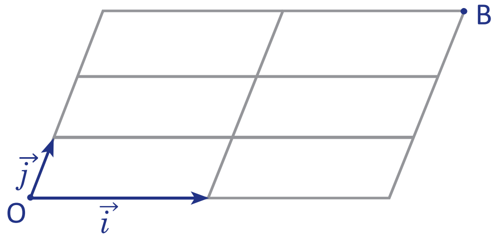
2. Determina en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector resultante de cada expresión.

a) $4\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{u} - 2\vec{v}$ $\quad$ b) $(\vec{u} - 2\vec{v}) - (-3\vec{u} + 2\vec{v})$ $\quad$ c) $3(2\vec{u} + 4\vec{v})$ $\quad$ d) $3(-2\vec{u} + \vec{v}) - 2(3\vec{u} - 4\vec{v})$

1.4 Coordenadas de un vector en una base*

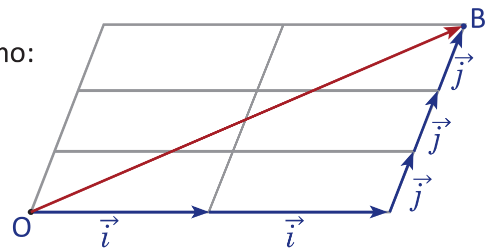
Problema inicial

La siguiente figura está formada por paralelogramos, expresa el vector $\overrightarrow{OB}$ con los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.



Solución

El vector $\overrightarrow{OB}$ se puede expresar como suma de vectores con $\vec{i}$ y $\vec{j}$ como:



$$\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{i} + \vec{j} + \vec{j} + \vec{j}\,.$$

Utilizando el producto por escalar, se cumple que $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

Conclusión

A una pareja de vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ ambos diferentes de $\vec{0}$ y no paralelos (no colineales) se les llama **base vectorial**.

El punto O se conoce como **origen** de la base vectorial, y para todo vector $\vec{u}$ se cumple que, existe un punto M tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Además para todo vector $\overrightarrow{OM}$, existen dos números reales únicos x, y, tales que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, y se puede expresar el vector como un par ordenado $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, a este par ordenado (x, y) se le conoce como **coordenadas** del vector $\overrightarrow{OM}$ en la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Una base es **ortogonal** cuando $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son ortogonales, y se dice que una base es **ortonormal** cuando además de ser ortogonales, tanto $\vec{i}$ como $\vec{j}$ son unitarios (la norma es igual a 1).

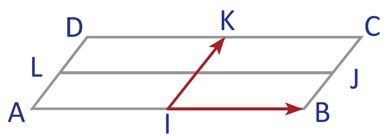
Ejemplo

Determina las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{ID}$ en la base $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IK})$.

$\overrightarrow{IC} = (1)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{IB} = (1)\overrightarrow{IB} + (0)\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IK} = (0)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{IJ} = (1)\overrightarrow{IB} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IA} = (-1)\overrightarrow{IB} + (0)\overrightarrow{IK}$ $\qquad$ $\overrightarrow{ID} = (-1)\overrightarrow{IB} + (1)\overrightarrow{IK}$

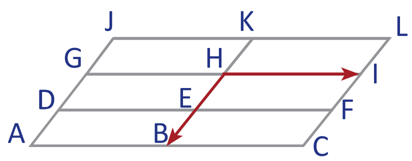


Por lo tanto, las coordenadas de los vectores son $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$.

Problemas

Considerando la base $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HB})$, determina las coordenadas de los vectores de cada literal.

a) $\overrightarrow{HA}$	b) $\overrightarrow{HK}$	c) $\overrightarrow{HF}$	d) $\overrightarrow{HJ}$
e) $\overrightarrow{HH}$	f) $\overrightarrow{HI}$	g) $\overrightarrow{HB}$	h) $\overrightarrow{HE}$



Unidad 7

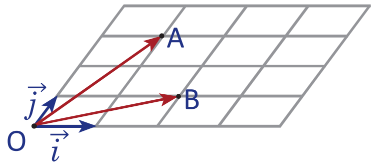
1.5 Operaciones con vectores en coordenadas

Problema inicial

Determina las coordenadas de los siguientes vectores en la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

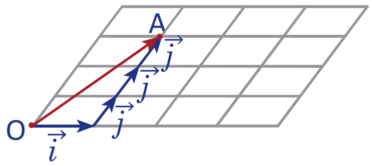
a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ e) $2\overrightarrow{OB}$ f) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$



Solución

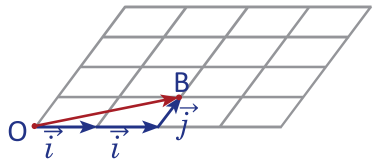
a)



$\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} = (1, 3)$

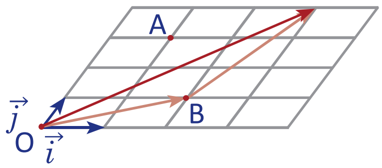
b)



$\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = (2, 1)$

c)



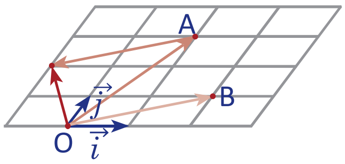
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (3, 4)$

Nota que $(3, 4) = (1 + 2, 3 + 1)$.

d)



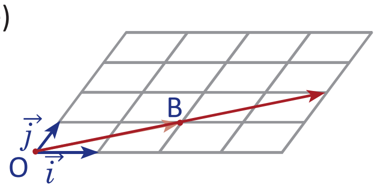
$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 3\vec{j} - (2\vec{i} + \vec{j})$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-1, 2)$

Nota que $(-1, 2) = (1 - 2, 3 - 1)$.

e)



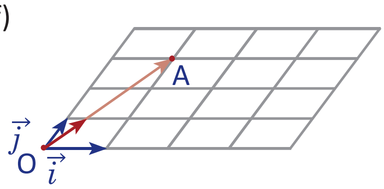
$2\overrightarrow{OB} = 2(2\vec{i} + \vec{j})$

$2\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

$2\overrightarrow{OB} = (4, 2)$

Nota que $(4, 2) = (2 \times 2, 2 \times 1)$.

f)



$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}(\vec{i} + 3\vec{j})$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{i} + \vec{j}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

Nota que $\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \left(\frac{1}{3} \times 1, \frac{1}{3} \times 3\right)$.

Conclusión

Dado dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con coordenadas $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$ y un número real r se cumple que

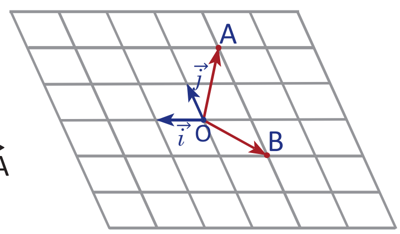
$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y') \qquad \vec{u} - \vec{v} = (x - x', y - y') \qquad r\vec{u} = (rx, ry)$$

Problemas

Determina las coordenadas de los siguientes vectores en la base $\vec{i}, \vec{j}$.

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

e) $-3\overrightarrow{OB}$ f) $\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ g) $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ h) $3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}$



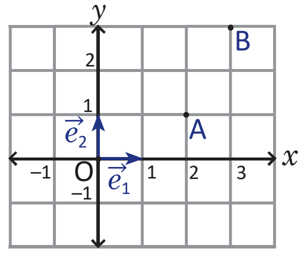
1.6 Vectores y coordenadas de puntos

Problema inicial

Sean A(2, 1) y B(3, 3) dos puntos en el plano, con coordenadas en la base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ que muestra la figura.

a) Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

b) Determina la norma del vector $\overrightarrow{AB}$.



Solución

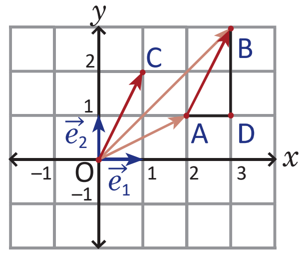
a) Considerando los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ con coordenadas (2, 1) y (3, 3) respectivamente en la base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Entonces se cumple que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3) - (2, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2) = \overrightarrow{OC}.$$



b) La norma de este vector se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras al ΔABD, de modo que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Conclusión

Considerando en el plano los puntos $E_1(1, 0)$ y $E_2(0, 1)$ que definen los vectores $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ y $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$. Se tiene que los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ forman una base ortonormal.

Dado un punto A(x, y) en el plano, se cumple que $\overrightarrow{OA} = (x, y)$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, y que $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si B(x', y') es otro punto, entonces se tiene que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x' - x, y' - y) \qquad \text{y que,}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

Problemas

1. Dados los puntos A y B, determina las coordenadas y la norma del vector $\overrightarrow{AB}$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ definida arriba.

a) A = (2, 1); B = (3, 1)

b) A = (3, 0); B = (1, 2)

c) A = (1, 1); B = (0, 2)

d) A = (0, 1); B = (–2, 1)

e) A = (–1, –3); B = (–1, –2)

f) A = (1, –1); B = (1, –1)

2. Considerando las coordenadas en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de un vector $\vec{u} = (2, 4)$ y un punto A = (1, 3), determina las coordenadas de un punto B que cumpla que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

1.7 Paralelismo

Problema inicial

Considerando el vector $\vec{u} = (2, 3)$, determina el valor de x para que el vector $\vec{v} = (x, -9)$ sea paralelo a $\vec{u}$ ($\vec{u} \parallel \vec{v}$).

Solución

Se considera un número real r que cumple:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= r\vec{u} \\ (x, -9) &= r(2, 3) \\ (x, -9) &= (2r, 3r) \end{aligned}$$

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diferentes de $\vec{0}$ son paralelos si existe un número real r que cumple $r\vec{u} = \vec{v}$.

Y entonces se debe cumplir que

$$\begin{cases} x = 2r \ldots (1) \\ -9 = 3r \ldots (2) \end{cases}$$

Luego se resuelve la ecuación (2), y se tiene: $r = (-9) \div 3 = -3$.

Finalmente se sustituye el valor de r en (1): $x = 2(-3) = -6$.

Por lo tanto las coordenadas del vector $\vec{v}$ son $(-6, -9)$.

Conclusión

Dado un vector $\vec{u} = (x, y) \neq \vec{0}$, se tiene que otro vector $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{u}$ si existe un número real r de modo que $\vec{v} = (rx, ry)$.

Además, en una base ortonormal, para la norma del vector $\vec{v}$ se cumple que

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = |r|\sqrt{x^2 + y^2} = |r|\,\|\vec{u}\|.$$

Un vector $u = (x, y)$ es distinto del vector cero si x o y son distintos de cero (ambos inclusive).

Para todo número real r se cumple que $\sqrt{r^2} = |r|$.

Ejemplo

Determina los vectores paralelos al vector $\vec{u} = (-3, 4)$ que tienen norma 15.

Si $\vec{v}$ es un vector paralelo a $\vec{u}$ se cumple que $\vec{v} = r\vec{u}$, entonces:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= |r|\,\|\vec{u}\| \\ 15 &= |r|\sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ 15 &= 5|r| \\ |r| &= 3 \\ r &= \pm 3, \end{aligned}$$

por lo tanto los vectores son: $3\vec{u} = 3(-3, 4) = (-9, 12)$ y $-3\vec{u} = -3(-3, 4) = (9, -12)$.

Problemas

1. Calcula las coordenadas de $\vec{v}$ para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

   a) $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (x, 3)$ b) $\vec{u} = (3, 1)$, $\vec{v} = (x, -3)$ c) $\vec{u} = (6, 3)$, $\vec{v} = (2, x)$ d) $\vec{u} = (2, 4)$, $\vec{v} = (-1, x)$

2. Determina los vectores paralelos al vector $\vec{u}$ que tienen la norma indicada. Considera las coordenadas en una base ortonormal.

   a) $\vec{u} = (4, 3)$, norma 10   b) $\vec{u} = (-3, -4)$, norma 1   c) $\vec{u} = (1, 2)$, norma 5   d) $\vec{u} = (2, 2)$, norma 4

3. Encuentra las coordenadas del punto C de un paralelogramo ABCD, si se cumple que A = (1, 2), B = (3, 5) y D = (0, 0).

1.8 Practica lo aprendido

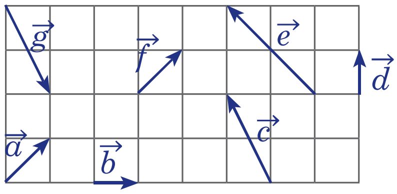
1. Considerando los vectores en la cuadrícula donde el lado de cada cuadrado es 1, responde:

   a) ¿Cuáles vectores son iguales?

   b) ¿Cuáles vectores tienen la misma norma?

   c) ¿Cuáles vectores son unitarios?

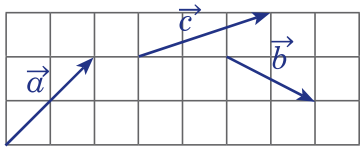
   d) ¿Cuáles vectores son ortogonales?



2. Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa la operación de cada literal.

   a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{c} - \vec{b}$

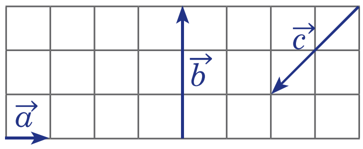
   c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ d) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$



3. Dibuja en tu cuaderno los vectores de la cuadrícula y determina el vector que representa cada literal.

   a) $4\vec{a}$ b) $\frac{1}{3}\vec{b}$

   c) $-\frac{3}{2}\vec{c}$ d) $-3\vec{a} + \vec{b}$

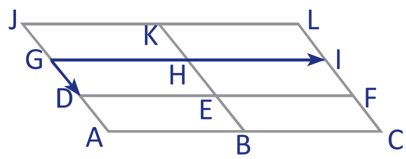


4. Determina en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector resultante de cada expresión.

   a) $2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{u} - \vec{v}$ b) $(3\vec{u} - \vec{v}) - (-2\vec{v} - 3\vec{u})$ c) $-2(3\vec{u} - 2\vec{v})$ d) $2(-\vec{u} + 3\vec{v}) - 3(\vec{u} + 2\vec{v})$

5. Considerando la base $(\overrightarrow{GI}, \overrightarrow{GD})$, determina las coordenadas de los vectores de cada literal.

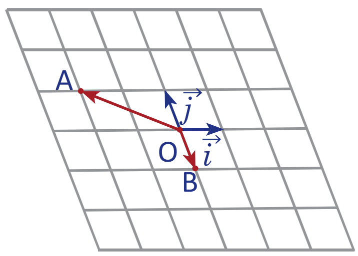
   a) $\overrightarrow{GC}$ b) $\overrightarrow{GL}$ c) $\overrightarrow{GB}$ d) $\overrightarrow{GK}$



6. Determina las coordenadas de los siguientes vectores en la base $\vec{i}$, $\vec{j}$.

   a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

   e) $-2\overrightarrow{OB}$ f) $\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$ g) $\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ h) $-2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$



7. Dados los puntos A y B, determina las coordenadas y la norma del vector $\overrightarrow{AB}$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

   a) A = (3, 1); B = (4, 2) b) A = (–2, 1); B = (–3, 2) c) A = (–1, –1); B = (–3, –2)

8. Considerando las coordenadas de un vector $\vec{u} = (-2, 1)$ y un vector $\overrightarrow{OA} = (3, 5)$. Determina las coordenadas de un vector $\overrightarrow{OB}$ que cumpla que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

9. Calcula las coordenadas de $\vec{v}$ para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

   a) $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (x, 12)$ b) $\vec{u} = (3, 9)$, $\vec{v} = (x, -6)$

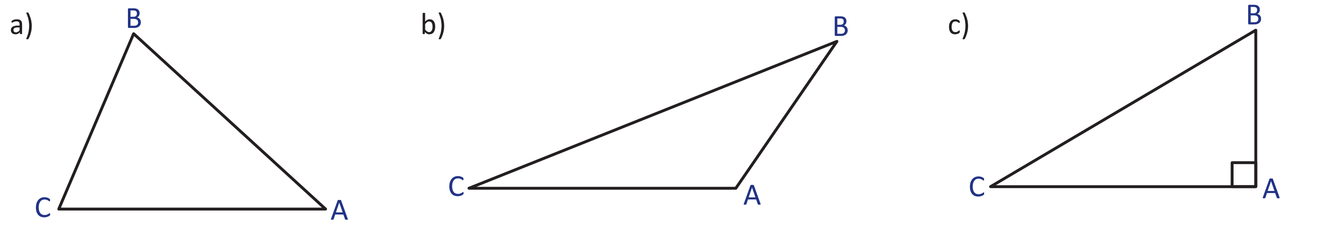
10. Determina los vectores paralelos al vector $\vec{u}$ que tienen la norma indicada. Considera las coordenadas en una base ortonormal.

    a) $\vec{u} = (3, 2)$, norma 13 b) $\vec{u} = (-2, -4)$, norma 10

2.1 Proyección ortogonal

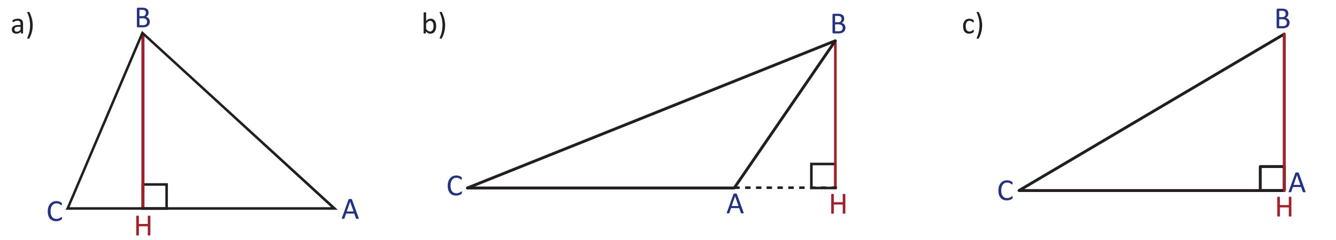
Problema inicial

Para cada uno de los siguientes triángulos determina el punto donde se interceptan la altura del vértice B a la base AC.



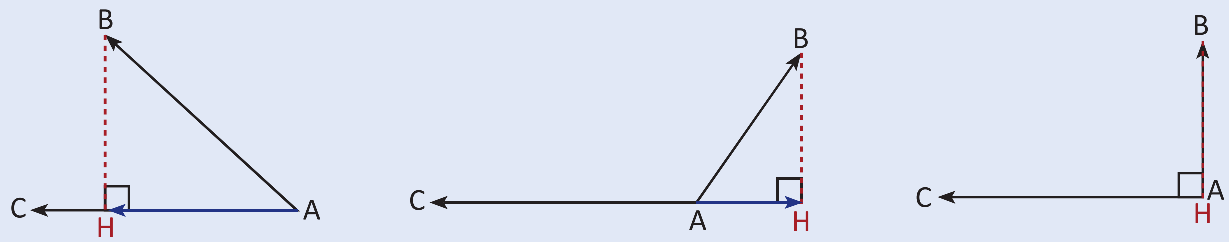
Solución

Trazando la altura de cada triángulo y localizando el punto de intercepción:



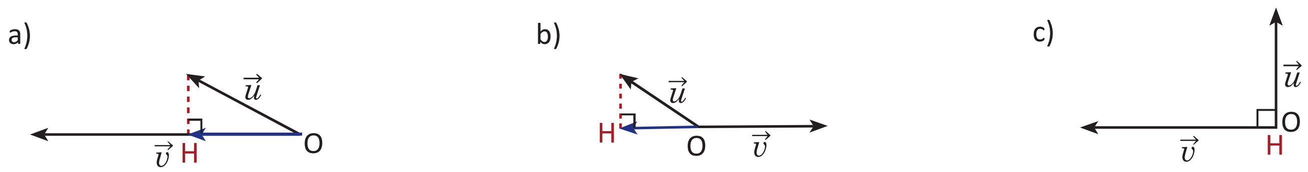
Conclusión

Dados dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se define **la proyección ortogonal** de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$, por el vector $\overrightarrow{AH}$, y se cumple que $\overrightarrow{BH}$ es ortogonal a $\overrightarrow{AC}$.



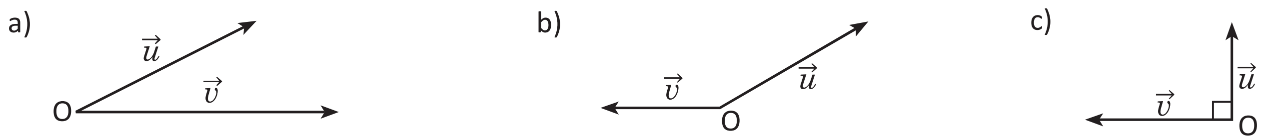
Ejemplo

Determina la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para cada caso.

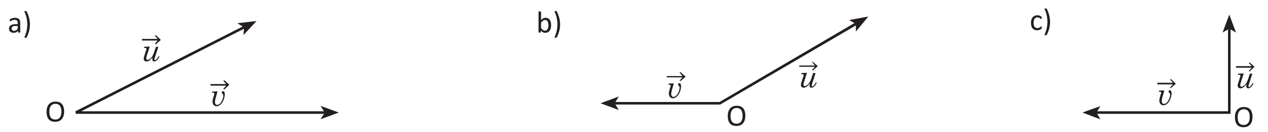


Problemas

1. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para cada caso.



2. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ para cada caso.



2.2 Producto escalar de vectores paralelos

Definición

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores paralelos (colineales). Se denota el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y se define por:

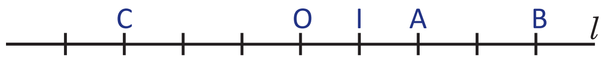
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases}\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|, & \text{si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen el mismo sentido.}\\ -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|, & \text{si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen diferente sentido.}\end{cases}$$

Cuando $\vec{u}=\vec{0}$ o $\vec{v}=\vec{0}$, se define $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{0}$.

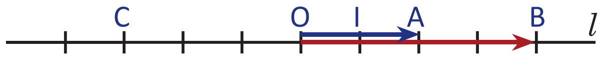
Ejemplo 1

Las divisiones de la recta l son regulares y el vector $\overrightarrow{OI}$ es unitario, determina:

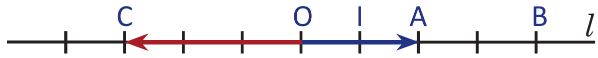
a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$
b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$
c) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}$
d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



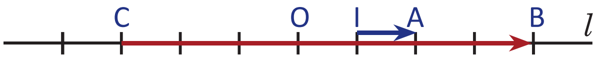
a) En este caso tanto $\overrightarrow{OA}$ como $\overrightarrow{OB}$ tienen el mismo sentido, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|=2\times4=8$.



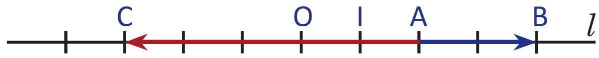
b) En este caso $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ tienen diferente sentido, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OC}\|=-(2\times3)=-6$.



c) En este caso tanto $\overrightarrow{IA}$ como $\overrightarrow{CB}$ tienen el mismo sentido, $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}=\|\overrightarrow{IA}\|\|\overrightarrow{CB}\|=1\times7=7$.



d) En este caso $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen diferente sentido, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|=-(2\times5)=-10$.



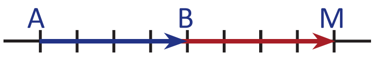
Ejemplo 2

Sean A y B dos puntos tales que AB = 4. Calcula $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ para cada una de las siguientes condiciones.

a) A es el punto medio de BM.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-(4\times4)=-16$

b) B es el punto medio de AM.



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=4\times8=32$

c) M es el punto medio de AB.

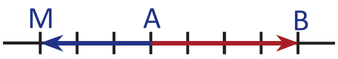
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=4\times2=8$

Ejemplo 3

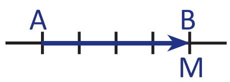
Sean A y B dos puntos tales que AB = 4. Representa el punto M en la recta AB que cumpla las condiciones de cada literal.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=8$

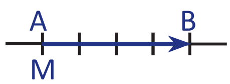
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-12$



c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=16$



d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$



Problemas

1. Las divisiones de la recta l son regulares, y el vector $\overrightarrow{OI}$ es unitario, determina:

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$
b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$
c) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CB}$
d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

2. Sean A y B dos puntos tales que AB = 2. Calcula $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ para cada una de las siguientes condiciones.

a) A es el punto medio de BM.
b) B es el punto medio de AM.
c) M es el punto medio de AB.

3. Sean A y B dos puntos tales que AB = 6. Dibuja el punto M en la recta AB para cada literal.

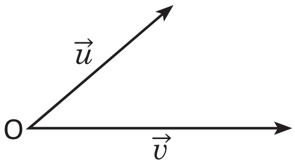
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=24$
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-3$
c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-36$
d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

2.3 Producto escalar de vectores no paralelos (no colineales)

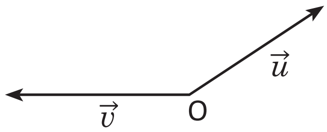
Problema inicial

Expresa el producto escalar del vector $\vec{v}$ con la proyección de $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$.

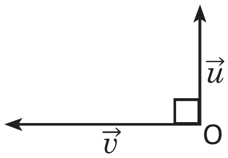
a)



b)



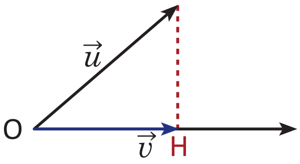
c)



Solución

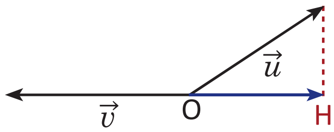
Se encuentra la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

a)



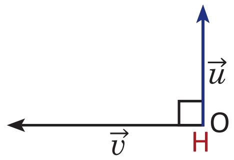
$\vec{v} \cdot \overrightarrow{OH} = \|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OH}\|$

b)



$\vec{v} \cdot \overrightarrow{OH} = -\|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OH}\|$

c)



$\vec{v} \cdot \overrightarrow{OH} = \vec{v} \cdot \vec{0} = 0$

Definición

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no paralelos, y sea $\vec{u}'$ la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, entonces $\vec{u}' \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$. Se define el **producto escalar** de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$$

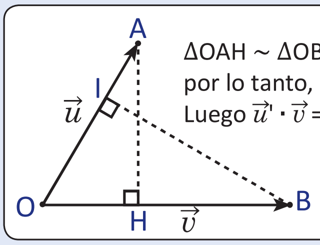
En el producto escalar se cumplen las siguientes propiedades para un número real r y tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

1) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

4) $\vec{u} \cdot (r\vec{v}) = (r\vec{u}) \cdot \vec{v} = r(\vec{u} \cdot \vec{v})$



$\Delta OAH \sim \Delta OBI$,
por lo tanto, $OB \cdot OH = OA \cdot OI$.
Luego $\vec{u}' \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$.

El producto escalar cumple que si dos vectores son ortogonales, entonces su producto escalar es 0 y viceversa (si el producto escalar de dos vectores diferentes de cero es 0 entonces los vectores son ortogonales).

Ejemplo

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, expresa los productos escalares:

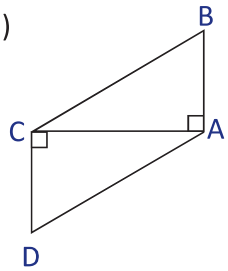
a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$
$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$
$= AC^2$

b) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AC}$
$= -AC^2$

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$
$= -AB^2$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{CA}$
$= \vec{0} \cdot \overrightarrow{CA}$
$= 0$

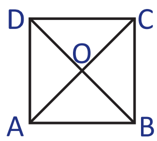
a)



Problemas

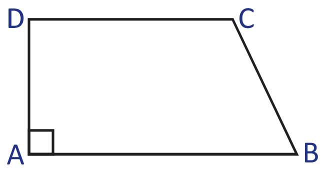
1. Considerando un cuadrado ABCD de lado 4. Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ e) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BO}$



2. Teniendo el trapecio rectángulo ABCD, con AB = 4, AD = 2 y CD = 3.
   Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

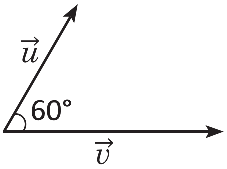


2.4 Forma trigonométrica del producto escalar

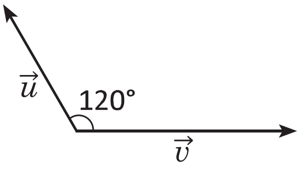
Problema inicial

Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si se sabe que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ y el ángulo entre los vectores es $\alpha = 60°$ o $120°$.

a)



b)



Puedes utilizar razones trigonométricas para calcular el producto escalar.

Las razones trigonométricas de ángulos notables son:

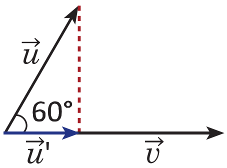
$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución

Se encuentra la proyección ortogonal $\vec{u}'$ de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

a)



$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}'\cdot\vec{v} = \|\vec{u}'\|\,\|\vec{v}\|$

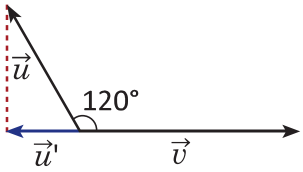
Puesto que: $\cos 60° = \dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$

entonces: $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|\cos 60°$

por lo tanto $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}'\|\,\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos 60°$

$= 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$

b)



$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}'\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}'\|\,\|\vec{v}\|$

$\cos 120° = -\dfrac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$,

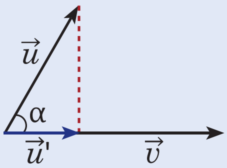
$\|\vec{u}'\| = -\|\vec{u}\|\cos 120°$,

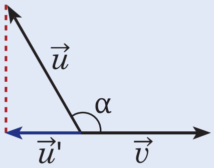
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}'\|\|\vec{v}\|\cos 120°$

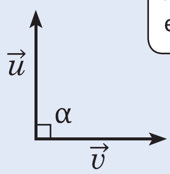
$= 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$

Conclusión

Considerando dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se cumple que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$.







A partir de la expresión $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$ es sencillo demostrar que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

A α se le llama ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejemplo

En los siguientes vectores se cumple que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{3}$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = 9$. Determina el ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Se cumple que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$ (α es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$) entonces para calcular el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$9 = 3(2\sqrt{3})\cos\alpha.$$

Luego $\quad \cos\alpha = \dfrac{9}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Como $0° < \alpha \leq 180°$, entonces $\alpha = 30°$.

De la clase 1.1 de esta unidad se sabe que el ángulo entre dos vectores está entre 0° y 180°.

Problemas

1. Calcula el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, considerando que α es el ángulo formado entre ambos vectores.

   a) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 60°$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 30°$ c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$

2. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para cada literal.

   a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$ c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$

2.5 Producto escalar de vectores en el plano cartesiano

Problema inicial

Considerando una base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$ dos vectores $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Determina $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solución

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) & \\
&= x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + x\vec{i} \cdot y'\vec{j} + y\vec{j} \cdot x'\vec{i} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j} & \text{por propiedad 3,} \\
&= xx'(\vec{i} \cdot \vec{i}) + xy'(\vec{i} \cdot \vec{j}) + yx'(\vec{j} \cdot \vec{i}) + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j}) & \text{por propiedad 4,} \\
&= xx'\|\vec{i}\|^2 + xy'(0) + yx'(0) + yy'\|\vec{j}\|^2 & \text{porque } \vec{i}, \vec{j} \text{ son ortogonales,} \\
&= xx'(1) + yy'(1) & \text{porque } \vec{i}, \vec{j} \text{ son normales.} \\
&= xx' + yy' &
\end{aligned}
$$

Conclusión

Dados dos vectores $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ en una base ortonormal, se cumple que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Ejemplo

Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (3, 2)$, $\vec{v} = (1, 2)$ en una base ortonormal.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3 \times 1) + (2 \times 2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 4$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$$

Problemas

1. Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

   a) $\vec{u} = (4, 1)$, $\vec{v} = (2, 3)$ b) $\vec{u} = (-2, 3)$, $\vec{v} = (-1, -2)$ c) $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (-3, -2)$

2. Encuentra el valor de x que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

   a) $\vec{u} = (-3, 1)$, $\vec{v} = (2, x)$ b) $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (x, -2)$

   c) $\vec{u} = (x, 2)$, $\vec{v} = (-1, x)$ d) $\vec{u} = (2, x)$, $\vec{v} = (x, 5)$

   e) $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (x, 3)$ f) $\vec{u} = (2 - x, 3)$, $\vec{v} = (1, 2 + x)$ g) $\vec{u} = (1 - x, x)$, $\vec{v} = (3x, 2x - 1)$

Si el producto escalar de dos vectores diferentes de cero es 0, entonces los vectores son ortogonales.

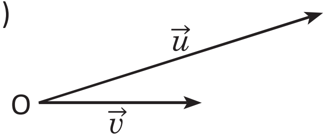
3. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores de cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

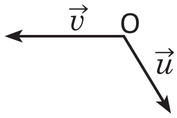
   a) $\vec{u} = (4, 1)$, $\vec{v} = (2, 3)$ b) $\vec{u} = (-2, 3)$, $\vec{v} = (-1, -2)$ c) $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (-3, -2)$

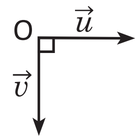
Aplica la forma en que se utilizó el producto escalar en el ejemplo de la clase anterior.

2.6 Practica lo aprendido

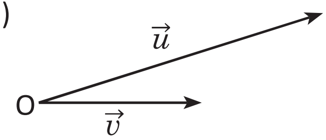
1. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ para cada caso.

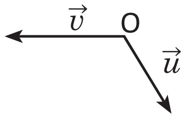
a) 

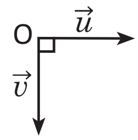
b) 

c) 

2. Grafica la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ para cada caso.

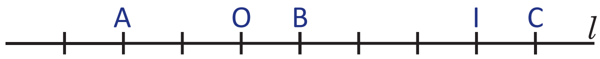
a) 

b) 

c) 

3. Las divisiones de la recta l son regulares, y el vector $\overrightarrow{OI}$ es unitario, determina:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$



4. Sean A y B dos puntos tales que AB = 1. Calcula $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ para cada una de las siguientes condiciones.

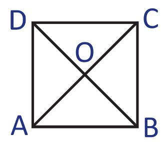
a) A es el punto medio de BM   b) B es el punto medio de AM   c) M es el punto medio de AB

5. Sean A y B dos puntos tales que AB = 3. Representa el punto M en la recta AB que cumpla las condiciones de cada literal.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

6. Considerando un cuadrado ABCD con centro O y lado 3. Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$



7. Calcula el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, considerando que α es el ángulo formado entre ambos vectores.

a) $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 5$, $\alpha = 60°$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\alpha = 150°$

8. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para cada literal.

a) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$ b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

9. Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

a) $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (-1, 0)$ b) $\vec{u} = (-3, 4)$, $\vec{v} = (-4, -2)$

10. Encuentra el valor de x que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

a) $\vec{u} = (1 - 3x, 2)$, $\vec{v} = (2, 4 + 2x)$ b) $\vec{u} = (2 - 3x, 2x)$, $\vec{v} = (2x, 3x + 2)$

11. Determina la medida del ángulo formado entre los vectores de cada literal. Considera que las coordenadas de los vectores están en una base ortonormal.

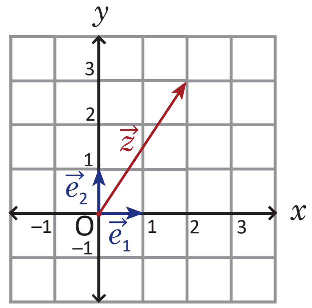
a) $\vec{u} = (-5, 3)$, $\vec{v} = (-6, -10)$ b) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{v} = (0, 2)$

3.1 Representación geométrica de los números complejos

Problema inicial

Considerando el número complejo $z = 2 + 3i$, representa en el plano cartesiano el vector $\vec{z} = (2, 3)$ utilizando como base los vectores ortonormales $\vec{e}_1 = (1, 0)$ y $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

Solución

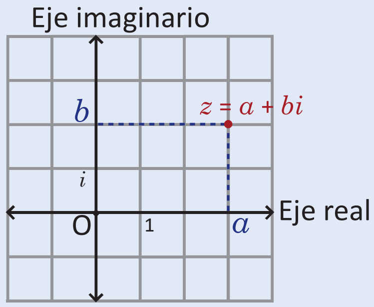


Conclusión

El plano cartesiano es una base de vectores ortonormales y las coordenadas de un punto A en el plano equivalen a las coordenadas del vector $\overrightarrow{OA}$ en la base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Un número complejo $z = a + bi$, se puede representar en un plano en donde la primera coordenada (eje x) es la parte real (a) del número z, y la segunda coordenada (eje y) es la parte imaginaria (b) del número z.

El plano donde se ubican los números complejos se conoce como **plano complejo**. El eje horizontal se conoce como **eje real** y el eje vertical se conoce como **eje imaginario**.



Se define el **módulo** del número complejo $z = a + bi$, como la norma del vector (a, b), y se denota por $|z|$, es decir:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Ejemplo

Determina el módulo del número $z = 2 + 3i$.

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{2^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

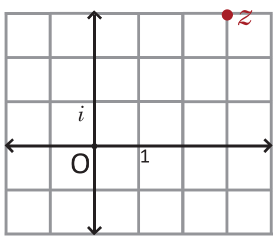
Problemas

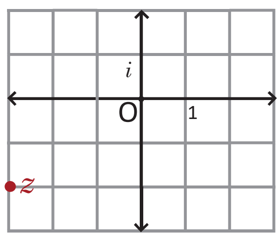
1. Representa los siguientes números complejos como puntos en el plano complejo y determina su módulo.

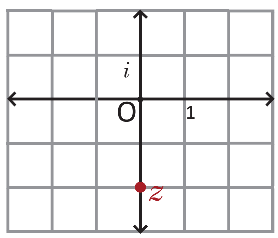
   a) $z = 2 + 3i$ b) $z = -4 - 2i$ c) $z = -1 + 2i$

   d) $z = 3 - i$ e) $z = 4$ f) $z = -4i$

2. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

   a)


   b)


   c)


3. Demuestra que $|z|^2 = z\bar{z}$.

Recuerda que el conjungado de un número complejo $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$.

3.2 Operaciones con números complejos en el plano complejo

Problema inicial

Considerando los números complejos $z = 2 + 2i$ y $w = 1 - 4i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

a) z b) w c) $w + z$ d) $w - z$ e) $2w$

Solución

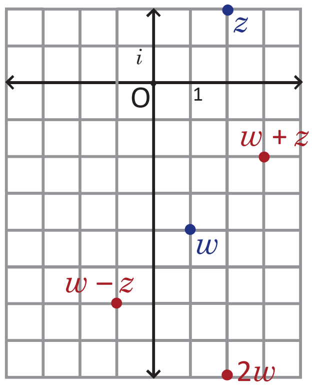
a) Se representa el punto (2, 2).

b) Se representa el punto (1, –4).

c) $w + z = 1 - 4i + 2 + 2i = 3 - 2i$, entonces se representa el punto (3, –2).

d) $w - z = 1 - 4i - (2 + 2i) = -1 - 6i$, entonces se representa el punto (–1, –6).

e) $2w = 2(1 - 4i) = 2 - 8i$, entonces se representa el punto (2, –8).



Conclusión

Dados dos números complejos $w = a + bi$ y $z = c + di$, se cumple que la suma de números complejos $w + z$ equivale al número complejo representado por las coordenadas $(a, b) + (c, d)$.

Análogamente, la resta de números complejos $w - z$ equivale al número complejo representado por las coordenadas $(a, b) - (c, d)$.

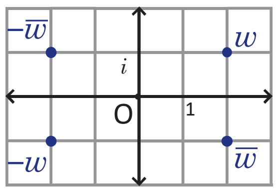
Y el número complejo que se representa en el plano por el vector (ra, rb) es rw.

Observar que las operaciones con números complejos en el plano complejo se comportan como las operaciones de vectores en el plano.

Ejemplo

Considerando $w = 2 + i$, representa en el plano complejo los números:

a) w b) $\overline{w}$ c) $-w$ d) $-\overline{w}$



Problemas

1. Considerando los números complejos $z = 2 - i$ y $w = 3 + 2i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

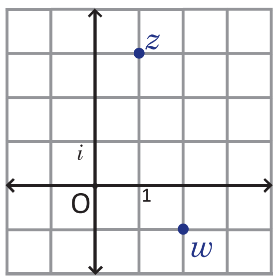
a) z b) w c) $w + z$ d) $w - z$ e) $z - w$

f) $2z$ g) $-w$ h) $\overline{z}$ i) $-\overline{w}$ j) $2w - 3z$

2. Utilizando los números complejos graficados en la figura, representa los siguientes números complejos.

a) $w + z$ b) $w - z$ c) $z - w$

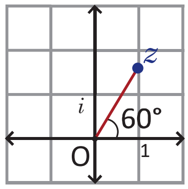
d) $-w$ e) $-\overline{z}$ f) $2w - z$



3.3 Forma trigonométrica de los números complejos*

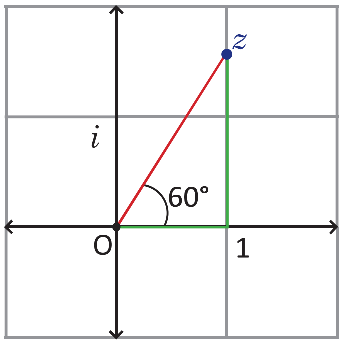
Problema inicial

Utiliza razones trigonométricas para expresar el número complejo representado por el punto cuyo módulo es 2 y el ángulo medido desde el eje real al segmento Oz es 60°.



Solución

Un número complejo z representado por el vector del plano, debe ser expresado en la forma $z = a + bi$ donde a es la coordenada del vector en x, y b es la coordenada del vector en y.



De la definición de seno y coseno se tiene que:

$$\cos 60° = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{2} \qquad \text{sen } 60° = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{2}$$

Luego, $a = 2 \cos 60°$ y $b = 2 \text{ sen } 60°$.

Por lo tanto, el número complejo representado por este vector es $2\cos 60° + (2\text{sen } 60°)i$, que puede ser expresado por:

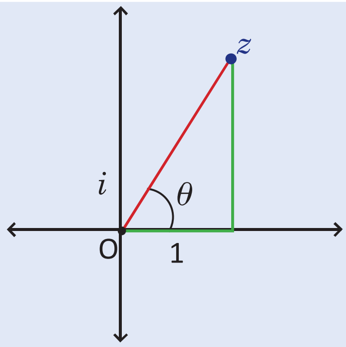
$$z = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = 1 + \sqrt{3}i.$$

Conclusión

El ángulo formado entre el eje real y el segmento Oz, tal que z es un número complejo, se conoce como **argumento** del número complejo, y se representa por arg(z). Si θ es argumento de z, entonces todos los ángulos de la forma $\theta + 360°n$ son argumento del mismo número complejo z.

Para un número complejo z con módulo $|z|$ y argumento θ, se cumple que:

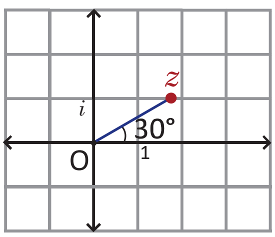
$$z = |z|(\cos \theta + i \text{ sen } \theta).$$



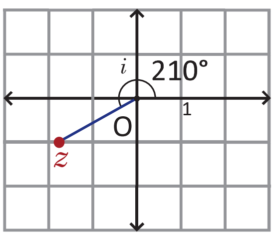
Problemas

1. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo y cuyo módulo es el que se indica.

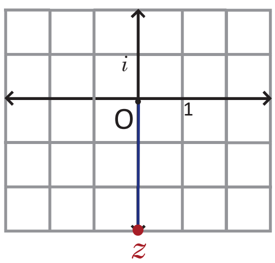
a) $|z| = 2$



b) $|z| = 2$



c) $|z| = 3$



2. Determina el número complejo z si su módulo y argumento es el que se indica en cada literal.

a) $|z| = 2, \theta = 45°$ b) $|z| = 3, \theta = 30°$ c) $|z| = 1, \theta = 135°$ d) $|z| = 2, \theta = 150°$

3.4 Multiplicación de números complejos en su forma trigonométrica

Problema inicial

Considerando dos números complejos $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, y $w = |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$, determina zw.

Solución

$$zw = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \times |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

$$= |z||w|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

$$= |z||w|[(\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)]$$

$$= |z||w|[\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)] \quad \text{(aplicando el teorema de adición).}$$

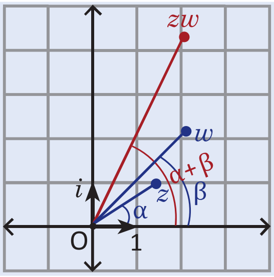
El teorema de adición es:
$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

El número complejo que resulta tiene como módulo la multiplicación de los módulos, y su argumento es igual a la suma de los argumentos de los dos complejos.

Conclusión

En la multiplicación de dos números complejos $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ y $w = |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ se cumple que el número complejo resultante tiene como módulo la multiplicación de los módulos y el argumento es la suma de los argumentos de los números multiplicados.

$$zw = |z||w|[\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)]$$



Ejemplo

Realiza la multiplicación zw si $z = 2(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$ y $w = 3(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$.

$$zw = 2(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°) \times 3(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$$

$$= 2 \times 3\,[\cos(20° + 10°) + i \operatorname{sen}(20° + 10°)]$$

$$= 6(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$= 3\sqrt{3} + 3i$$

Problemas

1. Determina el producto zw para cada literal.

   a) $z = \cos 14° + i \operatorname{sen} 14°$ y $w = 2(\cos 16° + i \operatorname{sen} 16°)$

   b) $z = 2(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$ y $w = 5(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$

   c) $z = 3(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)$ y $w = 4(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)$

   d) $z = 6(\cos 110° + i \operatorname{sen} 110°)$ y $w = \cos 160° + i \operatorname{sen} 160°$

   e) $z = 2(\cos 208° + i \operatorname{sen} 208°)$ y $w = 2(\cos 107° + i \operatorname{sen} 107°)$

   f) $z = 3(\cos 140° + i \operatorname{sen} 40°)$ y $w = 2(-\cos 170° + i \operatorname{sen} 10°)$

   g) $z = 5(\cos 170° + i \operatorname{sen} 10°)$ y $w = 3(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°)$

2. Grafica los números z, w y zw, para cada uno de los literales anteriores.

3.5 División de números complejos en su forma trigonométrica

Problema inicial

Considerando $w = 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$. Determina el valor de z que cumple que $zw = 6(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$.

Solución

Tomando $z = |z|(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$, entonces:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos \theta + i \text{ sen } \theta) \times 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°) \\ &= 2|z|[\cos(40° + \theta) + i \text{ sen}(40° + \theta)], \end{aligned}$$

además se sabe que $zw = 6(\cos 60° + i \text{ sen } 60°)$,

luego:
$$2|z| = 6$$
$$40° + \theta = 60° + 360°n \text{ con } n \text{ un número entero.}$$

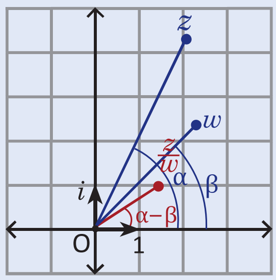
Por lo tanto, $z = \frac{6}{2}[\cos(60° - 40°) + i \text{ sen}(60° - 40°)] = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$.

Conclusión

En la división de 2 números complejos $z = |z|(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$, y $w = |w|(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)$ se cumple que el número complejo resultante tiene como módulo la división de los módulos y el argumento es igual al argumento del dividendo menos el argumento del divisor.

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}[\cos(\alpha - \beta) + i \text{ sen}(\alpha - \beta)]$$

Como caso especial, se tiene que $\frac{1}{w} = \frac{1}{|w|}[\cos(-\beta) + i \text{ sen}(-\beta)]$.



Ejemplo

Realiza la división $\frac{z}{w}$ si $z = 4(\cos 50° + i \text{ sen } 50°)$ y $w = \cos 20° + i \text{ sen } 20°$.

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= 4(\cos 50° + i \text{ sen } 50°) \div (\cos 20° + i \text{ sen } 20°) \\ &= \frac{4}{1}[\cos(50° - 20°) + i \text{ sen}(50° - 20°)] \\ &= 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°) \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2}i \\ &= 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

Problemas

1. Determina el cociente $\frac{z}{w}$ para cada literal.

   a) $z = \cos 42° + i \text{ sen } 42°$ y $w = 2(\cos 12° + i \text{ sen } 12°)$

   b) $z = 10(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$ y $w = 2[\cos(-20°) + i \text{ sen }(-20°)]$

   c) $z = 5(\cos 110° + i \text{ sen } 110°)$ y $w = \cos 170° + i \text{ sen } 170°$

   d) $z = 1$ y $w = \cos 60° + i \text{ sen } 60°$

   e) $z = 3(\cos 207° + i \text{ sen } 207°)$ y $w = 3(\cos 117° + i \text{ sen } 117°)$

   f) $z = 3(\cos 110° + i \text{ sen } 70°)$ y $w = 2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$

   g) $z = 6(-\cos 10° + i \text{ sen } 10°)$ y $w = 2(\cos 80° + i \text{ sen } 80°)$

2. Grafica los números z, w y $\frac{z}{w}$, para cada uno de los literales anteriores.

3.6 Fórmula de Moivre

Problema inicial

Considerando $z = 2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)$ determina z^2 y z^{-2}.

Se define $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n$.

Solución

$$\begin{aligned} z^2 &= [2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)][2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)] \\ &= 2^2[\cos(15° + 15°) + i \text{ sen}(15° + 15°)] \\ &= 4(\cos 30° + i \text{ sen } 30°) \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{-2} &= \left(\frac{1}{z}\right)^2 \\ &= \left\{\frac{1}{2}[\cos(-15°) + i \text{ sen }(-15°)]\right\}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2[\cos(-15° - 15°) + i \text{ sen}(-15° - 15°)] \\ &= \frac{1}{4}[\cos(-30°) + i \text{ sen }(-30°)] \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt{3} - i}{8} \end{aligned}$$

En general

Se cumple que dado un número complejo $z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$:

$$z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \text{ sen } 2\theta).$$

Se define $z^0 = 1$.

Y para un número entero n se cumple que:

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta).$$

Esta expresión para la potencia n-ésima de un número complejo se conoce como **fórmula de Moivre**.

Ejemplo

Encuentra el valor (o valores) del número complejo z que hace cierta la igualdad $z^3 = 1$.

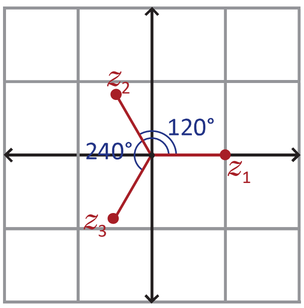
Considerando $z = |z|(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$ con $0° \leq \theta < 360°$,
entonces $z^3 = |z|^3(\cos 3\theta + i \text{ sen } 3\theta) = 1(\cos 0° + i \text{ sen } 0°)$.

De lo cual se deduce que $|z|^3 = 1$, y por lo tanto $|z| = 1$.

Además como $3\theta = 360° \times n$ (n: número entero) y $0° \leq \theta < 360°$, $3\theta = 0°$, $3\theta = 360°$ o $3\theta = 720°$, de lo cual se tendrá que $\theta = 0°$, $\theta = 120°$ o $\theta = 240°$.

Por lo tanto, los valores de z que cumplen que $z^3 = 1$ son $z_1 = \cos 0° + i \text{ sen } 0°$, $z_2 = \cos 120° + i \text{ sen } 120°$, $z_3 = \cos 240° + i \text{ sen } 240°$; que se pueden expresar como:

$$z_1 = 1,\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$



Observa que el triángulo que forman z_1, z_2 y z_3 es un triángulo equilátero. Puedes comprobarlo calculando las longitudes de los lados de este.

Problemas

1. Para el número complejo $z = 2(\cos 15° + i \text{ sen } 15°)$. Determina:

 a) z^2 b) z^3 c) z^4 d) z^6 e) z^8

2. Para el número complejo $w = 3(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)$, determina w^{-3}.
3. Encuentra el valor (o valores) del número complejo z que hace cierta la igualdad $z^4 = 1$.
4. Encuentra el valor (o valores) del número complejo w que hace cierta la igualdad $w^6 = 1$.

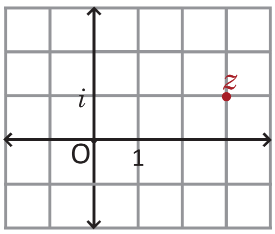
Unidad 7

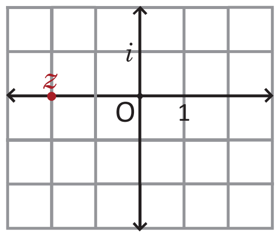
3.7 Practica lo aprendido

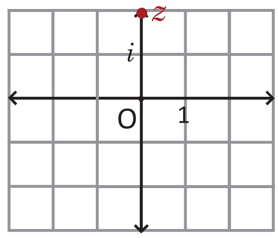
1. Representa los siguientes números complejos en el plano complejo y determina su módulo.

   a) $z = -1 + 3i$ b) $z = -2i$ c) $z = -3$

2. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

   a)


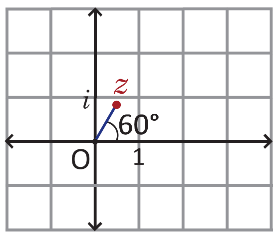
   b)


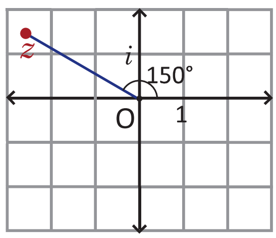
   c)


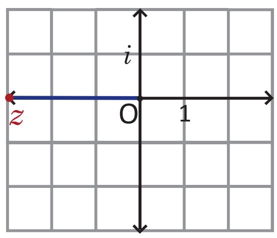
3. Considerando los números complejos $z = 1 - 2i$ y $w = -2 + 2i$ representa los siguientes números en el plano complejo.

   a) $z + w$ b) $w - z$ c) $z - w$ d) $-3z$ e) $\overline{w}$ f) $-w + 2z$

4. Expresa el número complejo representado en cada plano complejo.

   a) $|z| = 1$


   b) $|z| = 3$


   c) $|z| = 3$


5. Determina el número complejo que tiene módulo y argumento que indica cada literal.

   a) $|z| = 4$, $\theta = 60°$ b) $|z| = 1$, $\theta = 45°$ c) $|z| = 2$, $\theta = 300°$ d) $|z| = 3$, $\theta = 180°$

6. Determina el producto zw para cada literal.

   a) $z = 3(\cos 23° + i \operatorname{sen} 23°)$ y $w = 4(\cos 37° + i \operatorname{sen} 37°)$
   b) $z = 2(\cos 41° + i \operatorname{sen} 41°)$ y $w = 5[\cos(-11°) + i \operatorname{sen}(-11°)]$
   c) $z = 3(\cos 200° - i \operatorname{sen} 160°)$ y $w = 2(\cos 20° - i \operatorname{sen} 20°)$

7. Para el número complejo $z = \cos 10° + i \operatorname{sen} 10°$. Determina:

   a) z^3 b) z^6 c) z^9

8. Para el número complejo $w = 2(\cos 9° + i \operatorname{sen} 9°)$. Determina w^{-5}.

9. Determina el cociente $\frac{z}{w}$ para cada literal:

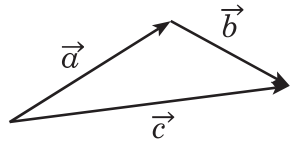
   a) $z = \cos 25° + i \operatorname{sen} 25°$ y $w = 3[\cos(-35°) + i \operatorname{sen}(-35°)]$
   b) $z = 6(\cos 21° + i \operatorname{sen} 21°)$ y $w = 3(\cos 9° - i \operatorname{sen} 9°)$
   c) $z = 2(\cos 115° + i \operatorname{sen} 65°)$ y $w = 2(\cos 5° - i \operatorname{sen} 5°)$

3.8 Problemas de la unidad

En los problemas del 1 al 4, determina la respuesta correcta.

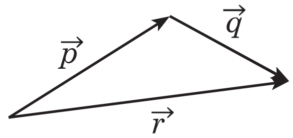
1. El vector que resulta de sumar los vectores $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ es:

   a) $2\vec{a}$ b) $2\vec{b}$ c) $\vec{0}$ d) $2\vec{c}$ e) $-2\vec{c}$



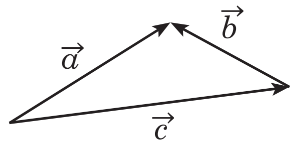
2. El vector que resulta de la operación $\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$ es:

   a) $2\vec{p}$ b) $2\vec{r}$ c) $\vec{0}$ d) $2\vec{q}$ e) $-2\vec{r}$



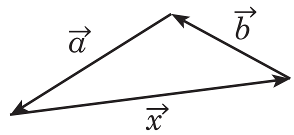
3. La norma del vector $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ si $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$ y $\|\vec{c}\| = 4$ es:

   a) 2   b) 4   c) 6   d) 9   e) 0



4. Determina la expresión con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuyo resultado sea el vector $\vec{x}$.

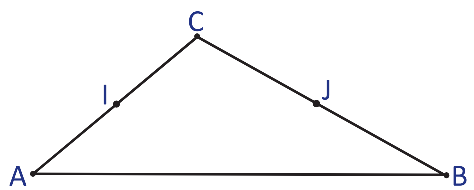
   a) $2\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} + \vec{b}$ c) $-(\vec{a} + \vec{b})$ d) $\vec{a} - \vec{b}$



5. Sean los vectores $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (1, 4)$ y $\vec{w} = (5, 6)$, verifica que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base vectorial y escribe las coordenadas de $\vec{w}$ respecto a esta base.

6. Dado el vector $\vec{u} = (2, 6)$ en la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, determina las coordenadas del punto medio del vector $\vec{u}$.

7. Considerando el triángulo ABC, y siendo I el punto medio de AC y J el punto medio de BC, demuestra que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



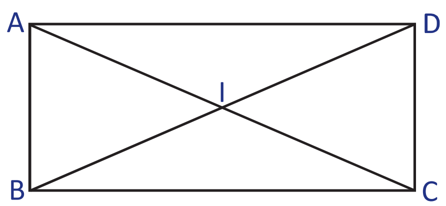
8. Considerando los puntos P y Q que cumplen:

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

Utiliza lo aprendido en la clase 1.3.

   Demuestra que $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{BC}$.

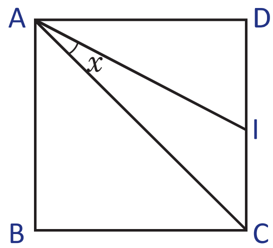
9. Sea ABCD un rectángulo tal que: AB = a y BC = b. Expresa $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DI}$ y $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA}$ con los valores a y b.



Unidad 7

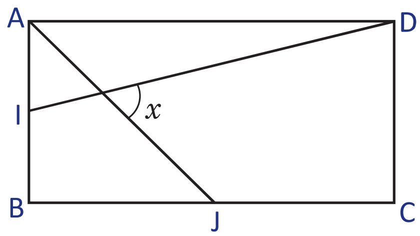
3.9 Problemas de la unidad

1. Considera un cuadrado ABCD de lado 1 y sea I el punto medio de $\overline{CD}$. Determina la medida del ángulo x.



Expresa $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ como suma de vectores que faciliten el cálculo. Utiliza la forma trigonométrica del producto escalar.

2. En la siguiente figura, ABCD es un rectángulo tal que AB = 2 y AD = 4.



a) Determina la longitud de AJ y DI, si J e I son puntos medios de los lados BC y AB respectivamente.

b) Determina la medida del ángulo x.

3. Sea $\vec{u} = (a, b)$ un vector diferente de cero, en una base ortonormal. Demuestra que el vector $\vec{u}$ es ortogonal a los vectores de la forma $(rb, -ra)$ para cualquier número real r diferente de cero.

4. Considerando los vectores $\overrightarrow{OA} = (1, 4)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 2)$ determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{OI}$ si I es el punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$.

5. Determina el resultado de las siguientes operaciones con número complejos.

a) $(i - 1)^8$

b) $(1 + i)^{-8}$

Utiliza la forma trigonométrica de un número complejo.

6. Determina el resultado de las siguientes operaciones con números complejos.

a) $(i - 1)(1 - i)$

b) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$

Utiliza la forma trigonométrica de un número complejo.

7. Calcula las siguientes cantidades.

a) $|(i + 1)(2 - i)|$

b) $\left|\dfrac{2 - 3i}{1 + 2i}\right|$

c) $|(1 + i)^{20}|$

8. Demuestra que para 2 números complejos z y w se cumple que:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Utiliza $|z|^2 = z\bar{z}$ y que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

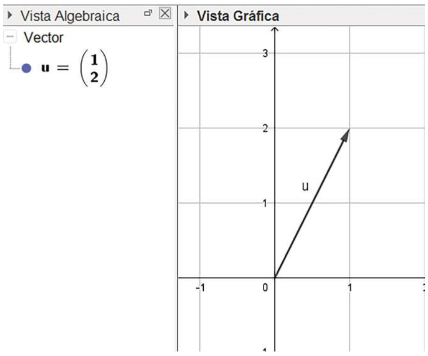
4.1 Práctica en GeoGebra: conceptos básicos sobre vectores

Para esta práctica se utilizarán las herramientas que posee GeoGebra para trabajar con vectores, desde la forma como se representan, hasta las operaciones y aplicaciones que se pueden hacer con estas herramientas para resolver problemas y verificar respuestas. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de Práctica. Luego trabaja en GeoGebra la parte Actividades que está al final de esta práctica.

Práctica

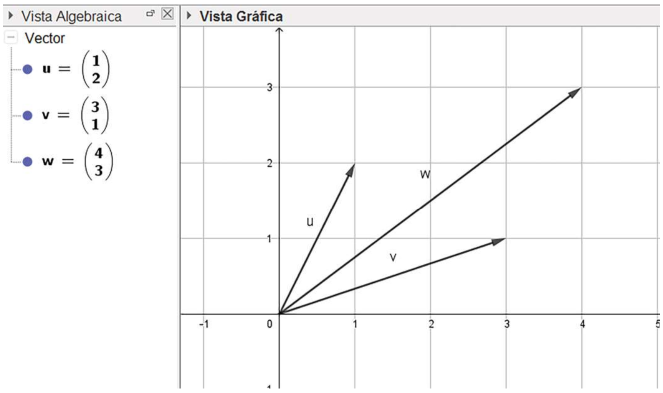
Conceptos de vectores en GeoGebra.

1. Grafica en la referencia ortonormal el vector $\vec{u} = (1,\ 2)$, digitando en la barra de entrada u = (1, 2). En GeoGebra, si se digita la letra en mayúscula grafica un punto y si se digita en minúscula, grafica un vector.



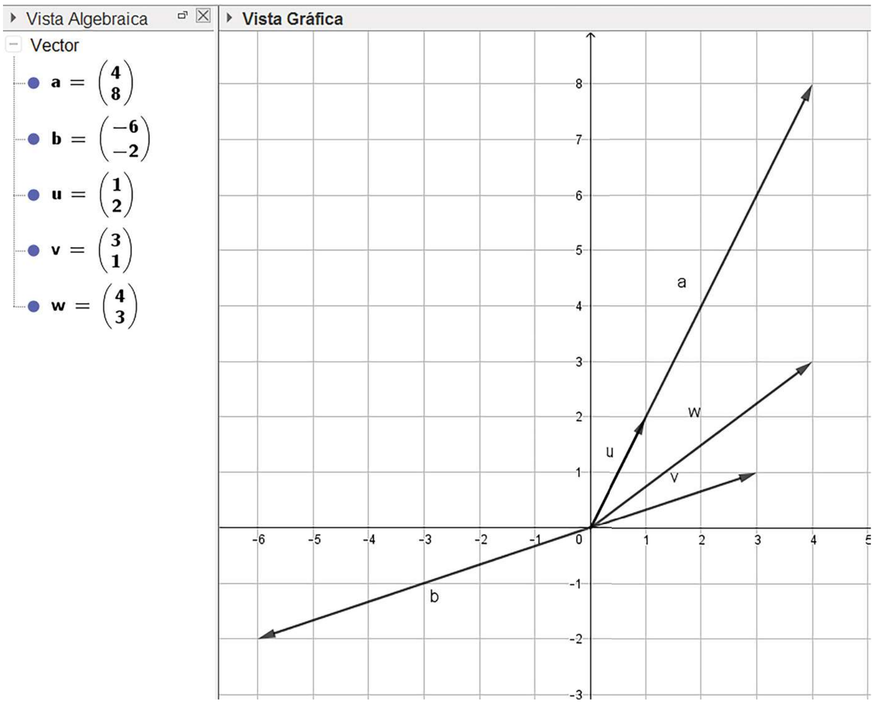
2. Grafica el vector $\vec{v} = (3,\ 1)$, escribiendo v = (3, 1).

3. Realiza la suma de vectores $\vec{u} + \vec{v}$, para ello digita en la barra de entrada u + v. En la Vista Gráfica se observará el vector resultante y en la Vista Algebraica sus coordenadas.



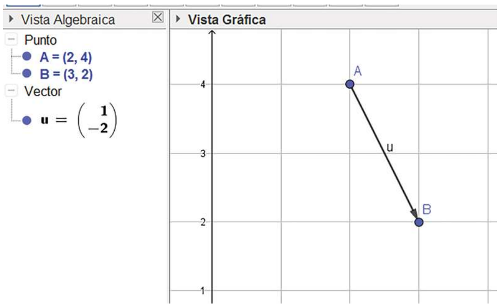
4. Realiza las operaciones $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} + \vec{u}$, utilizando la barra de entrada, tal como en el numeral 3.

5. También es posible calcular el producto por escalar, por ejemplo, para determinar el vector $4\vec{u}$, se puede escribir en la barra de entrada 4u, o con números negativos, por ejemplo $-2\vec{v}$.



6. Verifica en GeoGebra las respuestas a los problemas planteados, y corrobora si están correctos.

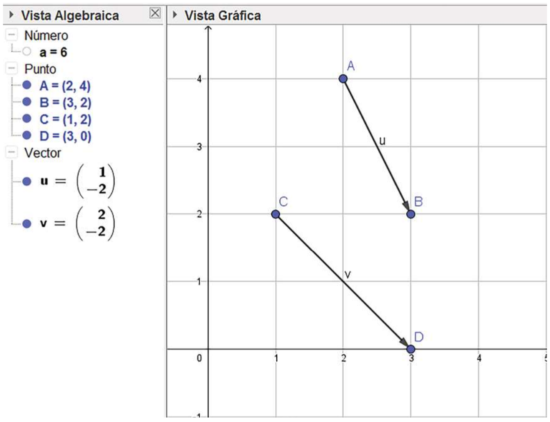
Uso de comandos para vectores en GeoGebra.



1. Grafica dos puntos con coordenadas A = (2, 4) y B = (3, 2). Para representar el vector $\overrightarrow{AB}$, digitar en la barra de entrada el comando vector (A, B).

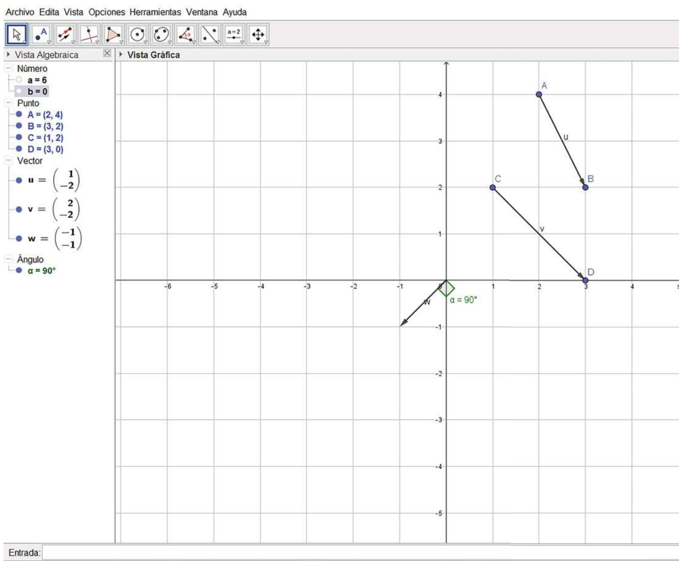
2. Grafica el vector $\overrightarrow{CD}$ con los puntos C = (1, 2) y D = (3,0) utilizando el procedimiento del numeral 1.

3. Es posible calcular el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, digitando "u v" o utilizando el comando ProductoEscalar(u, v) en la barra de entrada. En la Vista Algebraica aparece el valor del producto escalar guardado en la variable a.



4. Grafica el vector $\overrightarrow{w}$ = (–1, –1), y utiliza el comando Ángulo(w, v) el cual dará como resultado el ángulo de los vectores en la Vista Algebraica guardados en una variable α.

5. Del numeral 4 se sabe que los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son perpendiculares, verifica este resultado utilizando el comando de producto escalar en la barra de entrada. Al finalizar se obtendrán los siguientes resultados en GeoGebra.



Actividades

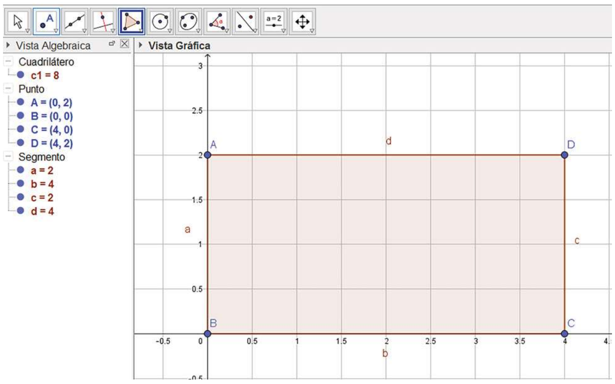
Verifica los resultados de los problemas de la unidad que se pueden constatar con GeoGebra, analiza cada caso y utiliza la herramienta más conveniente. Corrige los problemas que no fueron resueltos correctamente.

4.2 Práctica en GeoGebra: resolución de problemas

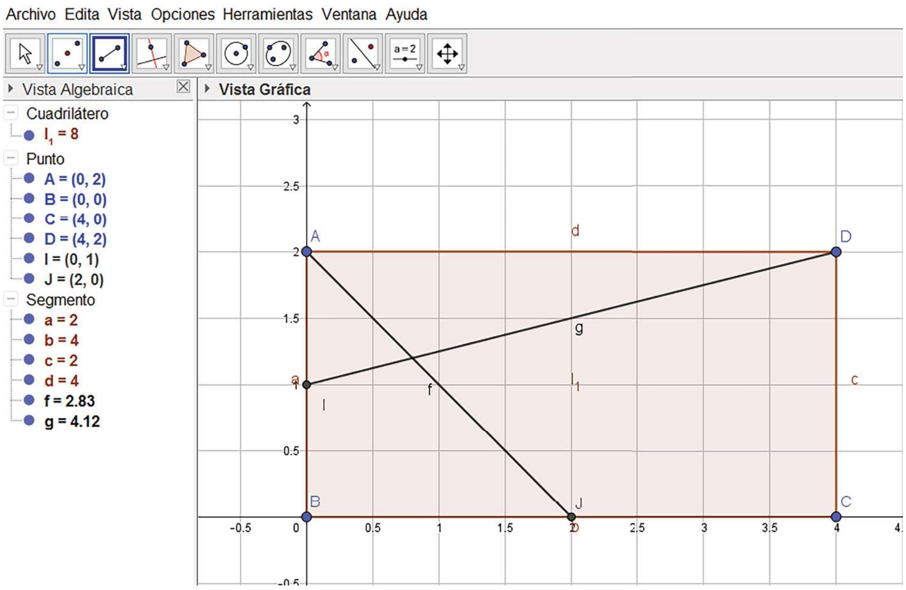
Para esta práctica se utilizarán las herramientas aprendidas en la clase anterior para solucionar algunos problemas de la clase 3.9 de los problemas de la unidad. Para ello, sigue los pasos indicados en la parte de Práctica. Luego trabaja en GeoGebra la parte Actividades que está al final de esta práctica.

Práctica

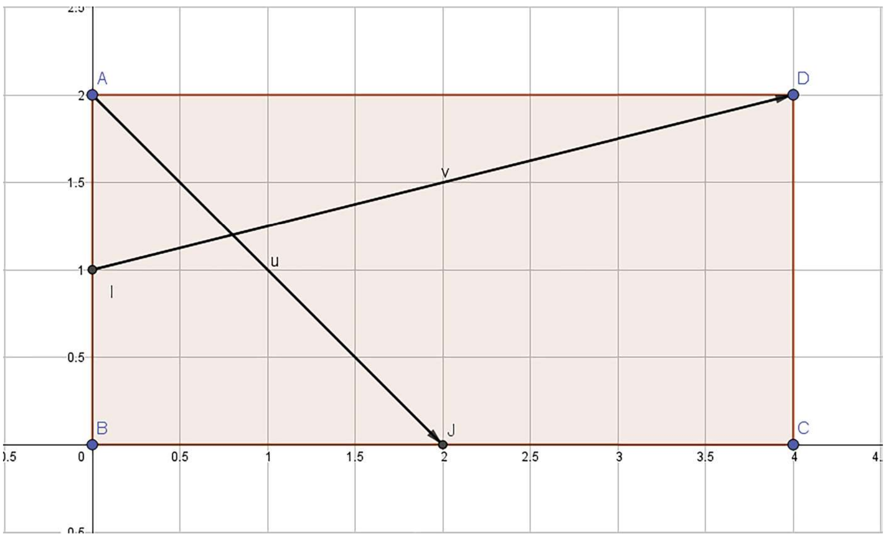
Resolución del problema 2 de la clase 3.9.



1. Grafica los puntos A = (0, 2), B = (0, 0), C = (4, 0) y D = (4, 2), luego utiliza el botón de Polígono y grafica el rectángulo indicado.
2. Luego grafica el punto medio de AB y de BC, utilizando el botón de Punto medio. Traza los segmentos DI y AJ como lo muestra la figura de abajo.



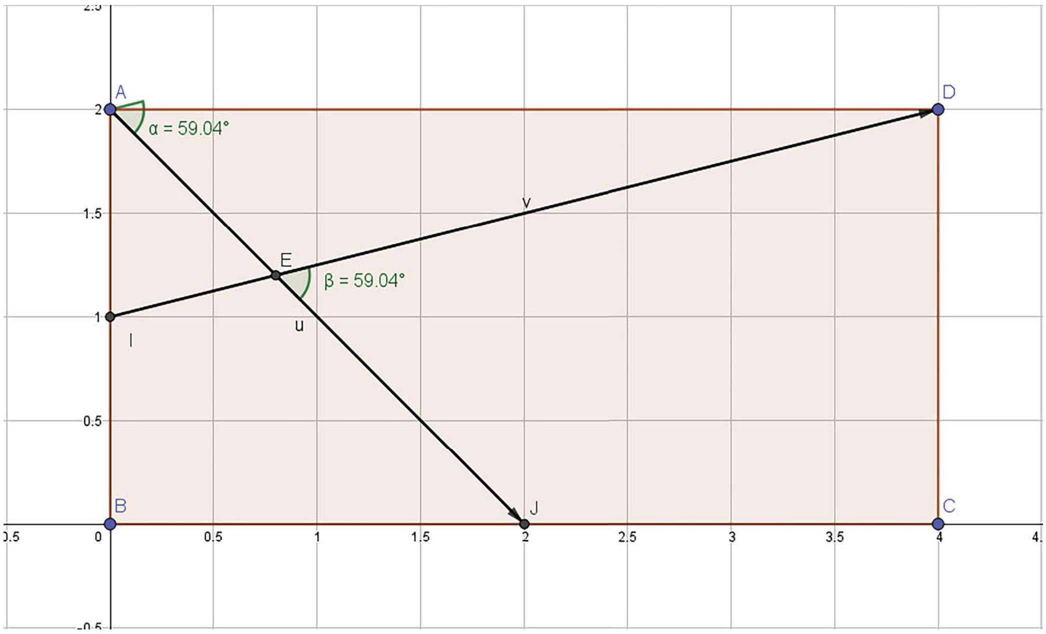
3. Utilizando los comandos para determinar el vector comprendido entre dos puntos, grafica los vectores $\overrightarrow{AJ}$ y $\overrightarrow{ID}$.



Unidad 7

4. Utilizando el comando Ángulo(u, v) calcula el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

5. Para verificar la medida de este ángulo, grafica el punto que se encuentra en la intersección de los segmentos AJ e ID, y utiliza la opción de medir ángulo, para medir el ángulo JED. Verifica que ambos ángulos tienen igual medida.

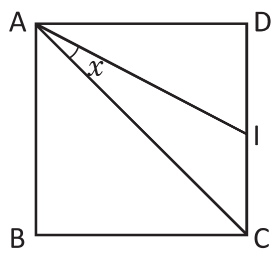


6. Finalmente puedes corroborar si fue resuelto correctamente el problema, contrastando tu respuesta de tu cuaderno.

Actividades

- Realiza una construcción que permita resolver el problema 1, 3 y 4 de la clase 3.9 sobre problemas de la unidad, luego verifica que lo resolviste correctamente comparando tu respuesta con la obtenida en GeoGebra.

- Considerando un cuadrado ABCD de lado 1, siendo I el punto medio de BC. Determina la medida del ángulo x.



- Sea $\vec{u} = (a, b)$ un vector diferente de cero, en una base ortonormal. Demuestra que el vector $\vec{u}$ es ortogonal a los vectores de la forma $(rb, -ra)$ para cualquier número real r diferente de cero.

- Considerando los vectores $\overrightarrow{OA} = (1, 4)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 2)$ determina las coordenadas del vector $\overrightarrow{OI}$ si I es el punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$.