Unidad 1. Ecuaciones

Competencia de la unidad

Resolver ecuaciones bicuadráticas, radicales, racionales y sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas, utilizando herramientas de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas para aplicarlo en problemas algebraicos.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 5: Ecuaciones de primer grado (7°)
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuación de primer grado
- Aplicaciones de ecuaciones de primer grado

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (8°)
- Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Unidad 3: Ecuación cuadrática (9°)
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notables y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Segundo año de bachillerato

Unidad 1: Ecuaciones
- Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Unidad 3: Secciones cónicas
- La parábola
- La circunferencia
- La elipse
- La hipérbola
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones	1	1. Ecuaciones bicuadráticas, parte 1
	1	2. Ecuaciones bicuadráticas, parte 2
	1	3. Ecuaciones radicales, parte 1
	1	4. Ecuaciones radicales, parte 2
	1	5. Ecuaciones radicales, parte 3
	1	6. Mínimo común múltiplo de polinomios
	1	7. Ecuaciones racionales
	1	8. Sistemas de ecuaciones
	1	9. Practica lo aprendido
	1	10. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la unidad 1

10 horas clase + prueba de la unidad 1

Puntos esenciales de la lección

Lección 1: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Se resuelven ecuaciones bicuadráticas y se establece el número de soluciones reales e imaginarias que tienen. Luego se resuelven ecuaciones radicales; en este tipo de ecuaciones no se admiten soluciones complejas. Se establece el método de resolución de ecuaciones racionales, multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores para convertirlas a ecuaciones polinomiales. Se finaliza la unidad con la resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, donde una de ellas es lineal y la otra es de grado dos en una de las variables.

1.1 Ecuaciones bicuadráticas, parte 1

Problema inicial

Resuelve la ecuación $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$, haciendo los siguientes pasos:

1. Realiza el cambio de variable $y = x^2$.
2. Resuelve la ecuación de grado dos que resulta en 1.
3. Encuentra las soluciones de la ecuación original.

Solución

1. Si se observa la ecuación, puede escribirse como $(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = 0$, por lo que al hacer el cambio de variable $y = x^2$ se tiene
$$(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = y^2 - 25y + 144 = 0.$$

2. Se puede resolver esta ecuación cuadrática factorizando, por lo que se buscan dos números que multiplicados den 144 y sumados den -25,
$$y^2 - 25y + 144 = (y - 16)(y - 9) = 0.$$
De aquí se tiene que $y - 16 = 0$ o bien $y - 9 = 0$. Es decir, $y = 16$ o bien $y = 9$.

3. De 1 se tiene que $y = x^2$ y de 2 se sabe que $y = 16$ o $y = 9$. Entonces
$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \text{ o bien } x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$
Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ son $x = -4, -3, 3, 4$.

Definición

Las ecuaciones de la forma $\text{A}x^4 + \text{B}x^2 + \text{C} = 0$, donde A es distinto de cero, se llaman ecuaciones **bicuadráticas**.

Las ecuaciones bicuadráticas pueden resolverse haciendo el cambio de variable $y = x^2$ y resolviendo la ecuación cuadrática que resulta. Las ecuaciones bicuadráticas tienen cuatro soluciones, ya sean todas reales, todas imaginarias o dos reales y dos imaginarias.

Ejemplo

Determina todas las soluciones complejas de la ecuación $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$.

Al hacer el cambio de variable $y = x^2$, la ecuación resultante es $y^2 - 24y - 25 = 0$. Al factorizar se tiene
$$y^2 - 24y - 25 = (y - 25)(y + 1) = 0.$$

Luego, $y - 25 = 0$ o bien $y + 1 = 0$.

- Si $y - 25 = 0$ entonces $y = 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$.
- Si $y + 1 = 0$ entonces $y = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

De la Unidad 2 de Primer año de bachillerato se sabe que $\sqrt{-1} = i$

Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$ son $x = -5, 5, i, -i$.

Problemas

Resuelve:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

e) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

f) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

Indicador de logro

1.1 Resuelve ecuaciones bicuadráticas de la forma $x^4 + Bx^2 + C = 0$.

Secuencia

Se resuelve un tipo particular de ecuaciones, de la forma $x^4 + Bx^2 + C = 0$, donde B y C son números enteros, y al menos uno distinto de cero. Se resuelven utilizando la factorización.

Propósito

Resolver ecuaciones de la forma $x^4 + Bx^2 + C = 0$, realizando el cambio de variable $y = x^2$. Observar que el coeficiente de x^4 será siempre 1 en esta clase.

Solución de problemas:

a) Haciendo $y = x^2$ se tiene que $x^4 - 5x^2 + 4 = y^2 - 5y + 4 = 0$. Al factorizar, se obtiene:

$$y^2 - 5y + 4 = (y - 4)(y - 1) = 0.$$

Luego, $y - 4 = 0$ o bien $y - 1 = 0$.

- Si $y - 4 = 0$ entonces $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.
- Si $y - 1 = 0$ entonces $y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ son $x = -2, 2, -1, 1$.

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = y^2 - 13y + 36 = 0$. Al factorizar, se obtiene:

$$y^2 - 13y + 36 = (y - 9)(y - 4) = 0.$$

- Si $y - 9 = 0$ entonces $y = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
- Si $y - 4 = 0$ entonces $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ son $x = -3, 3, -2, 2$.

c) $x^4 - 29x^2 + 100 = y^2 - 29y + 100 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 29y + 100 = (y - 25)(y - 4) = 0.$

- Si $y - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$.
- Si $y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -5, 5, -2, 2$.

d) $x^4 - 8x^2 - 9 = y^2 - 8y - 9 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 8y - 9 = (y - 9)(y + 1) = 0.$

- Si $y - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
- Si $y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -3, 3, -i, i$.

e) $x^4 + 5x^2 + 4 = y^2 + 5y + 4 = 0$

$\Rightarrow y^2 + 5y + 4 = (y + 1)(y + 4) = 0.$

- Si $y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.
- Si $y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -i, i, -2i, 2i$.

f) $x^4 + 4x^2 + 3 = y^2 + 4y + 3 = 0$

$\Rightarrow y^2 + 4y + 3 = (y + 3)(y + 1) = 0.$

- Si $y + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}i$.
- Si $y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\sqrt{3}i, \sqrt{3}i, -i, i$.

1.2 Ecuaciones bicuadráticas, parte 2

Problema inicial

Resuelve la ecuación $2x^4 - 15x^2 + 27 = 0$.

Solución

Al hacer el cambio de variable $y = x^2$ resulta $2y^2 - 15y + 27 = 0$. Al resolver la ecuación por factorización, se obtiene con el método de la tijera que $2y^2 - 15y + 27 = (2y - 9)(y - 3) = 0$.

$$\begin{array}{lrr} 2y^2 - 15y + 27 & & \\ 2y & -9 \rightarrow & -9y \\ y & -3 \rightarrow & -6y \\ \hline 2y^2 & 27 & -15y \end{array}$$

De aquí resulta

- $2y - 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$. Es decir, $x^2 = \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

- $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$. Es decir, $x^2 = 3$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Por lo tanto, las soluciones de $2x^4 - 15x^2 + 27 = 0$ son $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

Conclusión

Una expresión de la forma $Ax^4 + Bx^2 + C$ puede factorizarse en la forma $(ax^2 + b)(cx^2 + d)$ mediante el método de la tijera. Con este recurso puede evitarse el cambio de variable $y = x^2$ para resolver las ecuaciones bicuadráticas.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $2x^4 + 33x^2 + 16 = 0$.

Al factorizar $2x^4 + 33x^2 + 16$ con el método de la tijera se obtiene

$$2x^4 + 33x^2 + 16 = (2x^2 + 1)(x^2 + 16) = 0.$$

De aquí resulta

- $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$. Es decir,

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

- $x^2 + 16 \Rightarrow x^2 = -16$. Es decir, $x = \pm 4i$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $2x^4 + 33x^2 + 16 = 0$ son $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i, -4i, 4i$.

Problemas

Resuelve:

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

c) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$

d) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

e) $8x^4 - x^2 - 7 = 0$

f) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

Indicador de logro

1.2 Resuelve ecuaciones bicuadráticas de la forma $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$.

Secuencia

Se continúa con la resolución de las ecuaciones bicuadráticas de la forma $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$, con A, B, C enteros, A distinto de cero y B o C distinto de cero.

Propósito

Resolver ecuaciones de la forma $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$. En esta clase, el coeficiente del término de mayor grado es distinto de 1. En esta ocasión, se resuelven las ecuaciones de manera directa, es decir, sin realizar el cambio de variable que se hizo en la clase anterior.

Solución de problemas:

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (4x^2 - 1)(x^2 - 1) = 0$.

Entonces,

- $4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$.
- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1$.

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (9x^2 - 1)(4x^2 - 1) = 0$.

Entonces,

- $9x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$.
- $4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

c) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0 \Rightarrow (9x^2 - 4)(x^2 - 4) = 0$.

Entonces,

- $9x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}$.
- $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -2, 2$.

d) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (9x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$.

Entonces,

- $9x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}$.
- $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -i, i$.

e) $8x^4 - x^2 - 7 = 0 \Rightarrow (8x^2 + 7)(x^2 - 1) = 0$.

Entonces,

- $8x^2 + 7 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{7}{8} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{14}}{4}i$.
- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\frac{\sqrt{14}}{4}i, \frac{\sqrt{14}}{4}i, -1, 1$.

f) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (3x^2 + 1)(x^2 + 1) = 0$.

Entonces

- $3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}i$.
- $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i, -i, i$.

1.3 Ecuaciones radicales, parte 1

Problema inicial

Resuelve la ecuación $\sqrt{x} - 3 = 5$.

Solución

Para resolver una ecuación de esta forma, donde aparecen radicales, se despeja el radical para luego elevar al cuadrado.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 3 &= 5 \\ \sqrt{x} &= 5 + 3 && \text{se despeja el radical,} \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 &= 8^2 && \text{se eleva al cuadrado,} \\ x &= 64. \end{aligned}$$

Al comprobar la solución, se tiene que $\sqrt{64} - 3 = 8 - 3 = 5$. Luego, $x = 64$ satisface la ecuación original, por lo tanto, $x = 64$ es la solución.

Definición

Una **ecuación radical** es aquella donde la incógnita o incógnitas aparecen bajo el signo radical.

Una ecuación radical puede convertirse a una ecuación donde no aparezcan radicales, despejando el radical y elevando al cuadrado.

Al haber resuelto la ecuación radical, hay que comprobar que los valores encontrados satisfacen la ecuación, sustituyéndolos en la ecuación original y comprobando la igualdad.

No se considerarán como soluciones aquellos valores que al comprobarlos en la ecuación original resulten números complejos.

Ejemplo

Resuelve $2\sqrt{2x + 1} - 6 = 0$.

Al despejar el radical y elevar al cuadrado se obtiene

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2x+1} - 6 &= 0 \\ 2\sqrt{2x+1} &= 6 \\ \sqrt{2x+1} &= 3 && \text{se despeja el radical,} \\ 2x + 1 &= 9 && \text{se obtiene una ecuación lineal la cual hay que resolver,} \\ 2x &= 8 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Al comprobar la solución se tiene: $2\sqrt{2(4) + 1} - 6 = 2\sqrt{9} - 6 = 2(3) - 6 = 6 - 6 = 0$. Por lo tanto, $x = 4$ es la solución de la ecuación.

Problemas

Resuelve las ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{x + 3} = 4$

b) $\sqrt{x - 8} = 2$

c) $5 - \sqrt{3x + 1} = 0$

d) $5 + 3\sqrt{x} = 8$

e) $7 - \sqrt{x + 2} = 3$

f) $\sqrt{x + 3} = \sqrt{5x - 1}$

Indicador de logro

1.3 Calcula soluciones de ecuaciones radicales que pueden reducirse a ecuaciones lineales.

Secuencia

Se tiene un primer encuentro con la resolución de ecuaciones que contienen radicales, a las cuales se les llama ecuaciones radicales.

Las ecuaciones a resolver solo tienen radicales con índice 2, ya que las propiedades de potencias mayor que 2 se trabajan hasta la unidad 4.

Propósito

Resolver ecuaciones radicales de índice 2, que se reducen a ecuaciones lineales sencillas.

Solución de problemas:

a) $\sqrt{x+3} = 4 \Rightarrow x + 3 = 16 \Rightarrow x = 13.$

Al comprobar, se tiene que $\sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4.$ ✓

Por lo tanto, $x = 13$ es la solución.

b) $\sqrt{x-8} = 2 \Rightarrow x - 8 = 4 \Rightarrow x = 12.$

Al comprobar, se tiene que $\sqrt{12-8} = \sqrt{4} = 2.$ ✓

Por lo tanto, $x = 12$ es la solución.

c) $5 - \sqrt{3x+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{3x+1} = 5 \Rightarrow 3x + 1 = 25 \Rightarrow x = 8.$

Al comprobar, se tiene que $5 - \sqrt{3(8)+1} = 5 - \sqrt{25} = 0.$ ✓

Por lo tanto, $x = 8$ es la solución.

d) $5 + 3\sqrt{x} = 8 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1.$

Al comprobar, se tiene que $5 + 3\sqrt{1} = 8.$ ✓

Por lo tanto, $x = 1$ es la solución.

e) $7 - \sqrt{x+2} = 3 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 4 \Rightarrow x + 2 = 16 \Rightarrow x = 14.$

Al comprobar, se tiene que $7 - \sqrt{14+2} = 7 - \sqrt{16} = 3.$ ✓

Por lo tanto, $x = 14$ es la solución.

f) $\sqrt{x+3} = \sqrt{5x-1} \Rightarrow x + 3 = 5x - 1 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1.$

Al comprobar, se tiene que $\sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 = \sqrt{5(1)-1}.$ ✓

Por lo tanto, $x = 1$ es la solución.

Lección 1

1.4 Ecuaciones radicales, parte 2

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$ b) $\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{2x} = x$

Solución

a) De la misma forma que en la clase anterior, se despeja el radical y luego se eleva al cuadrado.

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 - 15} - 2x &= -1 \\ \sqrt{4x^2 - 15} &= 2x - 1 \\ 4x^2 - 15 &= 4x^2 - 4x + 1 \quad \text{elevando al cuadrado y desarrollando,} \\ \cancel{4x^2} - 15 &= \cancel{4x^2} - 4x + 1 \\ 4x &= 16 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Se comprueba que 4 sea solución de la ecuación sustituyendo en la ecuación original

$$\sqrt{4(4)^2 - 15} - 2(4) = \sqrt{64 - 15} - 8 = \sqrt{49} - 8 = 7 - 8 = -1$$

Por lo tanto, $x = 4$ es solución de la ecuación $\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$.

b) Esta ecuación tiene dos radicales, por lo que se procura que ambos queden en miembros distintos.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{2x} &= x \\ \left(\sqrt{x^2 + 6x}\right)^2 &= \left(x + \sqrt{2x}\right)^2 \\ x^2 + 6x &= x^2 + 2x\sqrt{2x} + 2x \quad \text{desarrollando el binomio al cuadrado,} \\ \cancel{x^2} + 6x - 2x &= \cancel{x^2} + 2x\sqrt{2x} \\ (4x)^2 &= \left(2x\sqrt{2x}\right)^2 \\ 16x^2 &= 4x^2(2x) \\ 16x^2 - 4x^2(2x) &= 0 \\ 4x^2(4 - 2x) &= 0. \end{aligned}$$

Es recomendable no dividir entre $4x^2$ ya que no se sabe si puede ser cero.

De aquí se tiene que $4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, o bien $4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$. Comprobando ambos valores en la ecuación original,

$x = 0$: $\sqrt{0^2 + 6(0)} - \sqrt{2(0)} \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

$x = 2$: $\sqrt{2^2 + 6(2)} - \sqrt{2(2)} \overset{?}{=} 2$
$\Rightarrow \sqrt{4 + 12} - \sqrt{4} \overset{?}{=} 2$
$\Rightarrow 4 - 2 \overset{?}{=} 2$
$\Rightarrow 2 = 2$ ✓

Luego, $x = 0$ y $x = 2$ son las soluciones de la ecuación $\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{2x} = x$.

Conclusión

Al resolver ecuaciones radicales pueden resultar ecuaciones de grado mayor a 1 que pueden resolverse mediante factorización o mediante la fórmula general, cuando la ecuación resultante es una cuadrática que no pueda resolverse por factorización.

Problemas

Resuelve las ecuaciones radicales.

a) $x + 2 = \sqrt{x^2 + 1}$ b) $3\sqrt{2x - 1} = 3x$

c) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{4x + 5} = -1$ d) $\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x + 2} = 0$

e) $\sqrt{3x - 11} + \sqrt{3x} = \sqrt{12x - 23}$ f) $\sqrt{9x - 8} - \sqrt{4x + 1} = \sqrt{x - 3}$

Indicador de logro

1.4 Resuelve ecuaciones radicales que pueden reducirse a ecuaciones lineales o cuadráticas.

Secuencia

Se resuelven ecuaciones radicales que se reducen a ecuaciones lineales o ecuaciones cuadráticas. Nuevamente, el índice del radical siempre es 2.

Propósito

Continuar con la resolución de ecuaciones radicales, en esta ocasión se aborda el caso en el cual es necesario elevar al cuadrado dos veces.

Solución de problemas:

Las siguientes soluciones no tienen comprobación, sin embargo, el estudiante deberá hacerlo.

a) $x + 2 = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \cancel{x^2} + 4x + 4 = \cancel{x^2} + 1 \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$.

b) $3\sqrt{2x - 1} = 3x \Rightarrow \sqrt{2x-1} = x \Rightarrow 2x - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

c)
$$\begin{aligned}
\sqrt{3x+1} - \sqrt{4x+5} &= -1\\
\sqrt{3x+1} &= -1 + \sqrt{4x+5}\\
3x + 1 &= 1 - 2\sqrt{4x+5} + 4x + 5\\
2\sqrt{4x+5} &= x + 5\\
4(4x+5) &= x^2 + 10x + 25\\
x^2 - 6x + 5 &= 0\\
(x-5)(x-1) &= 0
\end{aligned}$$

Entonces, $x = 5$ o $x = 1$.

d)
$$\begin{aligned}
\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+2} &= 0\\
\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} &= 2\sqrt{x+2}\\
x + 7 + 2\sqrt{x+7}\sqrt{x-1} + x - 1 &= 4(x+2)\\
2\sqrt{x^2 + 6x - 7} &= 2x + 2\\
\sqrt{x^2 + 6x - 7} &= x + 1\\
\cancel{x^2} + 6x - 7 &= \cancel{x^2} + 2x + 1\\
4x &= 8
\end{aligned}$$

Entonces, $x = 2$.

e)
$$\begin{aligned}
\sqrt{3x-11} + \sqrt{3x} &= \sqrt{12x-23}\\
3x - 11 + 2\sqrt{3x-11}\sqrt{3x} + 3x &= 12x - 23\\
2\sqrt{9x^2 - 33x} &= 6x - 12\\
\sqrt{9x^2 - 33x} &= 3x - 6\\
\cancel{9x^2} - 33x &= \cancel{9x^2} - 36x + 36\\
3x &= 36
\end{aligned}$$

Entonces, $x = 12$.

f)
$$\begin{aligned}
\sqrt{9x-8} - \sqrt{4x+1} &= \sqrt{x-3}\\
9x - 8 - 2\sqrt{9x-8}\sqrt{4x+1} + 4x + 1 &= x - 3\\
2\sqrt{36x^2 - 23x - 8} &= 12x - 4\\
\sqrt{36x^2 - 23x - 8} &= 6x - 2\\
36x^2 - 23x - 8 &= 36x^2 - 24x + 4\\
x &= 12
\end{aligned}$$

Entonces, $x = 12$.

1.5 Ecuaciones con radicales, parte 3

Problema inicial

Resuelve $x + \sqrt{4x+1} = 5$.

Solución

Se despeja el radical y se eleva al cuadrado

$$x + \sqrt{4x+1} = 5$$
$$\sqrt{4x+1} = 5 - x$$
$$\left(\sqrt{4x+1}\right)^2 = (5-x)^2$$
$$4x + 1 = 25 - 10x + x^2$$
$$x^2 - 14x + 24 = 0 \quad \text{se resuelve la ecuación cuadrática resultante,}$$
$$(x-2)(x-12) = 0.$$

Entonces, $x - 2 = 0$ o $x - 12 = 0$. Así, $x = 2$ o $x = 12$. Al comprobar las soluciones en la ecuación original se tiene:

$x = 2$: $2 + \sqrt{4(2)+1} = 2 + \sqrt{8+1} = 2 + 3 = 5$ ✓

$x = 12$: $12 + \sqrt{4(12)+1} = 12 + \sqrt{48+1} = 12 + 7 = 19 \neq 5$ ✗

Por lo tanto, $x = 2$ es la solución de $x + \sqrt{4x+1} = 5$.

La razón por la cual las soluciones de la ecuación obtenida al elevar al cuadrado no necesariamente son las soluciones de la ecuación original es porque si $A^2 = B^2$ no significa que $A = B$.

Por ejemplo, $3^2 = (-3)^2$ pero $3 \neq -3$.

Conclusión

No hay una forma de determinar el número de soluciones de una ecuación radical, por lo que cada valor encontrado al resolver la ecuación debe comprobarse sustituyéndolo en la ecuación original.

Ejemplo

Resuelve $\sqrt{2x^2 - 1} = \sqrt{x}$.

En esta ocasión hay dos radicales, por lo que se procura que ambos queden en miembros distintos de la ecuación.

$$\left(\sqrt{2x^2-1}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2$$
$$2x^2 - 1 = x$$
$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Esta ecuación puede resolverse por factorización y puede comprobarse que

$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) = 0.$$

Entonces, o bien $x = 1$ o bien $x = -\frac{1}{2}$. Lo primero que puede observarse es que x no puede ser $-\frac{1}{2}$, ya que el radical $\sqrt{x}$ no sería un número real.

Comprobando para $x = 1$, se tiene $\sqrt{2(1)^2 - 1} = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$. ✓

Por lo tanto, $x = 1$ es la solución de $\sqrt{2x^2-1} = \sqrt{x}$.

Problemas

Resuelve cada ecuación radical.

a) $3x + \sqrt{x-1} = 2x + 7$

b) $\sqrt{5x+1} - \sqrt{2x+1} = 2$

c) $2 - \sqrt{2x+3} = 2x - 1$

d) $x = 2\sqrt{x+2} + 1$

e) $\sqrt{3x+10} = 5 - 3\sqrt{x+3}$

f) $\sqrt{3x+7} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{13-3x}$

Indicador de logro

1.5 Resuelve ecuaciones radicales reducibles a ecuaciones cuadráticas.

Secuencia

La diferencia entre esta clase y la anterior, es que durante el proceso de resolución de la ecuación puede obtenerse un valor de la incógnita que resulta no ser solución de la ecuación original.

Solución de problemas:

a)

$$3x + \sqrt{x-1} = 2x + 7$$
$$\sqrt{x-1} = -x + 7$$
$$x - 1 = x^2 - 14x + 49$$
$$x^2 - 15x + 50 = 0$$
$$(x-10)(x-5) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = 10 \text{ o } x = 5$$

Al comprobar las soluciones se obtiene que la única solución es $x = 5$.

b)

$$\sqrt{5x+1} - \sqrt{2x+1} = 2$$
$$\sqrt{5x+1} = 2 + \sqrt{2x+1}$$
$$5x + 1 = 4 + 4\sqrt{2x+1} + 2x + 1$$
$$4\sqrt{2x+1} = 3x - 4$$
$$16(2x+1) = 9x^2 - 24x + 16$$
$$9x^2 - 56x = 0$$
$$x(9x - 56) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = 0 \text{ o } x = \frac{56}{9}$$

Al comprobar las soluciones se obtiene que la única solución es $x = \frac{56}{9}$.

c)

$$2 - \sqrt{2x+3} = 2x - 1$$
$$-\sqrt{2x+3} = 2x - 3$$
$$2x + 3 = 4x^2 - 12x + 9$$
$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$
$$(2x-1)(x-3) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = \frac{1}{2} \text{ o } x = 3.$$

Al comprobar las soluciones se obtiene que la única solución es $x = \frac{1}{2}$.

d)

$$x = 2\sqrt{x+2} + 1$$
$$2\sqrt{x+2} = x - 1$$
$$4(x+2) = x^2 - 2x + 1$$
$$x^2 - 6x - 7 = 0$$
$$(x-7)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = 7 \text{ o } x = -1$$

Al comprobar las soluciones se obtiene que la única solución es $x = 7$.

e)

$$\sqrt{3x+10} = 5 - 3\sqrt{x+3}$$
$$3x + 10 = 25 - 30\sqrt{x+3} + 9x + 27$$
$$5\sqrt{x+3} = x + 7$$
$$25(x+3) = x^2 + 14x + 49$$
$$x^2 - 11x - 26 = 0$$
$$(x-13)(x+2) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = 13 \text{ o } x = -2$$

Al comprobar las soluciones se obtiene que la única solución es $x = -2$.

f)

$$\sqrt{3x+7} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{13-3x}$$
$$3x + 7 + 2\sqrt{6x^2 + 32x + 42} + 2x + 6 = 13 - 3x$$
$$2\sqrt{6x^2 + 32x + 42} = -8x$$
$$\sqrt{6x^2 + 32x + 42} = -4x$$
$$6x^2 + 32x + 42 = 16x^2$$
$$5x^2 - 16x - 21 = 0$$
$$(5x-21)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow\ x = \frac{21}{5} \text{ o } x = -1$$

Al comprobar las soluciones se obtiene que la única solución es $x = -1$.

1.6 Mínimo común múltiplo de polinomios*

Problema inicial

Calcula el mínimo común múltiplo en cada caso.

a) 4, 6, 15 b) $6x$, $3x + 1$, $6x + 2$ c) $2m + 3$, $2m - 3$, $4m^2 - 9$

Factorizar polinomios es análogo a descomponer números en sus factores primos.

Solución

a) Para calcular el mínimo común múltiplo de 4, 6 y 15, se descompone cada número en sus factores primos.

$$4 = 2^2, \qquad 6 = 2(3), \qquad 15 = 3(5).$$

Luego, el mínimo común múltiplo de 4, 6 y 15 es $2^2(3)(5) = 4(3)(5) = 60$.

b) Para calcular el mínimo común múltiplo se hace de manera análoga que con números. Primero se factoriza cada expresión.

$6x = 2(3)x$, $3x + 1$ ya no puede factorizarse, $6x + 2 = 2(3x + 1)$.

Luego, el mínimo común múltiplo de $6x$, $3x + 1$ y $6x + 2$ es $2(3)(x)(3x+1) = 6(3x^2 + x) = 18x^2 + 6x$.

c) De igual manera que en b), se factoriza cada expresión y el mínimo común múltiplo será el producto de cada factor común y no común que aparece en cada factorización, con la mayor potencia que aparezca entre las tres expresiones.

$2m + 3$ y $2m - 3$ no pueden factorizarse y $4m^2 - 9 = (2m - 3)(2m + 3)$, por diferencia de cuadrados.

Por lo tanto, el mínimo común múltiplo de $2m + 3$, $2m - 3$ y $4m^2 - 9$ es $(2m - 3)(2m + 3)$.

Conclusión

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor número entre sus múltiplos comunes, y se denota por mcm.

Para calcular el mínimo común múltiplo de dos o más números, se descompone cada número en sus factores primos y se toma el producto de cada factor común y no común, con la mayor potencia a la que aparece.

También puede calcularse el mcm de expresiones algebraicas de manera análoga: se factoriza completamente cada expresión y el mcm será el producto de todos los factores, común y no común, con la mayor potencia a la que aparece.

Ejemplo

Calcula el mcm de $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$ y $x^2 - y^2$.

Se factoriza cada una de las expresiones anteriores:

$x + y$, $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Observación: No es necesario desarrollar $(x + y)^2(x - y)$.

Por lo tanto, el mcm de $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$ y $x^2 - y^2$ es $(x + y)^2(x - y)$.

Problemas

Calcula el mcm para cada caso.

a) x^2, y^2, xy
b) $x + 5$, $x^2 - 25$, $x - 5$
c) $3a + 6$, $a^2 - 4$
d) 2, $x - 3$, $2x - 6$
e) $m - 1$, $m^2 - 1$, $m + 1$
f) $3x + 15$, $x^2 - 25$, $6x$, $x - 5$

Indicador de logro

1.6 Determina el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios.

Secuencia

Se define el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios haciendo la analogía con el mínimo común múltiplo de dos o más números.

Si el estudiante tiene muchas dificultades en la solución del Problema inicial, el docente debe brindar más apoyo.

Propósito

El Problema inicial tiene tres casos. El primero tiene el objetivo de recordar la forma de calcular el mcm de dos o más números descomponiéndolos en sus factores primos. El segundo y el tercero tienen como objetivo calcular el mcm de los polinomios dados, aplicando el método del primer problema, descomponiendo en factores los polinomios hasta que ya no puedan factorizarse más.

Solución de problemas:

a) x^2, y^2, xy

El mcm es x^2y^2.

b) $x + 5$, $x^2 - 25$, $x - 5$

Como $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$ se tiene que el mcm de los tres polinomios es $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$.

c) $3a + 6$, $a^2 - 4$

$3a + 6 = 3(a + 2)$ y $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$. Entonces el mcm de ambos polinomios es

$$3(a + 2)(a - 2) = 3(a^2 - 4) = 3a^2 - 12.$$

d) 2, $x - 3$, $2x - 6$

Como $2x - 6 = 2(x - 3)$, el mcm de los tres polinomios es $2(x - 3) = 2x - 6$.

e) $m - 1$, $m^2 - 1$, $m + 1$

Como $m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1)$, se tiene que el mcm de los tres polinomios es $(m + 1)(m - 1) = m^2 - 1$.

f) $3x + 15$, $x^2 - 25$, $6x$, $x - 5$

$3x + 15 = 3(x + 5)$, $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$ y $6x = (2)(3)x$.

Entonces, el mcm de los cuatro polinomios es

$$(2)(3)(x + 5)(x - 5)x = 6(x^2 - 25)x = 6x^3 - 150x.$$

1.7 Ecuaciones racionales

Problema inicial

Resuelve cada ecuación.

a) $\frac{x+1}{x-2} = 4$

b) $\frac{1}{x+3} - \frac{3}{2x-1} = \frac{5}{2x^2+5x-3}$

Solución

a) Cuando se tienen ecuaciones de esta forma, lo primero que hay que hacer es restringir los valores que puede tomar x, ya que pueden resultar divisiones entre cero, que no están definidas. Por lo tanto, en este caso, x no puede ser 2 ya que $x - 2$ se vuelve cero. Luego, hay que eliminar el denominador, y para ello se multiplica toda la ecuación por $x - 2$,

$$(x-2)\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = 4(x-2)$$

$$\cancel{(x-2)}\left(\frac{x+1}{\cancel{x-2}}\right) = 4(x-2)$$

$$x + 1 = 4x - 8 \qquad \text{se resuelve la ecuación lineal,}$$

$$3x = 9$$

$$x = 3.$$

Si $x = 3$ el denominador $x - 2$ no se anula: $3 - 2 = 1$.

Por lo tanto, $x = 3$ es la solución de la ecuación.

b) De nuevo, el objetivo es eliminar los denominadores. En este caso, como los tres denominadores son distintos, se debe multiplicar la ecuación por el mcm de estos.

Las expresiones $x + 3$ y $2x - 1$ no pueden factorizarse y $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$, por lo que el mcm de los tres denominadores es $(2x - 1)(x + 3)$. Además, x no puede ser -3 y $\frac{1}{2}$ ya que en ese caso algún denominador se vuelve cero. Entonces,

$$(2x-1)(x+3)\left(\frac{1}{x+3} - \frac{3}{2x-1}\right) = (2x-1)(x+3)\left(\frac{5}{2x^2+5x-3}\right)$$

$$(2x-1)\cancel{(x+3)}\frac{1}{\cancel{x+3}} - \cancel{(2x-1)}(x+3)\left(\frac{3}{\cancel{2x-1}}\right) = \cancel{(2x-1)(x+3)}\left(\frac{5}{\cancel{2x^2+5x-3}}\right)$$

$$2x - 1 - 3(x+3) = 5$$

$$2x - 1 - 3x - 9 - 5 = 0$$

$$-x - 15 = 0$$

$$x = -15$$

Si $x = -15$, ningún denominador se anula al evaluar -15 en cada uno de ellos. Por lo tanto, $x = -15$ es la solución de la ecuación.

Definición

Una ecuación que contiene fracciones y tal que la incógnita aparece en algún denominador se llama **ecuación racional**. Como en una ecuación racional la incógnita aparece en el denominador, se deben considerar valores de la incógnita que no hagan cero a algún denominador.

Para resolver una ecuación racional, primero debe analizarse qué valores de la incógnita hacen cero a algún denominador. Luego se multiplica toda la ecuación por el mcm de ellos y luego se resuelve la ecuación resultante. Se descartan aquellos valores de la incógnita que hagan cero a algún denominador en la ecuación original.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1}$.

En este caso, x no puede tomar los valores de 0 y 1. Además, el mcm de $x - 1$ y $x^2 - x$ es $x(x - 1)$, entonces,

$$x(x-1)\left(\frac{4}{x-1}\right) = x(x-1)\left(\frac{3}{x^2-x}\right) + x(x-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$x\cancel{(x-1)}\left(\frac{4}{\cancel{x-1}}\right) = \cancel{x(x-1)}\left(\frac{3}{\cancel{x^2-x}}\right) + x\cancel{(x-1)}\left(\frac{x}{\cancel{x-1}}\right)$$

$$4x = 3 + x^2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

Entonces, $x = 3$ o $x = 1$. Pero $x \neq 1$, por lo que esa solución queda descartada.

Por lo tanto, $x = 3$ es la solución de la ecuación $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1}$.

No es necesario comprobar que la solución es $x = 3$ sustituyendo en la ecuación original, porque si $x \neq 1$ y $x \neq 0$, entonces multiplicar por $x(x - 1)$ es una operación reversible.

$$\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1} \quad \xrightarrow{\times\, x(x-1)} \quad 4x = 3 + x^2 \quad \xrightarrow{\div\, x(x-1)} \quad \frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1}$$

Problemas

Resuelve cada ecuación racional.

a) $\frac{1}{x} = 3$

b) $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{5x} - 3 = 0$

d) $\frac{1}{2x+1} = 3$

e) $x + 3 = \frac{2x^2}{2x-1}$

f) $\frac{x-4}{x-1} = \frac{1-x}{x+1}$

g) $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+3} = 0$

h) $\frac{1}{2x} + \frac{3}{5x} = \frac{11}{x^2}$

Indicador de logro

1.7 Resuelve ecuaciones racionales, con polinomios de grado uno y dos.

Secuencia

Se resuelven ecuaciones racionales, donde en al menos un denominador aparece un polinomio lineal. Se utiliza el resultado de la clase anterior para determinar por cuánto hay que multiplicar la ecuación para simplificar los denominadores y obtener una ecuación polinomial.

Propósito

Con respecto al Problema inicial, el literal a) pretende introducir el método de resolución de una ecuación racional, mientras que el literal b procura afianzar el método estudiado en a), además de ser más notable la necesidad de buscar el mcm de los denominadores. Al resolver el Ejemplo, se obtiene un valor de x para el cual no es solución de la ecuación original, ya que hace cero uno de los denominadores.

Solución de problemas:

a) Multiplicando por x a ambos lados:

$$\frac{1}{x} = 3 \Rightarrow 1 = 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

b) El mcm de x y 2 es $2x$. Multiplicando por $2x$ a ambos lados:

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(3) = 1(x) \Rightarrow x = 6.$$

c) Multiplicando por $5x$ a ambos lados:

$$\frac{4}{5x} - 3 = 0 \Rightarrow 4 - 3(5x) = 0(5x) \Rightarrow 4 - 15x = 0 \Rightarrow 15x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{15}.$$

d) Multiplicando por $2x + 1$ a ambos lados:

$$\frac{1}{2x+1} = 3 \Rightarrow 1 = 3(2x + 1) \Rightarrow 1 = 6x + 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

e) Multiplicando por $2x - 1$:

$$x + 3 = \frac{2x^2}{2x-1}$$
$$(x + 3)(2x - 1) = 2x^2$$
$$2x^2 + 5x - 3 = 2x^2$$
$$5x - 3 = 0$$
$$x = \frac{3}{5}.$$

f) El mcm de los denominadores es $(x - 1)(x + 1)$. Entonces,

$$\frac{x-4}{x-1} = \frac{1-x}{x+1}$$
$$(x - 4)(x + 1) = (1 - x)(x - 1)$$
$$x^2 - 3x - 4 = -x^2 + 2x - 1$$
$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$
$$(2x + 1)(x - 3) = 0$$

Entonces, $x = -\frac{1}{2}$ o $x = 3$.

g) El mcm de $x - 1$ y $x + 3$ es $(x - 1)(x + 3)$. Entonces,

$$\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+3} = 0$$
$$2(x + 3) - 3(x - 1) = 0$$
$$2x + 6 - 3x + 3 = 0$$
$$x = 9.$$

h) El mcm de $2x$, $5x$ y x^2 es $10x^2$. Entonces,

$$\frac{1}{2x} + \frac{3}{5x} = \frac{11}{x^2}$$
$$(10x^2)\left(\frac{1}{2x}\right) + (10x^2)\left(\frac{3}{5x}\right) = (10x^2)\left(\frac{11}{x^2}\right)$$
$$5x + 6x = 110$$
$$11x = 110$$
$$x = 10.$$

1.8 Sistemas de ecuaciones

Problema inicial

Determina todas las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Solución

Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones y luego se sustituye en la otra ecuación.

En este caso, resulta más fácil si se despeja y de la ecuación lineal,

$$y = 2 - x \qquad \text{------------------ (1)}$$

Luego, al sustituir y en la otra ecuación se tiene

$$x^2 - 3x - y + 2 = x^2 - 3x - (2 - x) + 2 = x^2 - 3x - 2 + x + 2 = x^2 - 2x = x(x - 2) = 0.$$

De aquí se tiene que $x = 0$ o $x = 2$.

Para determinar el valor de y se sustituye el valor de x en (1). Así, cuando $x = 0$, $y = 2$ y cuando $x = 2$, $y = 0$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son $x = 0$, $y = 2$ y $x = 2$, $y = 0$.

Conclusión

Para resolver un sistema de ecuaciones, donde una de ellas es lineal y la otra es de grado 2, se despeja una de las variables en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra, para luego resolver la ecuación en una variable resultante.

Es recomendable despejar en la ecuación lineal aquella variable que tiene menor grado en la ecuación de grado 2.

Ejemplo

Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Despejando y de la ecuación lineal se tiene que $y = x - 2$. Sustituyendo en la otra ecuación

$$x^2 + x + y - 1 = x^2 + x + (x - 2) - 1 = x^2 + x + x - 2 - 1 = x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Al resolver por factorización se tiene que $(x - 1)(x + 3) = 0$, por lo que $x = 1$ o $x = -3$.

Para $x = 1$ se tiene que $y = -1$ y para $x = -3$ se tiene que $y = -5$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son $x = 1$, $y = -1$ y $x = -3$, $y = -5$.

Problemas

Resuelve cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 2x - y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y - 3 = 0 \\ x^2 - 7x - y + 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = -14 \\ x^2 + 5x + y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ 2x^2 - x + y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x^2 + 4x + 2y = 1 \end{cases}$

Indicador de logro

1.8 Resuelve sistemas de ecuaciones donde una es lineal y la otra es de grado dos en una de las incógnitas.

Secuencia

Se culmina la unidad con la resolución de sistemas de ecuaciones, donde una de ellas es lineal y la otra es cuadrática en una de las variables.

Propósito

La idea es resolver este tipo de sistemas de ecuaciones despejando de la ecuación lineal aquella incógnita que tiene grado 1 en la ecuación cuadrática; hacer este despeje es más adecuado que despejar la que tiene grado 2.

Solución de problemas:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$

$x - y = 0 \Rightarrow x = y.$

Luego, $x^2 + y = 2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x + 2)(x - 1) &= 0 \\ x = -2 \text{ o } x &= 1 \end{aligned}$$

- Si $x = -2$ entonces $y = -2$.
- Si $x = 1$ entonces $y = 1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -2$, $y = -2$ y $x = 1$, $y = 1$.

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 2x - y = 3 \end{cases}$

$x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3.$

Luego, $x^2 + 2x - y = 3 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - x + 3 &= 3 \\ x^2 + x &= 0 \\ x(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $x = 0$ o $x = -1$.

- Si $x = 0$ entonces $y = -3$.
- Si $x = -1$ entonces $y = -4$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 0$, $y = -3$ y $x = -1$, $y = -4$.

c) $\begin{cases} 5x + y - 3 = 0 \\ x^2 - 7x - y + 3 = 0 \end{cases}$

$5x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 - 5x$

Luego, $x^2 - 7x - y + 3 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 7x - 3 + 5x + 3 &= 0 \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 0$ o $x = 2$.

- Si $x = 0$ entonces $y = 3$.
- Si $x = 2$ entonces $y = -7$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 0$, $y = 3$ y $x = 2$, $y = -7$.

d) $\begin{cases} 2x - y = -14 \\ x^2 + 5x + y = 4 \end{cases}$

$2x - y = -14 \Rightarrow y = 2x + 14$

Luego, $x^2 + 5x + y = 4$

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 2x + 14 &= 4 \\ x^2 + 7x + 10 &= 0 \\ (x + 5)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = -5$ o $x = -2$.

- Si $x = -5$ entonces $y = 4$.
- Si $x = -2$ entonces $y = 10$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -5$, $y = 4$ y $x = -2$, $y = 10$.

e) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ 2x^2 - x + y = 1 \end{cases}$

$3x + y = -5 \Rightarrow y = -5 - 3x$

Luego, $2x^2 - x + y = 1$

$$2x^2 - x - 5 - 3x - 1 = 0$$
$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$\Rightarrow x = 3$ o $x = -1$

- Si $x = 3$ entonces $y = -14$.
- Si $x = -1$ entonces $y = -2$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 3$, $y = -14$ y $x = -1$, $y = -2$.

f) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x^2 + 4x + 2y = 1 \end{cases}$

$2x - y = 7 \Rightarrow y = 2x - 7$

Luego, $-x^2 + 4x + 2y = 1$

$$-x^2 + 4x + 2(2x - 7) = 1$$
$$-x^2 + 4x + 4x - 14 - 1 = 0$$
$$-x^2 + 8x - 15 = 0$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$(x - 5)(x - 3) = 0$$

$\Rightarrow x = 5$ o $x = 3$.

- Si $x = 5$ entonces $y = 3$.
- Si $x = 3$ entonces $y = -1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 5$, $y = 3$ y $x = 3$, $y = -1$.

1.9 Practica lo aprendido

1. Determina todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 9x^2 = 0$

c) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

d) $x^4 - 16 = 0$

e) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

f) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

g) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

h) $2x^4 + 9 = 11x^2$

i) $3x^4 + 64 = 52x^2$

j) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{5x+9} = 2x + 3$

b) $\sqrt{2x+1} = x - 1$

c) $\sqrt{2x+16} = 2x + 4$

d) $\sqrt{x} + x = \sqrt{3x + x^2}$

e) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} = 7$

f) $\sqrt{x+16} - \sqrt{x} = 2$

g) $\sqrt{3x+12} - 1 = \sqrt{5x+9}$

h) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{3x-4}{3-x} = 2$

b) $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x}$

c) $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x+3}$

d) $\frac{2x+3}{5x-1} = \frac{6x+4}{15x+2}$

e) $\frac{4x-7}{12x+3} = \frac{x-16}{3x+5}$

f) $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2} = 3$

4. Determina todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + x - y + 3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x^2 - x - y - 5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x - y - 12 = 0 \\ x^2 + 2x - y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = -8 \\ x^2 + 2x + y = -7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8x - y - 20 = 0 \\ 3x^2 - 7x - y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x^2 + x + y = 6 \end{cases}$

Indicador de logro

1.9 Resuelve problemas correspondientes a la resolución de ecuaciones bicuadráticas, radicales, racionales y sistemas de ecuaciones.

Solución de problemas:

1a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 1) = 0$.
Entonces,

- $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -3, 3, -1, 1$.

1b) $x = 0, -3, 3$

1c) $x = -\sqrt{6}, \sqrt{6}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$

1d) $x = -2, 2, -2i, 2i$

1e) $x = -1, 1, -\sqrt{3}\,i, \sqrt{3}\,i$

1f) $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{5}\,i, \sqrt{5}\,i$

1g) $x = -2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

1h) $x = -1, 1, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}$

1i) $x = -4, 4, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$

1j) $x = -1, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i$

2a) $x = 0$

2b) $x = 4$

2c) $x = 0$

2d) $x = 0, 1$

2e) $x = 9$

2f)
$$\begin{aligned} \sqrt{x+16} - \sqrt{x} &= 2 \\ \sqrt{x+16} &= 2 + \sqrt{x} \\ x + 16 &= 4 + 4\sqrt{x} + x \\ 4\sqrt{x} &= 12 \\ \sqrt{x} &= 3 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Al comprobar se obtiene que
$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 2$.
Por lo tanto, $x = 9$ es la solución.

2g) $x = -1$

2h) $x = 2$

3a) $\frac{3x-4}{3-x} = 2 \Rightarrow 3x - 4 = 2(3 - x)$
$\Rightarrow 5x = 10$
$\Rightarrow x = 2$

3b) $x = -3$

3c) $x = -13$

3d) $x = -\frac{2}{7}$

3e) $x = -\frac{13}{188}$

3f) $x = \frac{10+\sqrt{7}}{3}, \frac{10-\sqrt{7}}{3}$

4a) $x = 0, y = 3$ y $x = -2, y = 5$

4b) $x = 4, y = 7$ y $x = -2, y = 1$

4c) $x = 2, y = 0$

4d) $x = 1, y = -10$ y $x = -1, y = -6$

4e) $x = 3, y = 4$ y $x = 2, y = -4$

4f) $x = -1 + \sqrt{6}, y = -7 + 3\sqrt{6}$
y $x = -1 - \sqrt{6}, y = -7 - 3\sqrt{6}$

1.10 Problemas de la unidad

1. Determina todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones bicuadráticas.

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

d) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$

e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

f) $8x^2 - 15 = x^4$

g) $3x^4 - 26x^2 - 9 = 0$

h) $12x^4 - 5x^2 - 3 = 0$

i) $-2x^4 - 9x^2 + 68 = 0$

j) $4x^4 = 13x^2 - 9$

k) $4x^4 = 5 - 19x^2$

l) $4x^4 + 91x^2 - 225 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{7 - 5x} = 8$

b) $x + \sqrt{5x + 19} = -1$

c) $2\sqrt{x} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{5 + x}$

d) $\sqrt{1 + 4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

e) $3\sqrt{2x - 3} + 2\sqrt{7 - x} = 11$

f) $\sqrt{7 - 2x} - \sqrt{5 + x} = \sqrt{4 + 3x}$

g) $\sqrt{2x + 15} - 2 = \sqrt{6x + 1}$

h) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{3x + 4} = \sqrt{5x + 9}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{5x + 1}{x + 2} + \frac{x - 1}{x} = 2$

b) $\frac{2x}{x + 6} + \frac{3x}{x + 4} = x$

4. Determina todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 6x - y + 2 = 0 \\ 2x^2 + 5x - y + 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 9 \\ 4x^2 - 12x - y + 9 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ x^2 - 4x + 7y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x^2 - 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$

5. En un mismo plano cartesiano:
   a) Grafica las ecuaciones $y = 2x - 2$ y $y = x^2 - 2x + 1$.
   b) Encuentra los valores x y y que satisfacen ambas ecuaciones mostradas en a).
   c) Ubica en el mismo plano cartesiano los pares ordenados (x, y), donde x y y son los calculados en b).
   d) ¿Qué sucede con los puntos ubicados en c) y las gráficas de las ecuaciones en a)?
   e) ¿Qué se puede concluir sobre resolver sistemas de ecuaciones donde una es una ecuación lineal y la otra es una ecuación cuadrática?

Indicador de logro

1.10 Resuelve problemas correspondientes a ecuaciones.

Solución de problemas:

1a) $x = -3, 3, -2i, 2i$

1b) $x = -i, i$

1c) $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{5}\,i, \sqrt{5}\,i$

1d) $x = -2, 2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

1e) $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1, 1$

1f) $x = -\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$

1g) $x = -3, 3, -\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i$

1h) $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i$

1i) $x = -2, 2, -\frac{\sqrt{34}}{2}i, \frac{\sqrt{34}}{2}i$

1j) $x = -1, 1, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$

1k) $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{5}\,i, \sqrt{5}\,i$

1l) $x = -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -5i, 5i$

2a) $x = -\frac{57}{5}$

2b) $x = -3$

2c) $x = 4$

2d) $x = 0, 4$

2e) $x = 6$

2f) $x = -1$

2g) $x = \frac{1}{2}$

2h) $x = 0$

3a) $x = -\frac{1}{2}, 1$

3b) $x = \frac{-5+\sqrt{33}}{2}, \frac{-5-\sqrt{33}}{2}, 0$

4a) $x = -\frac{1}{2}, y = -1$ y $x = 1, y = 8$

4b) $x = \frac{9}{4}, y = \frac{9}{4}$ y $x = \frac{1}{2}, y = 4$

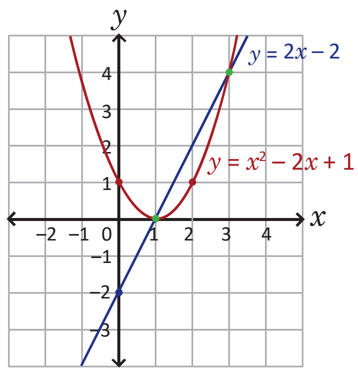
4c) $x = \frac{-17+3\sqrt{57}}{2}, y = \frac{-67+9\sqrt{57}}{2}$

y $x = \frac{-17-3\sqrt{57}}{2}, y = \frac{-67-9\sqrt{57}}{2}$

4d) $x = \frac{-1+\sqrt{41}}{4}, y = \frac{19-3\sqrt{41}}{4}$

y $x = \frac{-1-\sqrt{41}}{4}, y = \frac{19+3\sqrt{41}}{4}$

5a) La gráfica de $y = 2x - 2$ es una línea recta. Si $x = 0$ entonces $y = -2$, y si $x = 1$ entonces $y = 0$. Por lo tanto, la gráfica pasa por los puntos $(0, -2)$ y $(1, 0)$. Por otra parte, la gráfica de $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ es una parábola abierta hacia arriba con vértice en $(1, 0)$. Además, si $x = 0$, $y = 1$ y si $x = 2$, $y = 1$. Es decir, la parábola pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(2, 1)$.



5b) Hay que resolver el sistema $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

$2x - 2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 3$ o $x = 1$

Si $x = 3$ entonces $y = 4$, y si $x = 1$ entonces $y = 0$.

5c) Observar los puntos verdes sobre la gráfica.

5d) Los puntos ubicados en c) coinciden con las intersecciones de las gráficas de $y = 2x - 2$ y $y = x^2 - 2x + 1$.

5e) Las soluciones del sistema representan los puntos de intersección de las gráficas.