Unidad 2. Línea recta

Competencia de la unidad

Deducir los conceptos sobre pendiente y ecuación de una línea recta a partir de sus características en el plano cartesiano para utilizarlo en la determinación de las posiciones relativas entre rectas y aplicarlo en la resolución de problemas y teoremas sobre geometría.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 6: Proporcionalidad directa e inversa (7°)
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de proporcionalidad

Unidad 3: Función lineal (8°)
- Función lineal
- Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de la función lineal

Unidad 5: Figuras semejantes (9°)
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras (9°)
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Primer año de bachillerato

Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Segundo año de bachillerato

Unidad 2: Línea recta
- Puntos y segmentos
- Línea recta
- Posiciones relativas entre rectas
- Práctica en GeoGebra

Unidad 3: Secciones Cónicas
- La parábola
- La circunferencia
- La elipse
- La hipérbola
- Práctica en Geogebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Puntos y segmentos	1	1. Distancia entre dos puntos
	1	2. División de un segmento en una razón dada: recta numérica
	1	3. División de un segmento en una razón dada: plano cartesiano
	1	4. Punto medio de un segmento
	1	5. Aplicaciones
	1	6. Practica lo aprendido
2. Línea recta	1	1. Pendiente y definición de línea recta
	1	2. Ecuación de una recta: forma punto – pendiente
	1	3. Ecuación de una recta dados dos puntos
	1	4. Rectas paralelas a los ejes coordenados
	1	5. Forma general de la ecuación de una recta
	1	6. Practica lo aprendido
	1	Prueba de las lecciones 1 y 2
3. Posiciones relativas entre rectas	1	1 Intersección de una recta con el eje x
	1	2. Intersección de una recta con el eje y
	1	3. Intersección entre rectas
	1	4. Rectas paralelas
	1	5. Rectas perpendiculares
	1	6. Distancia de un punto a una recta
	1	7. Practica lo aprendido
	1	8. Ángulo de inclinación de una recta
	1	9. Ángulo entre rectas

Lección	Horas	Clases
	1	10. Aplicaciones
	1	11. Practica lo aprendido
	1	12. Problemas de la unidad
4. Práctica en GeoGebra	1	1. Práctica en GeoGebra: segmentos y ecuaciones de líneas rectas
	1	2. Práctica en GeoGebra: posiciones relativas entre rectas
	1	Prueba de la lección 3

26 horas clase + prueba de las lecciones 1 y 2 + prueba de la lección 3

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Puntos y segmentos
Se estudia analíticamente las propiedades de un segmento en el plano cartesiano utilizando los conceptos de distancia, división de un segmento en una razón dada y punto medio.

Lección 2: Línea recta
Se define la línea recta a partir del concepto de pendiente, se estudia cómo determinar la ecuación de una línea recta a partir de un punto y su pendiente o a partir de dos puntos dados, además de la forma de las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes coordenados y por último la forma general de la ecuación de una recta.

Lección 3: Posiciones relativas entre rectas
Se determinan los interceptos entre rectas, se abordan las rectas paralelas y perpendiculares, la distancia de un punto a una recta, el ángulo entre rectas y se estudian algunas aplicaciones geométricas.

Lección 4: Práctica en GeoGebra
Se graficarán en GeoGebra puntos, segmentos y rectas; se utilizarán las herramientas tales como punto de intersección, punto medio, ángulo entre rectas, entre otras, para comprobar varios problemas desarrollados a lo largo de la unidad.

1.1 Distancia entre dos puntos

Problema inicial

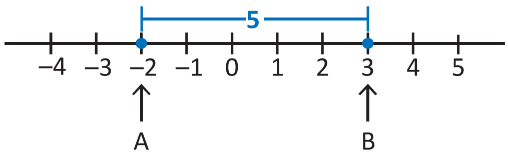
Calcula la distancia entre los puntos A y B si:

a) A(–2) y B(3) están sobre la recta numérica.
b) A(3, 4) y B(–1, 1) están sobre el plano cartesiano.

Dado p un número real, la notación P(p) indica que el punto P se encuentra en el valor p sobre la recta numérica.

Solución

a) Sobre la recta numérica se colocan los puntos A y B, cuyos valores son –2 y 3 respectivamente (ver figura); de acuerdo a esto la distancia entre ambos es 5:

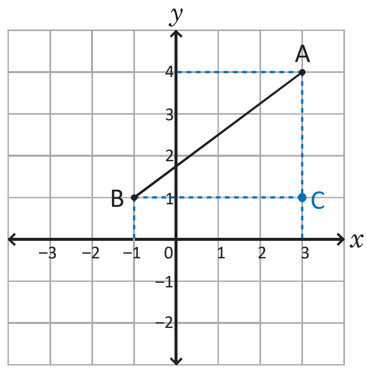


Por lo tanto, la distancia entre A y B es 5. Sin necesidad de la recta numérica, lo anterior también puede calcularse restando del valor de B el valor de A:

$$\begin{aligned} AB &= 3 - (-2) \\ &= 3 + 2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

b) Sobre el plano cartesiano se colocan los puntos A y B cuyas coordenadas son (3, 4) y (–1, 1) respectivamente (ver figura); la distancia entre A y B es igual a la longitud del segmento AB.

Para ubicar un punto P(x_1, y_1) en el plano cartesiano se sitúa la coordenada x_1 sobre el eje x; a partir de esta se cuentan las unidades correspondientes a la coordenada y_1, hacia arriba si es positiva o hacia abajo si es negativa (en ambos casos en forma vertical).



Al formar el triángulo rectángulo ABC y utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

$$AB = \sqrt{BC^2 + CA^2}.$$

Por hablar de distancia, AB siempre será mayor que cero.

La longitud del segmento BC es igual a calcular la distancia de –1 a 3 en el eje x, es decir:

$$BC = 3 - (-1) = 4.$$

De igual forma, la longitud del segmento CA es igual a calcular la distancia de 1 a 4 en el eje y, es decir:

$$CA = 4 - 1 = 3.$$

Se sustituyen BC y CA en $AB = \sqrt{BC^2 + CA^2}$ y se calcula el resultado:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{16 + 9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia entre A y B es 5.

Conclusión

La distancia entre dos puntos A y B se simboliza como d(A, B) y se define de la siguiente forma:

a) Si A(a) y B(b) están sobre la recta numérica, entonces:

$$d(A, B) = |a - b|.$$

$|a - b|$ indica el valor absoluto de la resta $a - b$.

b) Si A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) están sobre el plano cartesiano, entonces:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Esta fórmula para calcular d(A, B) cuando A y B son puntos sobre el plano cartesiano también se utiliza si el segmento AB es paralelo a uno de los ejes de coordenadas.

Ejemplo

Para cada caso, calcula d(A, B) si:

a) A(–10) y B(6)

b) A(–2, –1) y B(3, 2)

a) Como A y B están sobre la recta numérica:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= |-10 - 6| \\ &= |-16| \\ &= -(-16) \\ &= 16. \end{aligned}$$

Por lo tanto, d(A, B) = 16.

Si x es un número real entonces el valor absoluto de x, denotado por $|x|$ se define de la siguiente forma:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) A y B están sobre el plano cartesiano, luego:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(-2 - 3)^2 + (-1 - 2)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{25 + 9} \\ &= \sqrt{34}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, d(A, B) = $\sqrt{34}$.

Problemas

Para cada caso, calcula la distancia entre los puntos A y B, es decir, d(A, B):

a) A(3) y B(7)
b) A(0) y B(6)
c) A(–1) y B(1)
d) A(–3) y B(–1)
e) A(–8) y B(0)
f) A(–3) y B(–10)
g) A(7) y B(2)
h) A(5) y B(–4)
i) A(5, 6) y B(2, 3)
j) A(3, 2) y B(–2, 1)
k) A(4, 6) y B(–5, –3)
l) A(7, 2) y B(1, –4)
m) A(–3, 4) y B(1, 3)
n) A(0, 0) y B(4, –5)
ñ) A(–5, 4) y B(2, –1)
o) A(6, –2) y B(6, –5)

Indicador de logro

1.1 Calcula la distancia entre dos puntos ubicados sobre la recta numérica o en el plano cartesiano.

Secuencia

El teorema de Pitágoras se estudió en noveno grado y será útil en esta clase para determinar la longitud de un segmento en el plano cartesiano. En primer año también se estudió la distancia entre dos puntos del plano.

Propósito

En la Conclusión se tienen dos fórmulas para la distancia, la segunda es suficiente para cualquier par de puntos; sin embargo, la primera es útil y simplifica algunos cálculos cuando los puntos están sobre una paralela a los ejes coordenados.

Solución de problemas:

En los problemas de la **a** al literal **h**, A y B están sobre la recta numérica.

a) $d(A, B) = |3 - 7| = |-4| = -(-4) = 4$

Por lo tanto, $d(A, B) = 4$.

b) $d(A, B) = |0 - 6| = |-6| = -(-6) = 6$

Por lo tanto, $d(A, B) = 6$.

c) $d(A, B) = |-1 - 1| = |-2| = -(-2) = 2$

Por lo tanto, $d(A, B) = 2$.

d) $d(A, B) = |-3 - (-1)| = |-2| = -(-2) = 2$

Por lo tanto, $d(A, B) = 2$.

e) $d(A, B) = |-8 - 0| = |-8| = -(-8) = 8$

Por lo tanto, $d(A, B) = 8$.

f) $d(A, B) = |-3 - (-10)| = |7| = 7$

Por lo tanto, $d(A, B) = 7$.

g) $d(A, B) = |7 - 2| = |5| = 5$

Por lo tanto, $d(A, B) = 5$.

h) $d(A, B) = |5 - (-4)| = |9| = 9$

Por lo tanto, $d(A, B) = 9$.

En los problemas de la **i** al literal **o**, A y B están sobre el plano cartesiano.

i) $d(A, B) = \sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2}$
$= \sqrt{3^2 + 3^2}$
$= 3\sqrt{2}$

Por lo tanto, $d(A, B) = 3\sqrt{2}$.

j) $d(A, B) = \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-1)^2}$
$= \sqrt{5^2 + 1^2}$
$= \sqrt{26}$

Por lo tanto, $d(A, B) = \sqrt{26}$.

k) $d(A, B) = \sqrt{(4-(-5))^2 + (6-(-3))^2}$
$= \sqrt{9^2 + 9^2}$
$= 9\sqrt{2}$

Por lo tanto, $d(A, B) = 9\sqrt{2}$.

l) $d(A, B) = \sqrt{(7-1)^2 + (2-(-4))^2}$
$= \sqrt{6^2 + 6^2}$
$= 6\sqrt{2}$

Por lo tanto, $d(A, B) = 6\sqrt{2}$.

m) $d(A, B) = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-3)^2}$
$= \sqrt{(-4)^2 + 1^2}$
$= \sqrt{17}$

Por lo tanto, $d(A, B) = \sqrt{17}$.

n) $d(A, B) = \sqrt{(0-4)^2 + (0-(-5))^2}$
$= \sqrt{(-4)^2 + 5^2}$
$= \sqrt{41}$

Por lo tanto, $d(A, B) = \sqrt{41}$.

ñ) $d(A, B) = \sqrt{((-5)-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{74}$

Por lo tanto, $d(A, B) = \sqrt{74}$.

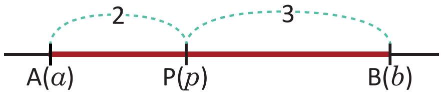
o) $d(A, B) = \sqrt{(6-6)^2 + (-2-(-5))^2} = 3$

Por lo tanto, $d(A, B) = 3$.

1.2 División de un segmento en una razón dada: recta numérica

Problema inicial

Sobre la recta numérica se han colocado dos puntos A(a) y B(b) como se muestra en la figura de abajo. ¿Cuál es el valor del punto P que divide al segmento AB en razón 2:3?



$$\frac{d(\text{A, P})}{d(\text{P, B})} = \frac{2}{3}$$

Solución

Si P divide al segmento AB en razón 2:3 entonces:

$$\frac{d(\text{A, P})}{d(\text{P, B})} = \frac{2}{3}$$

De la figura se deduce $d(\text{A, P}) = |a - p| = p - a$ y $d(\text{P, B}) = |p - b| = b - p$, pues $p > a$ y $b > p$ respectivamente. Se sustituyen en lo anterior y se utiliza la propiedad fundamental de las proporciones:

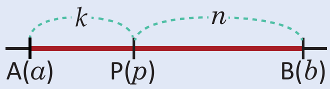
$$\begin{aligned}
\frac{p-a}{b-p} &= \frac{2}{3}\\
3(p-a) &= 2(b-p)\\
3p - 3a &= 2b - 2p\\
2p + 3p &= 3a + 2b\\
(2+3)p &= 3a + 2b\\
p &= \frac{3a+2b}{2+3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor del punto P es $\frac{3a+2b}{5}$.

En general

Dados dos puntos A(a) y B(b) sobre la recta numérica, el valor del punto P(p) que se encuentra sobre el segmento AB y lo divide en razón k:n es:

$$p = \frac{na+kb}{k+n}.$$



Ejemplo

Dados A(–3) y B(5), encuentra el valor del punto P(p) que divide al segmento AB en razón 3:1.

Para este caso, $a = -3$, $b = 5$, $k = 3$ y $n = 1$. Luego:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1(-3)+3(5)}{3+1}\\
&= \frac{-3+15}{4}\\
&= \frac{12}{4}\\
&= 3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor del punto P es 3.

Problemas

1. Para cada caso encuentra el valor del punto P(p) que divide al segmento AB en la razón dada:
   a) Razón 3:2, A(1) y B(6)
   b) Razón 2:5, A(– 4) y B(3)
   c) Razón 1:4, A(0) y B(5)
   d) Razón 2:3, A(– 10) y B(0)
   e) Razón 3:4, A(–16) y B(–2)
   f) Razón 1:3, A(–1) y B(7)

2. Sean A(–1) y B(b) dos puntos sobre la recta numérica. Si P(1) divide al segmento AB en razón 4:5, ¿cuál es el valor de b?

Indicador de logro

1.2 Encuentra el valor del punto que divide un segmento sobre la recta numérica en una razón dada.

Secuencia

En séptimo grado se estudiaron las razones y proporciones, en esta clase se aplicará para determinar un punto que divide un segmento en otros dos en una razón dada, esto se utilizará posteriormente para calcular el punto medio de un segmento.

Posibles dificultades

El uso de tres variables puede confundir a los estudiantes, por lo que se debe indicar que la respuesta al Problema inicial se escribe en términos de las variables a y b.

Solución de problemas:

1a) Para este caso, $a = 1$, $b = 6$, $k = 3$ y $n = 2$. Luego:

$$p = \frac{2(1) + 3(6)}{3 + 2} = \frac{2 + 18}{5} = \frac{20}{5} = 4.$$

Por lo tanto, el valor del punto P es 4.

1b) Para este caso, $a = -4$, $b = 3$, $k = 2$ y $n = 5$. Luego:

$$p = \frac{5(-4) + 2(3)}{2 + 5} = \frac{-20 + 6}{7} = -\frac{14}{7} = -2.$$

Por lo tanto, el valor del punto P es -2.

1c) Para este caso, $a = 0$, $b = 5$, $k = 1$ y $n = 4$. Luego:

$$p = \frac{4(0) + 1(5)}{1 + 4} = \frac{5}{5} = 1.$$

Por lo tanto, el valor del punto P es 1.

1d) Para este caso, $a = -10$, $b = 0$, $k = 2$ y $n = 3$. Luego:

$$p = \frac{3(-10) + 2(0)}{2 + 3} = -\frac{30}{5} = -6.$$

Por lo tanto, el valor del punto P es -6.

1e) Para este caso, $a = -16$, $b = -2$, $k = 3$ y $n = 4$. Luego:

$$p = \frac{4(-16) + 3(-2)}{3 + 4} = \frac{-64 - 6}{7} = -\frac{70}{7} = -10.$$

Por lo tanto, el valor del punto P es -10.

1f) Para este caso, $a = -1$, $b = 7$, $k = 1$ y $n = 3$. Luego:

$$p = \frac{3(-1) + 1(7)}{1 + 3} = \frac{-3 + 7}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Por lo tanto, el valor del punto P es 1.

2. Como $a = -1$, $k = 4$, $n = 5$ y $p = 1$, entonces,

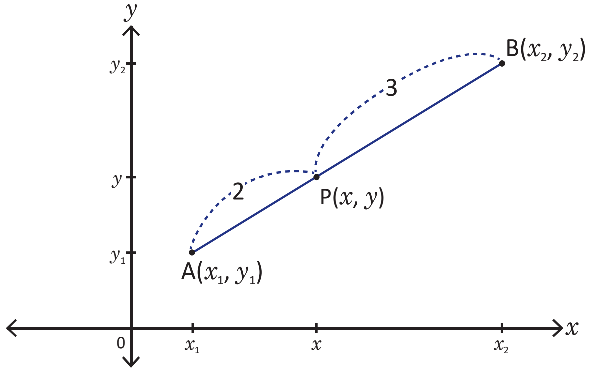
$$1 = \frac{5(-1) + 4(b)}{4 + 5} = \frac{-5 + 4b}{9} \Rightarrow -5 + 4b = 9 \Rightarrow 4b = 14 \Rightarrow \text{b} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$

Por lo tanto, el valor de b es $\frac{7}{2}$.

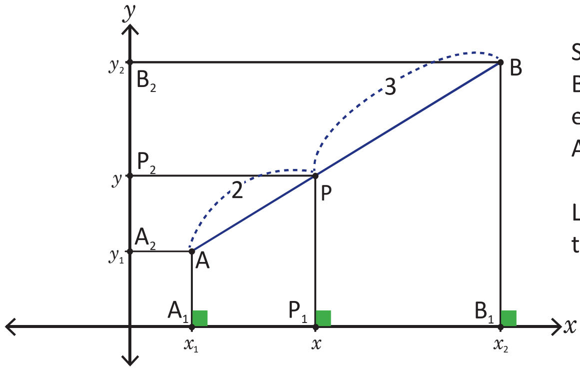
1.3 División de un segmento en una razón dada: plano cartesiano*

Problema inicial

Dos puntos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) se colocan en el plano cartesiano como se muestra en la figura de la derecha. ¿Cómo encontrarías las coordenadas del punto P(x, y) que está sobre el segmento AB y lo divide en razón 2:3?



Solución



Se colocan sobre los ejes los puntos $A_1(x_1, 0)$, $P_1(x, 0)$, $B_1(x_2, 0)$, $A_2(0, y_1)$, $P_2(0, y)$ y $B_2(0, y_2)$ como se muestra en la figura de la izquierda y se trazan los segmentos AA_1, PP_1, BB_1, AA_2, PP_2 y BB_2.

Los segmentos AA_1, PP_1 y BB_1 son paralelos; por el teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo:

$$\frac{d(A_1, P_1)}{d(P_1, B_1)} = \frac{d(A, P)}{d(P, B)} = \frac{2}{3}.$$

Utilizando lo visto en la clase anterior, la coordenada x del punto P es:

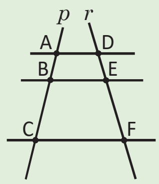
$$x = \frac{3x_1 + 2x_2}{2 + 3}.$$

De manera similar se llega a que la coordenada y del punto P es:

$$y = \frac{3y_1 + 2y_2}{2 + 3}.$$

Por lo tanto, $P\left(\frac{3x_1 + 2x_2}{5}, \frac{3y_1 + 2y_2}{5}\right)$.

Teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo: si p y r son rectas cortadas por tres rectas paralelas (ver figura) entonces: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$



En general

Dados dos puntos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) sobre el plano cartesiano, las coordenadas del punto P(x, y) que se encuentra sobre el segmento AB y lo divide en razón k:n son:

$$\left(\frac{nx_1 + kx_2}{k + n}, \frac{ny_1 + ky_2}{k + n}\right).$$

Problemas

Para cada caso encuentra las coordenadas del punto P(x, y) que divide al segmento AB en la razón dada:

a) Razón 1:3, A(–5, 1) y B(3, –3)
b) Razón 3:4, A(–2, –10) y B(5, 4)
c) Razón 3:2, A(1, 8) y B(6, –2)
d) Razón 4:5, A(–2, –9) y B(7, 0)

Indicador de logro

1.3 Encuentra las coordenadas del punto que divide un segmento en el plano cartesiano en una razón dada.

Secuencia

Ahora se aborda la división de un segmento cualquiera en el plano cartesiano, por lo que es necesario utilizar el teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo que se estudió en noveno grado. Luego se utilizará lo visto en la clase anterior, extendiendo la fórmula encontrada para la recta numérica al plano cartesiano. Si la pista es insuficiente para resolver el problema el docente deberá explicarlo.

Solución de problemas:

a) Como A(– 5, 1), B(3, –3), k = 1 y n = 3, entonces

$$\mathrm{P}\left(\frac{3(-5)+1(3)}{1+3}, \frac{3(1)+1(-3)}{1+3}\right) = \mathrm{P}(-3, 0).$$

b) Como A(–2, –10), B(5, 4), k = 3 y n = 4, entonces

$$\mathrm{P}\left(\frac{4(-2)+3(5)}{3+4}, \frac{4(-10)+3(4)}{3+4}\right) = \mathrm{P}(1, -4).$$

c) Como A(1, 8), B(6, –2), k = 3 y n = 2, entonces

$$\mathrm{P}\left(\frac{2(1)+3(6)}{3+2}, \frac{2(8)+3(-2)}{3+2}\right) = \mathrm{P}(4, 2).$$

d) Como A(–2, –9), B(7, 0), k = 4 y n = 5, entonces

$$\mathrm{P}\left(\frac{5(-2)+4(7)}{4+5}, \frac{5(-9)+4(0)}{4+5}\right) = \mathrm{P}(2, -5).$$

Lección 1

1.4 Punto medio de un segmento

Problema inicial

Encuentra el valor o coordenadas del punto medio del segmento AB si:

1. A(a) y B(b) están sobre la recta numérica.
2. A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) están sobre el plano cartesiano.

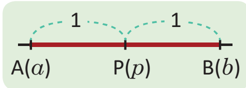
El punto medio divide al segmento AB en razón 1:1.

Solución

Encontrar el punto medio equivale a encontrar el punto que divide al segmento AB en razón 1:1, es decir, $k = 1$ y $n = 1$.

1. El valor p del punto medio P se calcula:

$$p = \frac{1a + 1b}{1 + 1} = \frac{a + b}{2}.$$



Por lo tanto, el valor del punto medio P es $\frac{a + b}{2}$.

2. Las coordenadas (x, y) del punto medio P se calculan:

$$x = \frac{1x_1 + 1x_2}{1 + 1} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{1y_1 + 1y_2}{1 + 1} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto medio P son $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Conclusión

1. Si A(a) y B(b) son puntos sobre la recta numérica, entonces el valor del punto medio P(p) del segmento AB es:

$$p = \frac{a + b}{2}.$$

2. Si A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) son puntos sobre la recta numérica, entonces las coordenadas del punto medio P del segmento AB son:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Problemas

1. Para cada caso, calcula el valor del punto medio P del segmento AB:

a) A(1) y B(7) b) A(0) y B(8) c) A(−2) y B(4) d) A(−4) y B(2)
e) A(−6) y B(−2) f) A(−7) y B(−3) g) A$\left(\sqrt{2}\right)$ y B$\left(3\sqrt{2}\right)$ h) A$\left(-\sqrt{3}\right)$ y B$\left(\sqrt{2}\right)$

2. Para cada caso, calcula las coordenadas del punto medio P del segmento AB:

a) A(1, 2) y B(3, 6) b) A(−6, 4) y B(0, −2) c) A(−4, −5) y B(2, 1)
d) A(1, 6) y B(4, 0) e) A(−5, −1) y B(3, 1) f) A$\left(0, \sqrt{2}\right)$ y B$\left(0, 6\sqrt{2}\right)$

Indicador de logro

1.4 Determina el valor o las coordenadas del punto medio de un segmento.

Secuencia

Ahora se deducen las fórmulas del punto medio de un segmento en la recta numérica y en el plano cartesiano.

Propósito

Con el Problema inicial se deduce la fórmula del punto medio utilizando lo visto en las dos clases anteriores y sabiendo que este punto divide al segmento en razón 1:1.

Solución de problemas:

En el problema 1, los puntos están sobre la recta numérica.

1a) A(1) y B(7)

$$p = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

1b) A(0) y B(8)

$$p = \frac{0+8}{2} = 4$$

1c) A(–2) y B(4)

$$p = \frac{-2+4}{2} = 1$$

1d) A(–4) y B(2)

$$p = \frac{-4+2}{2} = -1$$

1e) A(–6) y B(–2)

$$p = \frac{-6-2}{2} = -4$$

1f) A(–7) y B(–3)

$$p = \frac{-7-3}{2} = -5$$

1g) A($\sqrt{2}$) y B($3\sqrt{2}$)

$$p = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

1h) A($-\sqrt{3}$) y B($\sqrt{2}$)

$$p = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$$

En el problema 2, los puntos están sobre el plano cartesiano.

2a) A(1, 2) y B(3, 6)

Punto medio: $P\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = P(2, 4)$.

2b) A(–6, 4) y B(0, –2)

Punto medio: $P\left(\frac{-6+0}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = P(-3, 1)$.

2c) A(–4, –5) y B(2, 1)

Punto medio: $P\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{-5+1}{2}\right) = P(-1, -2)$.

2d) A(1, 6) y B(4, 0)

Punto medio: $P\left(\frac{1+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = P\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

2e) A(–5, –1) y B(3, 1)

Punto medio: $P\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = P(-1, 0)$.

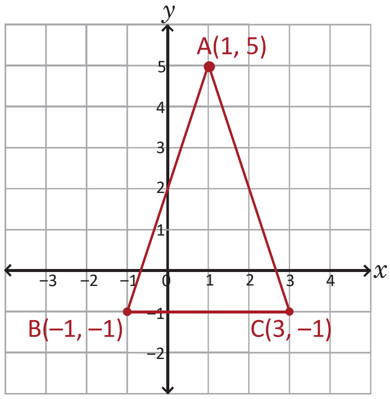
2f) A($0, \sqrt{2}$) y B($0, 6\sqrt{2}$)

Punto medio: $P\left(\frac{0+0}{2}, \frac{\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2}\right) = P\left(0, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

1.5 Aplicaciones

Problema inicial

Se colocan tres puntos A, B y C en el plano cartesiano cuyas coordenadas se presentan en la figura:



Demuestra que el triángulo ABC es isósceles.

Solución

Para que el ΔABC sea isósceles debe tener dos lados de igual longitud. A simple vista los lados AB y CA parecen cumplir esa condición. Se calcula la longitud del lado AB, que es igual a la distancia entre A y B:

$$\begin{aligned} d(\text{A, B}) &= \sqrt{[1-(-1)]^2 + [5-(-1)]^2} \\ &= \sqrt{4+36} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

De manera similar se calcula la longitud del lado CA, es decir, la distancia entre C y A:

$$\begin{aligned} d(\text{C, A}) &= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-5)^2} \\ &= \sqrt{4+36} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

Luego, d(A, B) = d(C, A), es decir, el triángulo ABC tiene dos lados de igual longitud: AB y CA. Por lo tanto, el ΔABC es isósceles.

Problemas

1. Demuestra que el triángulo formado por los puntos A(3, 3), B(–3, –3) y C$\left(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$ es equilátero.
2. Demuestra que el triángulo formado por los puntos D(1, 4), E(–3, –2) y F(5, 1) es escaleno.
3. Demuestra que los puntos A(3, 7), B(–3, –1) y C(3, –1) forman un triángulo rectángulo.

Si los lados a, b y c de un triángulo cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

Unidad 2

Indicador de logro

1.5 Resuelve problemas utilizando la distancia entre dos puntos y división de un segmento en una razón dada.

Secuencia

Se utilizan los conocimientos adquiridos en esta lección para resolver problemas geométricos.

Solución de problemas:

1. Para que el triángulo ABC sea equilátero, sus lados deben medir lo mismo. Es decir, las distancias d(A, B), d(B, C) y d(A, C) deben ser iguales. Calculando las tres distancias:

- $d(A, B) = \sqrt{(3-(-3))^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$,
- $d(B, C) = \sqrt{(-3+3\sqrt{3})^2 + (-3-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 - 18\sqrt{3} + 9(3) + 9 + 18\sqrt{3} + 9(3)} = \sqrt{8(9)} = 6\sqrt{2}$,
- $d(A, C) = \sqrt{(3+3\sqrt{3})^2 + (3-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 18\sqrt{3} + 9(3) + 9 - 18\sqrt{3} + 9(3)} = \sqrt{8(9)} = 6\sqrt{2}$.

Por lo tanto, el triángulo ABC es equilátero.

2. Para que el triángulo sea escaleno, los tres lados deben tener distinta medida. Es decir, las distancias d(D, E), d(E, F) y d(D, F) deben ser distintas. Calculando las tres distancias:

- $d(D, E) = \sqrt{(1-(-3))^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$,
- $d(E, F) = \sqrt{(-3-5)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-3)^2} = \sqrt{73}$,
- $d(F, D) = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$.

Por lo tanto, el triángulo DEF es escaleno.

3. Por facilidad, se calcula AB^2, BC^2 y AC^2:

- $AB^2 = [d(A, B)]^2 = (3+3)^2 + (7+1)^2 = 6^2 + 8^2 = 100$.
- $BC^2 = [d(B, C)]^2 = (-3-3)^2 + (-1+1)^2 = (-6)^2 = 36$.
- $AC^2 = [d(A, C)]^2 = (3-3)^2 + (7+1)^2 = 8^2 = 64$.

Se observa que $BC^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100 = AB^2$. Por el recíproco del teorema de Pitagóras, el triángulo ABC es rectángulo.

El recíproco del teorema de Pitágoras se estudió en 9° grado.

1.6 Practica lo aprendido

1. Para cada caso, calcula la distancia entre los puntos A y B:

   a) A(–9) y B(–1)

   b) A(0) y B(5)

   c) $A\left(-\frac{3}{2}\right)$ y $B\left(\frac{7}{2}\right)$

   d) $A\left(\sqrt{5}\right)$ y $B\left(3\sqrt{5}\right)$

   e) A(–4, 0) y B (5, –2)

   f) A(–1, 6) y B(3, –2)

   g) $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $B\left(\frac{5}{2}, 3\right)$

   h) $A\left(-\sqrt{2}, -3\right)$ y B(0, 2)

2. La distancia entre dos puntos A y B es $d(A, B) = 2\sqrt{13}$. Si las coordenadas de A son (–2, 5) y las de B son $(x, 1)$, ¿cuál es el valor de x?

3. La distancia entre dos puntos A y B es $d(A, B) = 2\sqrt{34}$. Si las coordenadas de A son $(-6, y)$ y las de B son (4, 4), ¿cuál es el valor de y?

4. Para cada caso, encuentra el valor del punto sobre el segmento AB que lo divide en la razón dada:

   a) Razón 6:5, A(–10) y B(1)

   b) Razón 3:1, A(–2) y B(2)

   c) Razón 1:3, A(–6, 7) y B(2, 3)

   d) Razón 1:2, A(–4, 0) y B(11, 6)

5. Para cada caso, encuentra el punto medio del segmento AB:

   a) A(–1) y B(3)

   b) $A\left(-2\sqrt{10}\right)$ y $B\left(\sqrt{10}\right)$

   c) A(0, 7) y B(4, –11)

   d) A(–5, –1.5) y B(3, 5.5)

6. ¿Cuál es la distancia entre un punto $P(x_1, y_1)$ y el origen (0, 0)?

7. Encuentra las coordenadas del punto B, si el punto medio entre A(–1, 3) y B es $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

8. Los vértices de un triángulo son A(2, 4), B(–2, –2) y C(4, 0). Si D y E son los puntos medios de los lados AB y BC respectivamente, demuestra que $DE = \frac{1}{2}AC$.

9. El vértice A de un triángulo ABC tiene coordenadas (–2, 4). Si los puntos medios de los lados AB y BC son (–3, 1) y (1, 0) respectivamente, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices B y C?

10. El vértice A de un cuadrado ABCD tiene coordenadas (–4, 4). Si los puntos medios de los lados AB, BC y CD son (–2, 0), (4, –2) y (6, 4) respectivamente, ¿cuáles son las coordenadas de B, C y D?

Indicador de logro

1.6 Resuelve problemas correspondientes al cálculo de distancias entre puntos y división de segmentos en una razón dada.

Solución de problemas:

1a) $d(\text{A, B}) = |-9-(-1)| = |-8| = -(-8) = 8$ **1b)** $d(\text{A, B}) = 5$ **1c)** $d(\text{A, B}) = 5$ **1d)** $d(\text{A, B}) = 2\sqrt{5}$

1e) $d(\text{A, B}) = \sqrt{(-4-5)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{85}$ **1f)** $d(\text{A, B}) = 4\sqrt{5}$ **1g)** $d(\text{A, B}) = 2\sqrt{2}$ **1h)** $d(\text{A, B}) = 3\sqrt{3}$

2. $d(\text{A, B}) = \sqrt{(-2-x)^2 + (5-1)^2} = 2\sqrt{13} \Rightarrow (-2-x)^2 + 16 = 4(13) \Rightarrow x^2 + 4x - 32 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-4) = 0$

Por lo tanto, $x = -8$ o $x = 4$.

3. $d(\text{A, B}) = \sqrt{(-6-4)^2 + (y-4)^2} = 2\sqrt{34} \Rightarrow 100 + (y-4)^2 = 4(34) \Rightarrow y^2 - 8y - 20 = 0 \Rightarrow (y+2)(y-10) = 0$

Por lo tanto, $y = -2$ o $y = 10$.

4a) $p = -4$ **4b)** $p = 1$ **4c)** P$(-4, 6)$ **4d)** P$(1, 2)$

5a) $p = 1$ **5b)** $p = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ **5c)** P$(2, -2)$ **5d)** P$(-1, 2)$

6. Sea O(0, 0) el origen del plano cartesiano. Entonces, $d(\text{P, O}) = \sqrt{(x_1-0)^2 + (y_1-0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

7. Sea B(x, y). Entonces $\left(\frac{-1+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Por tanto, $\frac{-1+x}{2} = \frac{3}{2}$ y $\frac{3+y}{2} = \frac{1}{2}$. De estas dos ecuaciones se deduce que $x = 4$ y $y = -2$. Por lo tanto, B$(4, -2)$.

8. Como D y E son los puntos medios de AB y BC, respectivamente, se tiene que

$$\text{D}\left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = \text{D}(0, 1) \text{ y } \text{E}\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{0+(-2)}{2}\right) = \text{E}(1, -1).$$

Luego, $\text{DE} = \sqrt{(0-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{5}$. Por otra parte, $\text{AC} = \sqrt{(2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Por lo tanto, $\text{DE} = \sqrt{5} = \frac{1}{2}(2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\text{AC}$.

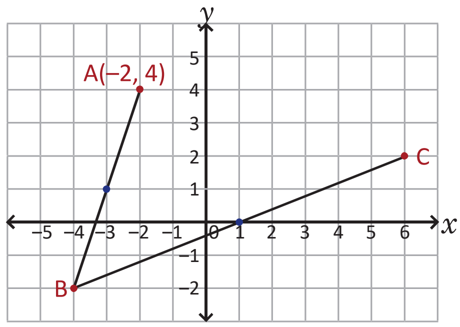
9. Sean B(x_1, y_1) y C(x_2, y_2). El punto medio de AB es $(-3, 1)$, entonces

$$\left(\frac{-2+x_1}{2}, \frac{4+y_1}{2}\right) = (-3, 1) \Rightarrow x_1 = -4 \text{ y } y_1 = -2.$$

Por tanto, B$(-4, -2)$. Luego, el punto medio de BC es $(1, 0)$, entonces

$$\left(\frac{-4+x_2}{2}, \frac{-2+y_2}{2}\right) = (1, 0) \Rightarrow x_2 = 6 \text{ y } y_2 = 2.$$

Por tanto, C(6, 2).



10. Sean B(x_1, y_1), C(x_2, y_2) y D(x_3, y_3) El punto medio de AB es $(-2, 0)$, entonces

$$\left(\frac{-4+x_1}{2}, \frac{4+y_1}{2}\right) = (-2, 0) \Rightarrow x_1 = 0 \text{ y } y_1 = -4. \text{ Por tanto, B}(0, -4).$$

Luego, el punto medio de BC es $(4, -2)$, entonces

$$\left(\frac{0+x_2}{2}, \frac{-4+y_2}{2}\right) = (4, -2) \Rightarrow x_2 = 8 \text{ y } y_2 = 0. \text{ Por tanto, C}(8, 0).$$

Por último, el punto medio de CD es $(6, 4)$, entonces

$$\left(\frac{8+x_3}{2}, \frac{0+y_3}{2}\right) = (6, 4) \Rightarrow x_3 = 4 \text{ y } y_3 = 8. \text{ Por tanto, D}(4, 8).$$

Lección 2 Línea recta

2.1 Pendiente y definición de línea recta

Problema inicial

Con los puntos A(–2, –3), B(0, 1), C(1, 3) realiza lo siguiente:

1. Verifica que para cualquier pareja de puntos, el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es constante.
2. Ubica los puntos en el plano cartesiano. ¿Están todos sobre una misma línea recta?
3. Dado un punto P(2, y), ¿cuál debe ser el valor de y para que P se encuentre sobre la misma línea recta que A y B?

Solución

1. Las parejas posibles son A y B, A y C, B y C. Para cada pareja se calcula el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:

A(–2, –3) y B(0, 1):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-3)}{0-(-2)} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

A(–2, –3) y C(1, 3):

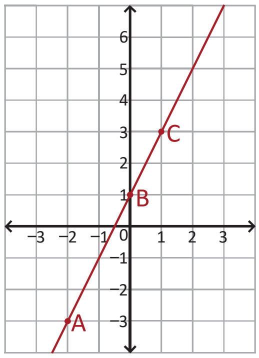
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-3)}{1-(-2)} = \frac{6}{3} = \mathbf{2}$$

B(0, 1) y C(1, 3):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{1-0} = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$$

Por lo tanto, para cualquier pareja de puntos el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es constante.

2. Se ubican los puntos en el plano cartesiano como se muestra en la figura de la derecha. Utilizando una regla se verifica que, en efecto, los tres se encuentran sobre una misma línea recta.



3. De acuerdo a los numerales anteriores, para que P(2, y) se encuentre sobre la misma línea recta que A(–2, –3) y B(0, 1), el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ debe ser igual a 2 para cualesquiera pareja de puntos A, B o P. Basta con comprobar que se cumple para B y P:

$$\frac{y-1}{2-0} = 2$$
$$y = 5$$

También puede utilizarse la gráfica de 2 y deducir que el valor de y debe ser igual a 5 para que P(2, 5) esté sobre la misma línea recta que A(–2, –3) y B(0, 1).

Definición

Una **línea recta** es un conjunto de puntos tales que, al tomar dos de ellos cualesquiera y diferentes A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2), el valor del cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es siempre constante. A dicho cociente se le llama **pendiente de la recta** y se denota por la letra m, es decir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observa que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Problemas

1. Para cada caso muestra que los puntos A, B y C están sobre la misma línea recta:

a) A(0, –3), B(3, 0) y C(5, 2)

b) A(–4, 1), B(0, 3) y C(6, 6)

c) A(–3, 5), B(–1, –1) y C$\left(\frac{1}{3}, -5\right)$

d) A(–3, 4), B$\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y C(3, 0)

2. Sin graficar, justifica por qué los puntos D(–3, 1), E(1, –1) y F$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ no están sobre la misma línea recta.

Indicador de logro

2.1 Identifica puntos sobre la misma línea recta utilizando el valor de su pendiente.

Secuencia

En Tercer Ciclo se estudió la función lineal a partir de la proporcionalidad directa. Ahora se define la recta a partir del concepto de pendiente, de esta forma será fácil deducir la ecuación de una línea recta posteriormente. Se inicia el estudio de la línea recta en el contexto de la geometría analítica.

Solución de problemas:

1a) A(0, –3), B(3, 0) y C(5, 2)

A(0, –3) y B(3, 0):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-3)}{3-0} = \frac{3}{3} = 1$$

B(3, 0) y C(5, 2):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

Por lo tanto, A, B y C están sobre la misma recta.

1b) A(–4, 1), B(0, 3) y C(6, 6)

A(–4, 1) y B(0, 3):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{0-(-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

A(–4, 1) y C(6, 6):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-1}{6-(-4)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, A, B y C están sobre la misma recta.

1c) A(–3, 5), B(–1, –1) y $C\left(\frac{1}{3}, -5\right)$

A(–3, 5) y B(–1, –1):

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-5}{-1-(-3)} = \frac{-6}{2} = -3$$

A(–3, 5) y $C\left(\frac{1}{3}, -5\right)$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-5}{\frac{1}{3}-(-3)} = \frac{-10}{\frac{10}{3}} = -10 \div \frac{10}{3} = -10 \times \frac{3}{10} = -3$$

Por lo tanto, A, B y C están sobre la misma recta.

1d) A(–3, 4), $B\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y C(3, 0)

A(–3, 4) y C(3, 0)

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-4}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$B\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y C(3, 0)

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{3-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, A, B y C están sobre la misma recta.

2. D(–3, 1), E(1, –1) y $F\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

D(–3, 1) y E(1, –1)

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-1}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

E(1, –1) y $F\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-\frac{3}{2}-(-1)}{\frac{3}{2}-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$$

Por lo tanto, A, B y C no están sobre la misma recta.

2.2 Ecuación de una recta: forma punto – pendiente*

Problema inicial

Demuestra que la ecuación de la recta l que pasa por un punto A(x_1, y_1) y tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Solución

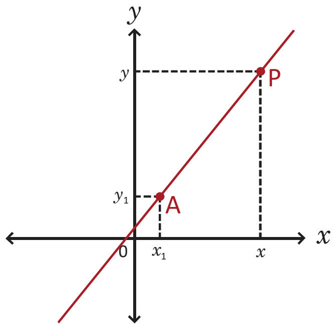
Sea P(x, y) un punto cualquiera sobre la recta l diferente del punto A(x_1, y_1).
Por definición de línea recta, m es constante; entonces:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Luego,

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta l es: $y - y_1 = m(x - x_1)$.



Definición

La ecuación de una recta l con pendiente conocida m y un punto A(x_1, y_1) perteneciente a la recta es:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

A esta ecuación se le llama **forma punto – pendiente de la ecuación de la recta**; al despejar la variable y en lo anterior se obtiene:

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

donde el coeficiente de la variable x es la pendiente de la recta y el valor de $-mx_1 + y_1$ es constante. Para graficar la recta l conociendo el punto A(x_1, y_1) sobre ella y su ecuación punto – pendiente se hace lo siguiente:

1. Sustituir un valor particular para x y encontrar el correspondiente valor en y.
2. Colocar sobre el plano cartesiano los puntos A(x_1, y_1) y el punto obtenido en el numeral 1; luego trazar la recta que pasa por ambos puntos.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta l cuya pendiente es $m = \frac{1}{2}$ y pasa por el punto A(–3, 2).

Se sustituyen los valores de m y (x_1, y_1) en la forma punto – pendiente:

$$y - 2 = \frac{1}{2}[x - (-3)]$$

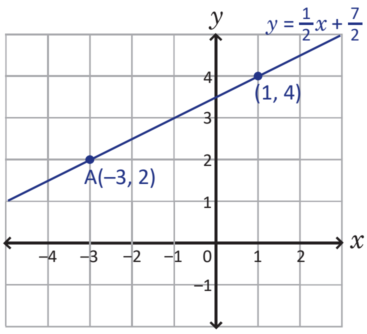
$$y = \frac{1}{2}(x + 3) + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Para graficar la recta, se sustituye un valor particular para x en la ecuación anterior, por ejemplo $x = 1$, y se encuentra su correspondiente valor y:

$$y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

Se colocan los puntos A(–3, 2) y (1, 4) en el plano y se traza la recta que pasa por ambos puntos, como muestra la figura de la derecha.



Problemas

Encuentra la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por A; grafica la recta para cada caso:

a) Pendiente $m = 2$ y A(6, 7)

b) Pendiente $m = 1$ y A(–1, 0)

c) Pendiente $m = -1$ y A(–2, 6)

d) Pendiente $m = \frac{1}{2}$ y A(1, 8)

Indicador de logro

2.2 Determina la ecuación y grafica una recta utilizando el valor de su pendiente y las coordenadas del punto sobre ella.

Secuencia

En esta clase se dan dos condiciones mínimas para establecer la ecuación de una línea recta: un punto de esta y su pendiente; luego, para graficarla bastará utilizar la ecuación para determinar otro punto de la gráfica. Puede desarrollar el Problema inicial si es muy difícil para los estudiantes.

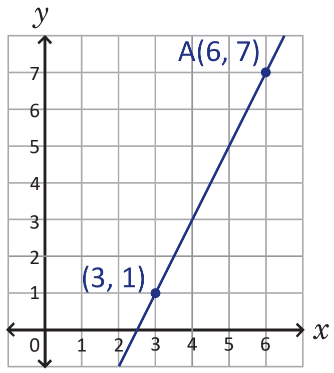
Propósito

Con el Problema inicial, se deducirá la forma punto-pendiente de la recta a partir de la definición de la clase anterior, esta forma permite determinar fácilmente puntos de la recta determinando el valor de y para un x dado.

Solución de problemas:

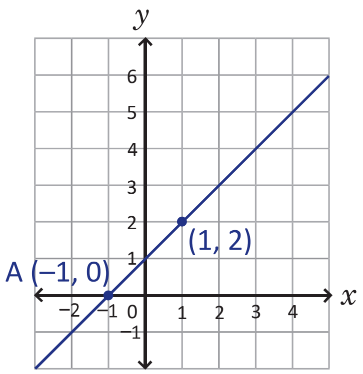
a) Pendiente $m = 2$, A(6, 7)

$$y - 7 = 2(x - 6)$$
$$y = 2x - 5$$
$$x = 3,\ y = 2(3) - 5 = 1,\ (3, 1)$$



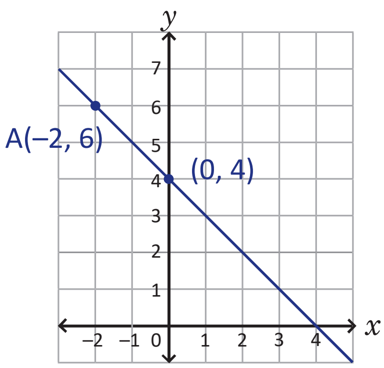
b) Pendiente $m = 1$, A(−1, 0)

$$y - 0 = 1[x - (-1)]$$
$$y = x + 1$$
$$x = 1,\ y = 1 + 1 = 2,\ (1, 2)$$



c) Pendiente $m = -1$, A(−2, 6)

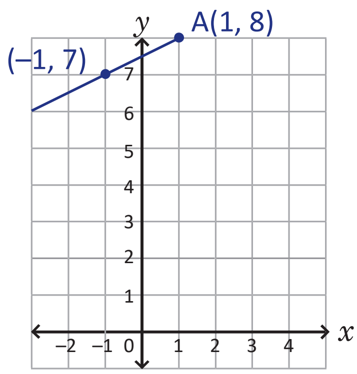
$$y - 6 = -1[x - (-2)]$$
$$y = -x - 2 + 6$$
$$y = -x + 4$$
$$x = 0,\ y = -0 + 4 = 4,\ (0, 4)$$



d) Pendiente $m = \frac{1}{2}$, A(1, 8)

$$y - 8 = \frac{1}{2}(x - 1)$$
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 8$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$$

$x = -1,\ y = 7,\ (-1, 7)$



2.3 Ecuación de una recta dados dos puntos

Problema inicial

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–1, –3) y B(2, 9) y grafícala.

Solución

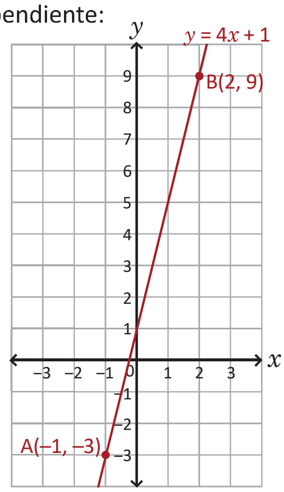
Para utilizar la ecuación punto – pendiente es necesario encontrar la pendiente de la recta. Por definición,

$$m = \frac{9-(-3)}{2-(-1)} = 4.$$

Se toman $x_1 = -1$, $y_1 = -3$ y se sustituyen los valores en la ecuación punto – pendiente:

$$y-(-3) = 4[x-(-1)]$$
$$y+3 = 4(x+1)$$
$$y = 4x+1$$

> También puedes utilizar las coordenadas de B en la forma punto – pendiente y verificar que la ecuación es la misma.



Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–1, –3) y B(2, 9) es $y = 4x + 1$. Para graficarla basta con colocar dos puntos pertenecientes a la recta (estos pueden ser los puntos A y B dados en el enunciado del problema) y trazar la línea como lo muestra la figura de la derecha:

Conclusión

La ecuación de una recta l que pasa por dos puntos conocidos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2), con $x_1 \neq x_2$ es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

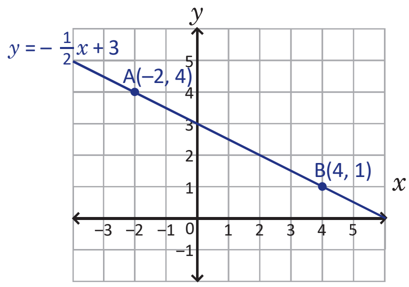
Para graficar la recta l se colocan los puntos A y B en el plano cartesiano, luego se traza la recta que pasa por ambos puntos. En general, para trazar la gráfica de una línea recta l basta con ubicar dos puntos pertenecientes a l y trazar la recta que pasa por ambos.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–2, 4) y B(4, 1) y grafícala.

Se sustituyen los valores de x_1, y_1, x_2 y y_2:

$$y - 4 = \frac{1-4}{4-(-2)}[x-(-2)]$$
$$y = \frac{-3}{6}(x+2)+4$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$



La gráfica de $y = -\frac{1}{2}x + 3$ se muestra en la figura de la derecha.

Problemas

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B; grafica la recta para cada caso:

a) A(–3, –1) y B(1, –5)

b) A(2, –2) y B(3, 1)

c) A(0, –5) y B(6, 4)

d) A(0, 4) y B(12, –6)

Indicador de logro

2.3 Determina la ecuación y grafica la recta que pasa por dos puntos conocidos.

Secuencia

Ahora se estudia la forma de la ecuación de la recta a partir de dos de sus puntos.

Propósito

Para resolver el Problema inicial, se debe utilizar la forma punto-pendiente. Para dibujar la recta es suficiente utilizar los puntos proporcionados.

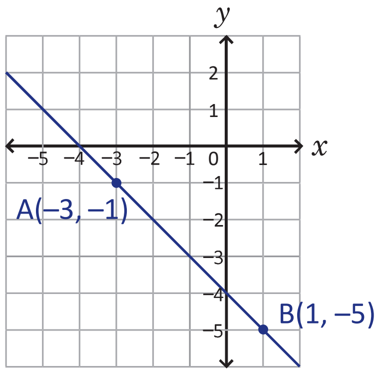
Solución de problemas:

a) A(–3, –1) y B(1, –5)

$$y-(-1)=\frac{-5-(-1)}{1-(-3)}[x-(-3)]$$

$$y=-(x+3)-1$$

$$y=-x-4$$

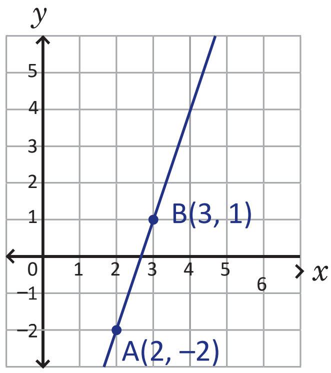


b) A(2, –2) y B(3, 1)

$$y-1=\frac{1-(-2)}{3-2}(x-3)$$

$$y=3(x-3)+1$$

$$y=3x-8$$

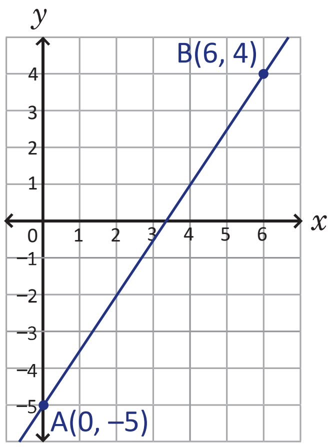


c) A(0, –5) y B(6, 4)

$$y-(-5)=\frac{4-(-5)}{6-0}(x-0)$$

$$y=\frac{9}{6}x-5$$

$$y=\frac{3}{2}x-5$$

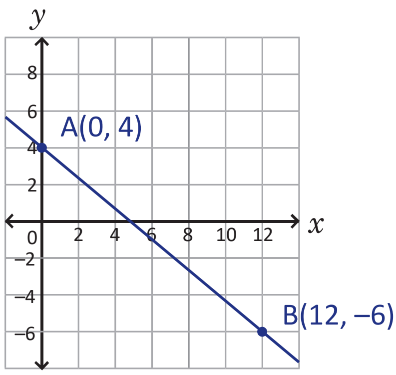


d) A(0, 4) y B(12, –6)

$$y-4=\frac{-6-4}{12-0}(x-0)$$

$$y=\frac{-10}{12}x+4$$

$$y=-\frac{5}{6}x+4$$



Lección 2

2.4 Rectas paralelas a los ejes de coordenadas

Problema inicial

Para cada caso, grafica la recta que pasa por los puntos A y B, y deduce su ecuación:

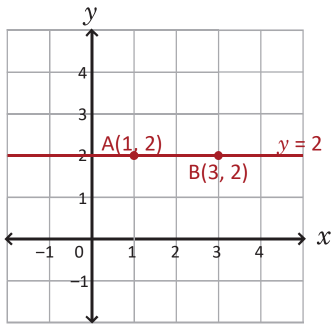
a) A(1, 2) y B(3, 2)   b) A(1, –1) y B(1, 3)

Solución

a) Se colocan los puntos A y B en el plano cartesiano y se traza la línea recta como lo muestra la figura de la derecha; el resultado es una recta horizontal, o sea, paralela al eje x. Su ecuación se encuentra utilizando lo visto en la clase anterior:

$$y - 2 = \frac{2-2}{3-1}(x-1)$$
$$y = \frac{0}{2}(x-1) + 2$$
$$y = 2$$

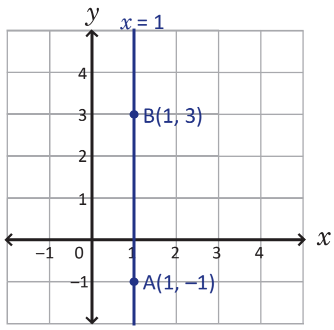
Por lo tanto, la ecuación de la recta es $y = 2$.



b) Al colocar los puntos A(1, –1) y B(1, 3) en el plano cartesiano y trazar la línea recta se obtiene una recta vertical, es decir, paralela al eje y. Si se calcula la pendiente de la misma se obtiene lo siguiente:

$$m = \frac{3-(-1)}{1-1} = \frac{4}{0}$$

Esto indica que la pendiente es indefinida. La primera coordenada de los puntos sobre la recta es siempre constante e igual a 1 (no así la segunda coordenada), por lo tanto, la ecuación de la recta es: $x = 1$.



Conclusión

La ecuación de una recta l paralela a uno de los ejes de coordenadas es:

a) $y = k$, si la recta es paralela al eje x. El punto $(0, k)$ pertenece a la recta l.

b) $x = k$, si la recta es paralela al eje y. El punto $(k, 0)$ pertenece a la recta l.

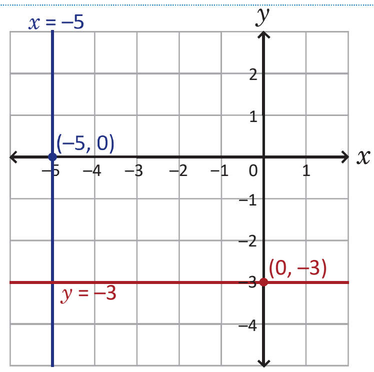
Ejemplo

Grafica las rectas $y = -3$ y $x = -5$.

Se ubican los puntos (0, –3) y (–5, 0). Luego, se traza la recta:

1. Paralela al eje x que pasa por (0, –3) en el caso de $y = -3$;
2. Paralela al eje y que pasa por (–5, 0) en el caso de $x = -5$.

Ambas rectas se presentan en la figura de la derecha.



Problemas

1. Encuentra la ecuación y grafica la recta que pasa por el punto A y es paralela a uno de los ejes de coordenadas:

a) A(0, 4) y es paralela al eje x.   b) $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y es paralela al eje x.

c) A(5, 0) y es paralela al eje y.   d) A(3, –1) y es paralela al eje y.

2. Demuestra que la pendiente de cualquier recta horizontal es igual a cero.

Indicador de logro

2.4 Encuentra la ecuación y grafica la recta paralela a uno de los ejes de coordenadas que pasa por un punto dado.

Secuencia

Las formas de la ecuación de la recta que se han estudiado hasta ahora no consideran el caso en el cual la recta es vertical, ya que se había estudiado como función, ahora se hace en el bloque de geometría analítica. En esta clase se estudian las ecuaciones de las rectas verticales y horizontales.

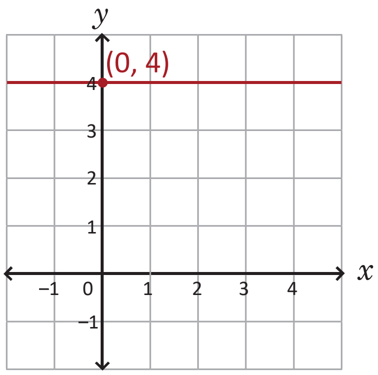
Propósito

En el problema inicial es posible deducir la ecuación de la recta horizontal utilizando las formas ya estudiadas, en el caso de la recta vertical el estudiante puede deducirla a partir de la gráfica.

Solución de problemas:

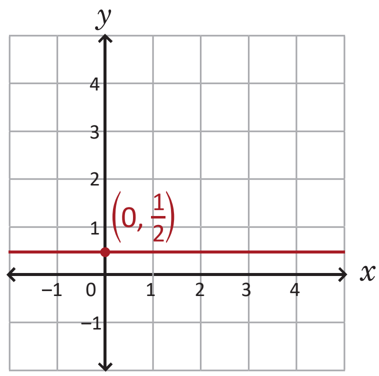
a) A(0, 4) y es paralela al eje x.

$y = 4$



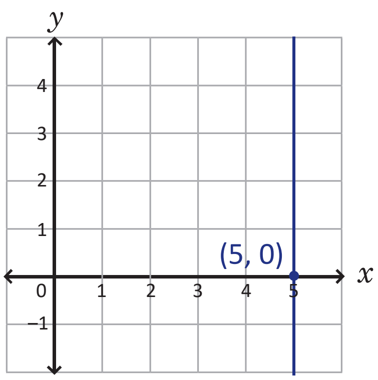
b) A $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y es paralela al eje x.

$y = \frac{1}{2}$



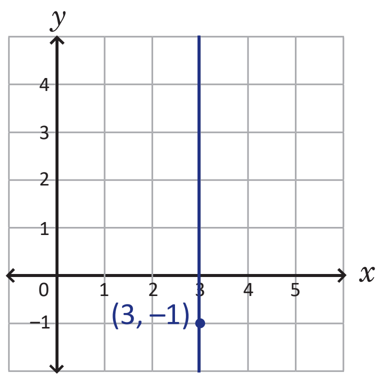
c) A(5, 0) y es paralela al eje y.

$x = 5$



d) A(3, –1) y es paralela al eje y.

$x = 3$



2. Sea k un número real.
Para calcular la pendiente de la recta $y = k$ basta tomar dos puntos sobre la recta, estos puede ser $(0, k)$ y $(1, k)$.
Entonces $m = \frac{k - k}{1 - 0} = 0$.

Lección 2

2.5 Forma general de la ecuación de una recta

Problema inicial

Grafica en un mismo plano cartesiano las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3y + 6 = 0$ b) $y + 2 = 0$ c) $4x - 24 = 0$

Despeja y en los literales a) y b), y x en el literal c).

Solución

a) Se despeja la variable y:

$$3y = 2x + 6$$
$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

Esta última es la ecuación de una línea recta, que pasa por los puntos (0, 2) y (3, 4).

b) Se despeja la variable y:

$$y = -2$$

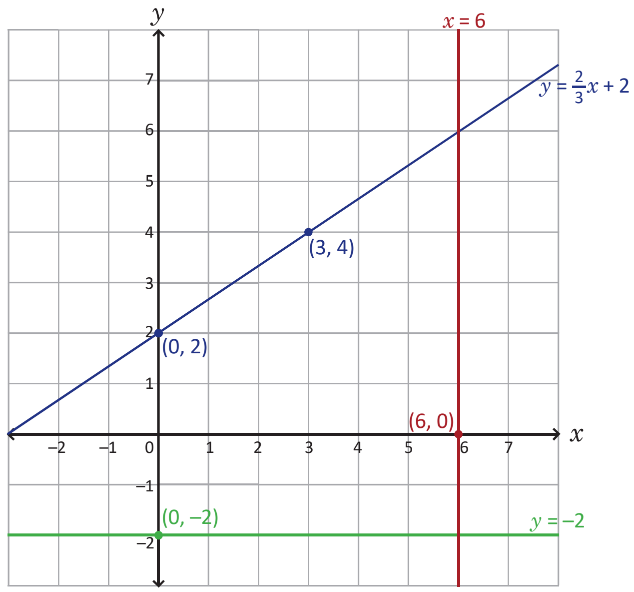
Esta última es la ecuación de una línea recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, –2).

c) Se despeja la variable x:

$$4x = 24$$
$$x = 6$$

Esta última es la ecuación de una línea recta paralela al eje y que pasa por el punto (6, 0).

En el literal a), para encontrar los puntos (0, 2) y (3, 4) se sustituyeron los valores $x = 0$ y $x = 3$ en la ecuación de la recta y se encontraron sus respectivos valores $y = 2$ y $y = 4$.



Definición

La ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, donde a, b y c son números reales (a y b no pueden ser cero al mismo tiempo), tiene por gráfica una línea recta.

A esta ecuación se le llama **forma general de la ecuación de una recta**.

La forma general de la ecuación de una recta no es única. Por ejemplo, las ecuaciones $2x - y + 1 = 0$, $-2x + y - 1 = 0$ y $4x - 2y + 2 = 0$ representan la misma recta. Los coeficientes de la segunda son los opuestos de los de la primera, y los coeficientes de la tercera son el doble de los de la primera.

Problemas

1. Grafica, en un mismo plano cartesiano, las rectas representadas por las siguientes ecuaciones:

a) $3x + y - 5 = 0$ b) $x - 2y - 9 = 0$ c) $5y - 5 = 0$ d) $2x + 3 = 0$

2. Escribe las siguientes ecuaciones de líneas rectas en su forma general (utiliza coeficientes enteros):

a) $y = -2x + \frac{5}{4}$ b) $y = \frac{3}{5}x + 2$ c) $y = -\frac{5}{6}$ d) $x = \frac{8}{3}$

Indicador de logro

2.5 Grafica líneas rectas cuya ecuación es de la forma $ax + by + c = 0$.

Secuencia

El estudiante debe comprender que todas las formas de la ecuación de la recta se pueden escribir en la forma general. Puede discutir las ventajas de la forma general y la forma punto-pendiente, posteriormente se confirmará en la resolución de problemas.

Solución de problemas:

1a) $3x + y - 5 = 0$

$y = -3x + 5$

Puntos $(0, 5), (1,2)$

1b) $x - 2y - 9 = 0$

$-2y = -x + 9$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$

Puntos $(1, -4), (3, -3)$

1c) $5y - 5 = 0$

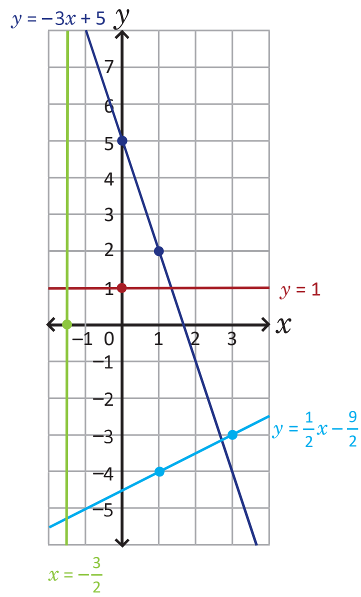
$y = 1$

Puntos $(0, 1)$

1d) $2x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$

Punto $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$



2a)

$y = -2x + \frac{5}{4}$

$4y = -8x + 5$

$8x + 4y - 5 = 0$

2b)

$y = \frac{3}{5}x + 2$

$5y = 3x + 10$

$-3x + 5y - 10 = 0$

2c)

$y = -\frac{5}{6}$

$6y = -5$

$6y + 5 = 0$

2d)

$x = \frac{8}{3}$

$3x = 8$

$3x - 8 = 0$

2.6 Practica lo aprendido

1. Para cada literal, determina (sin graficar) si los puntos A, B y C se encuentran sobre la misma línea recta:

   a) A(0, 7), B(2, 3) y C(3, 1)
   b) A(–3, 5), B(1, 2) y C(5, –1)
   c) A(–1, –6), B(0, –2) y C(1, 3)
   d) A(–4, 8), B(2, 4) y C(20, –8)

2. Dados los puntos A(0, –3) y B(6, 4), ¿cuál debe ser el valor de x en C(x, 25) para que los puntos A, B y C estén sobre la misma línea recta?

3. Para cada literal encuentra la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por el punto A; grafícalas en un solo plano:

   a) Pendiente $m = -4$, A(–3, 5)
   b) Pendiente $m = 10$, A(1, –1)
   c) Pendiente $m = \frac{1}{5}$, A(0, 4)
   d) Pendiente $m = \frac{2}{5}$, A$\left(-2, -\frac{4}{5}\right)$

4. Demuestra que la ecuación de la recta que tiene pendiente conocida m y pasa por el punto (0, b) es $y = mx + b$.

A la ecuación de la recta escrita en la forma $y = mx + b$ se le conoce como forma punto – intercepto.

5. Para cada literal encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B; grafícalas en un solo plano cartesiano:

   a) A(5, 1) y B(6, –2)
   b) A(–4, –4) y B(2, 5)
   c) A$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y B$\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
   d) A(0, 0) y B$\left(2, -\frac{13}{4}\right)$

6. Para cada literal encuentra la ecuación de la recta paralela a uno de los ejes de coordenadas y pasa por el punto A; grafícalas en un solo plano cartesiano:

   a) A(9, 0) y es paralela al eje y
   b) A(–5, 2) y es paralela al eje x
   c) A$\left(\frac{7}{2}, 5\right)$ y es paralela al eje y
   d) A$\left(\frac{5}{6}, -\frac{9}{2}\right)$ y es paralela al eje x

7. Escribe las siguientes ecuaciones de líneas rectas en su forma general (utiliza coeficientes enteros):

   a) $y = 4x + 3$
   b) $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$
   c) $y = 4x - \frac{2}{3}$
   d) $y = -\frac{x}{5} - 1$

8. Encuentra los valores de m y b en la ecuación $y = mx + b$ si la recta pasa por los puntos (–1, 0) y (3, 2).

Indicador de logro

2.6 Resuelve problemas correspondientes a la ecuación de la línea recta.

Solución de problemas:

1a) A(0, 7) y B(2, 3):

$\frac{3-7}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2$

A(0, 7), C(3, 1):

$\frac{1-7}{3-0} = \frac{-6}{3} = -2$

A, B y C están sobre la misma recta.

1b) A(–3, 5), B(1, 2):

$\frac{2-5}{1-(-3)} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

B(1, 2), C(5, –1):

$\frac{-1-2}{5-1} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

A, B y C están sobre la misma recta.

1c) A(–1, –6), B(0, –2):

$\frac{-2-(-6)}{0-(-1)} = \frac{4}{1} = 4$

B(0, –2), C(1, 3):

$\frac{3-(-2)}{1-0} = \frac{5}{1} = 5$

A, B y C no están sobre la misma recta.

1d) A(–4, 8), B(2, 4)

$\frac{4-8}{2-(-4)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

B(2, 4), C(20, –8):

$\frac{-8-4}{20-2} = \frac{-12}{18} = -\frac{2}{3}$

A, B y C están sobre la misma recta.

2. $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-(-3)}{6-0} = \frac{7}{6}$

$\frac{25-4}{x-6} = \frac{7}{6}$

$21(6) = 7(x-6)$

$\frac{21(6)}{7} = x-6$

$18 = x-6$

$x = 24$

3a) $y - 5 = -4[x-(-3)]$

$y = -4x - 7$

3b) $y - (-1) = 10(x-1)$

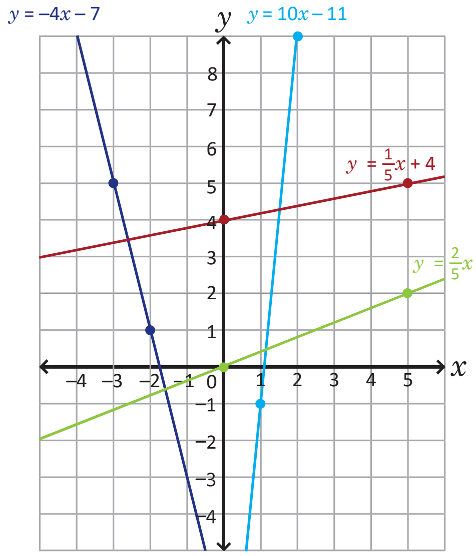
$y = 10x - 11$

3c) $y - 4 = \frac{1}{5}(x-0)$

$y = \frac{1}{5}x + 4$

3d) $y - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}[x-(-2)]$

$y = \frac{2}{5}x$



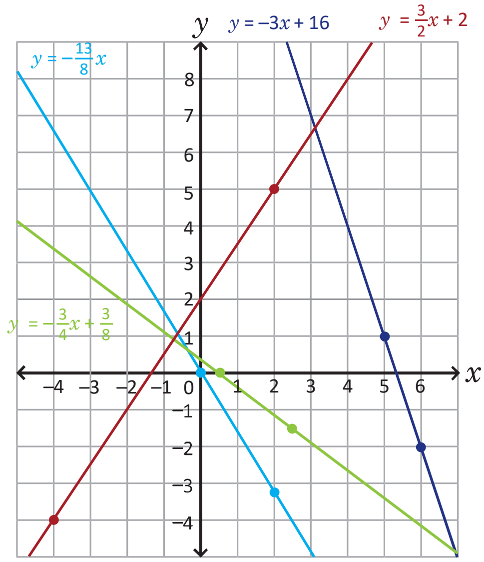
4. $y - b = m(x-0)$ entonces $y = mx + b$.

5a) $y = -3x + 16$

5b) $y = \frac{3}{2}x + 2$

5c) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$

5d) $y = -\frac{13}{8}x$

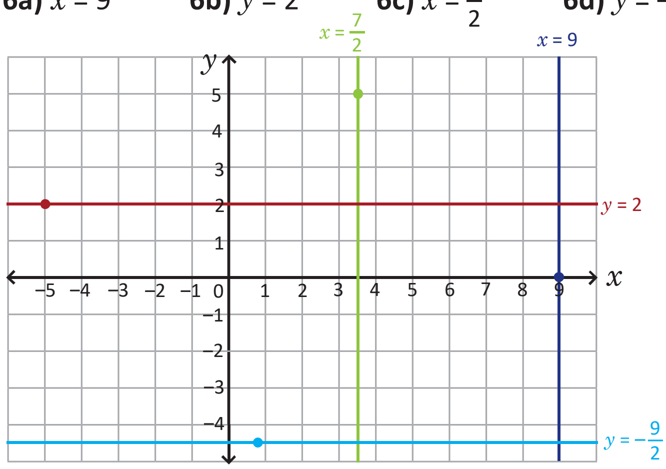


6a) $x = 9$

6b) $y = 2$

6c) $x = \frac{7}{2}$

6d) $y = -\frac{9}{2}$



7a) $4x - y + 3 = 0$

7b) $8x - 6y + 1 = 0$

7c) $12x - 3y - 2 = 0$

7d) $x + 5y + 5 = 0$

8. Evaluando los puntos (–1, 0) y (3, 2) en la ecuación $y = mx + b$ se tiene: $\begin{cases} 0 = -m + b \\ 2 = 3m + b \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

3.1 Intersección de una recta con el eje x

Problema inicial

En cada literal, encuentra las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x:

a) $y = 3x + 3$ b) $x + 2y - 2 = 0$

Punto de intersección se refiere al punto donde se cortan la recta y el eje x en este caso.

Solución

Sea A(x_1, y_1) el punto de intersección entre la recta y el eje x. En ambos casos, A se encuentra sobre el eje x, por tanto su segunda coordenada (y_1) es igual a cero y A(x_1, 0).

a) Si el punto A(x_1, 0) se encuentra sobre la recta, entonces satisface la ecuación:

$$y = 3x + 3$$

Se sustituyen las coordenadas de A en la ecuación anterior y se despeja x_1:

$$0 = 3x_1 + 3$$
$$3x_1 = -3$$
$$x_1 = -1$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de la recta $y = 3x + 3$ con el eje x son A(–1, 0).

b) De forma similar al literal anterior, si el punto A(x_1, 0) se encuentra sobre la recta entonces satisface la ecuación:

$$x + 2y - 2 = 0$$

Se sustituyen las coordenadas de A en la ecuación anterior y se despeja x_1:

$$x_1 + 2(0) - 2 = 0$$
$$x_1 = 2$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de la recta $x + 2y - 2 = 0$ con el eje x son A(2, 0).

Conclusión

Dada una recta l, las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x son (x_1, 0) donde el valor de x_1 se calcula sustituyendo $y = 0$ y $x = x_1$ en la ecuación de la recta, y despejando el valor de x_1.

Problemas

1. Para cada literal, encuentra las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x.

a) $y = 2x - 2$ b) $y = -\frac{x}{2} + 2$ c) $2x - 3y + 6 = 0$

d) $8x + 3y + 6 = 0$ e) $x = \sqrt{2}$ f) $y = \sqrt{3}$

2. Dada una recta con ecuación $ax + by + c = 0$ que no es paralela a ningún eje de coordenadas. Demuestra que las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x son $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

3. Sea l una recta con ecuación $x = k$. Demuestra que las coordenadas del punto de interserción de l con el eje x son (k, 0).

4. Sea l una recta paralela al eje x. ¿Existe un punto de intersección entre la recta l y el eje x? Justifica tu respuesta.

Indicador de logro

3.1 Encuentra las coordenadas del punto de intersección de una línea recta con el eje x.

Secuencia

En esta lección se estudian las propiedades de la recta iniciando, en esta clase, con la intersección con el eje x.

Propósito

En los Problemas, el estudiante determinará el punto de intersección en las distintas formas de la ecuación de la recta. Los problemas 2, 3 y 4 generalizan los resultados del problema 1.

Solución de problemas:

1a) $0 = 2x_1 - 2$
$2x_1 = 2$
$x_1 = 1$
$(1, 0)$

1b) $0 = -\frac{x_1}{2} + 2$
$0 = -x_1 + 4$
$x_1 = 4$
$(4, 0)$

1c) $2x_1 - 3(0) + 6 = 0$
$2x_1 = -6$
$x_1 = -3$
$(-3, 0)$

1d) $8x_1 + 3(0) + 6 = 0$
$8x_1 = -6$
$x_1 = -\frac{3}{4}$
$\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

1e) $x = \sqrt{2}$
$x_1 = \sqrt{2}$
$(\sqrt{2}, 0)$

1f) Los puntos de la gráfica de $y = \sqrt{3}$ son de la forma $(k, \sqrt{3})$, donde k es un número real, así la recta no interseca al eje x.

Otra solución: la recta es paralela al eje x por lo que no se intersecan.

2. $ax_1 + b(0) + c = 0$
$ax_1 + c = 0$, con $a \neq 0$ ya que la recta no es paralela al eje x.
$x_1 = -\frac{c}{a}$

Por lo tanto, el punto de intersección del eje x con la recta es $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

3. Los puntos de la recta $x = k$ son de la forma (k, l) donde l es un número real.
Un punto está sobre el eje x si su segunda coordenada es cero.
Entonces el punto de intersección de la recta $x = k$ con el eje x es el punto $(k, 0)$.

4. Una recta paralela al eje x es de la forma $y = l$ y sus puntos son de la forma (k, l).
Un punto está sobre el eje x si su segunda coordenada es cero.
Si $l = 0$ entonces $y = 0$, esta recta es precisamente el eje x.
Si $l \neq 0$ entonces la recta $y = l$ no interseca al eje x.

3.2 Intersección de una recta con el eje y

Problema inicial

Utilizando las ecuaciones de las rectas del Problema inicial de la clase anterior, encuentra las coordenadas del punto de intersección de cada recta con el eje y.

Solución

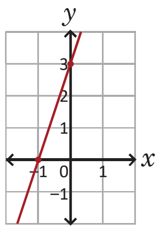
Sea B(x_1, y_1) el punto de intersección entre la recta y el eje y. En ambos casos, B se encuentra sobre el eje y, por tanto su primera coordenada (x_1) es igual a cero y B(0, y_1).

a) Si el punto B(0, y_1) se encuentra sobre la recta, entonces satisface la ecuación: $y = 3x + 3$. Se sustituyen las coordenadas de B en la ecuación anterior y se encuentra y_1:

$$y_1 = 3(0) + 3$$
$$y_1 = 3$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de la recta $y = 3x + 3$ con el eje y son B(0, 3).

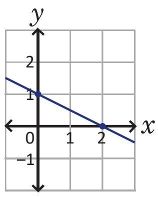
Gráficamente, la recta $y = 3x + 3$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos (–1, 0) y (0, 3).



b) De manera similar al literal anterior, si el punto B(0, y_1) se encuentra sobre la recta entonces satisface la ecuación: $x + 2y - 2 = 0$. Se sustituyen las coordenadas de B en la ecuación anterior y se despeja y_1:

$$0 + 2y_1 - 2 = 0$$
$$2y_1 = 2$$
$$y_1 = 1$$

Gráficamente, la recta $x + 2y - 2 = 0$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos (2, 0) y (0, 1).



Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de la recta $x + 2y - 2 = 0$ con el eje y son B(0, 1).

Conclusión

Dada una recta l, las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje y son (0, y_1), donde el valor de y_1 se calcula sustituyendo $y = y_1$ y $x = 0$ en la ecuación de la recta, y despejando el valor de y_1.

Si l es paralela al eje x entonces su ecuación es de la forma $y = k$ y el punto de intersección de la recta con el eje y es (0, k). Si l es paralela al eje y entonces no hay intersección entre la recta y el eje y.

En general, a los puntos donde una línea recta corta a los ejes de coordenadas se les llaman **interceptos con los ejes**. La línea recta puede tener a lo sumo dos interceptos (uno en cada eje).

Problemas

1. Con las ecuaciones de las rectas dadas en el problema 1 de la clase anterior, encuentra las coordenadas del punto de intersección de cada recta con el eje y.

2. Para cada literal encuentra las coordenadas de los interceptos con los ejes:
   a) $2x - 3y - 6 = 0$ b) $4x + y + 2 = 0$

3. Sean p y q números reales diferentes de cero. Demuestra que los interceptos con los ejes de la recta con ecuación $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ son (p, 0) y (0, q). A esta ecuación se le llama **forma simétrica de la ecuación de una recta**.

Indicador de logro

3.2 Encuentra las coordenadas del punto de intersección de una línea recta con el eje y.

Secuencia

Ahora se estudia la intersección de una recta con el eje y, el razonamiento a utilizar para determinar el intercepto es análogo al de la clase anterior.

Solución de problemas:

1a) $y_1 = 2(0) - 2$
$y_1 = -2$
$(0, -2)$

1b) $y_1 = -\frac{0}{2} + 2$
$y_1 = 2$
$(0, 2)$

1c) $2(0) - 3y_1 + 6 = 0$
$-3y_1 = -6$
$y_1 = 2$
$(0, 2)$

1d) $8(0) + 3y_1 + 6 = 0$
$3y_1 = -6$
$y_1 = -2$
$(0, -2)$

1e) Los puntos de la gráfica de $x = \sqrt{2}$ son de la forma $(\sqrt{2}, k)$, donde k es un número real, así la recta no interseca al eje y.
Otra solución: la recta es paralela al eje y por lo que no se intersecan.

1f) $y = \sqrt{3}$
$y_1 = \sqrt{3}$
$(\sqrt{3}, 0)$

2a) $2x - 3y - 6 = 0$

Si $y = 0$
$2x_1 - 3(0) - 6 = 0$
$2x_1 = 6$
$x_1 = 3$
Intercepto con el eje x $(3, 0)$.

Si $x = 0$
$2(0) - 3y_1 - 6 = 0$
$-3y_1 = 6$
$y_1 = -2$
Intercepto con el eje y $(0, -2)$.

2b) $4x + y + 2 = 0$

Si $y = 0$
$4x_1 - (0) + 2 = 0$
$4x_1 = -2$
$x_1 = -\frac{1}{2}$
Intercepto con el eje x $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Si $x = 0$
$4(0) + y_1 + 2 = 0$
$y_1 = -2$
Intercepto con el eje y $(0, -2)$.

3. $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
$\frac{x}{p} + \frac{0}{q} = 1$
$\frac{x}{p} = 1$
$x = p$

Intercepto con el eje x $(p, 0)$.

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
$\frac{0}{p} + \frac{y}{q} = 1$
$\frac{y}{q} = 1$
$y = q$

Intercepto con el eje y $(0, q)$.

3.3 Intersección entre rectas

Problema inicial

Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre las rectas con ecuaciones $y = -x + 3$ y $2x - 3y + 4 = 0$.

El punto de intersección entre las rectas satisface ambas ecuaciones.

Solución

Sea P(x, y) el punto de intersección entre ambas rectas. Esto indica que las coordenadas de P satisfacen tanto la primera como la segunda ecuación, y encontrar sus coordenadas equivale a resolver el sistema:

$$\begin{cases} y = -x + 3 & \text{---------} (1) \\ 2x - 3y + 4 = 0 & \text{---------} (2) \end{cases}$$

Se sustituye el valor de y de la ecuación (1) en la ecuación (2) y se despeja la variable x:

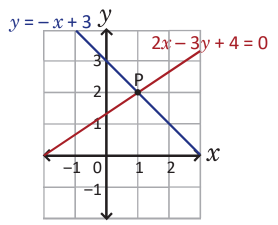
$$\begin{aligned} 2x - 3(-x + 3) + 4 &= 0 \\ 2x + 3x &= 9 - 4 \\ 5x &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Se sustituye el valor de x en la ecuación (1):

$$y = -1 + 3 = 2$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección entre las rectas es P(1, 2).

El punto donde se cortan las rectas de $y = -x + 3$ y $2x - 3y + 4 = 0$ es P(1, 2).



Conclusión

Dadas dos líneas rectas, las coordenadas del punto de intersección entre ambas (es decir, donde se cortan las líneas) se encuentra resolviendo el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas formadas por las ecuaciones de dichas rectas.

Si dos rectas diferentes se intersecan en un punto P este es único, es decir, no existe otro punto R diferente a P donde las rectas se crucen o se corten.

Problemas

1. Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre cada pareja de rectas cuyas ecuaciones son:

   a) $y = -3x - 8$ y $4x - 3y + 15 = 0$
   b) $x + y - 2 = 0$ y $2x - y + 2 = 0$
   c) $x + 2y + 6 = 0$ y $4x + 3y + 4 = 0$
   d) $2x + 3y = 4$ y $4x - y = 8$
   e) $y = x + 1$ y $x = -2$
   f) $3x - 2y - 5 = 0$ y $y = 2$

2. Dadas dos rectas con ecuaciones $y = k_1$ y $x = k_2$, ¿cuáles son las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas?

3. Dadas dos rectas con ecuaciones $10x - 5y = 10$ y $10x - 5y = -25$, ¿se cortan estas en algún punto? Verifica gráficamente tu respuesta.

Indicador de logro

3.3 Determina las coordenadas del punto de intersección entre dos rectas.

Secuencia

Se determina el punto de intersección entre dos rectas dadas, utilizando los métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que se estudiaron en Tercer Ciclo. Se verifica la utilidad de la forma general en el planteamiento del sistema de ecuaciones.

Solución de problemas:

1a) $\begin{cases} y = -3x - 8 & \text{---- (1)} \\ 4x - 3y + 15 = 0 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Sustituyendo (1) en (2):

$4x - 3(-3x - 8) + 2 = 0$

$4x + 9x + 26 = 0$

$13x = -26$

$x = -2$

Entonces $y = -3(-2) - 8 = -2$.

Punto de intersección:

$(-2, -2)$.

1b) $\begin{cases} x + y - 2 = 0 & \text{---- (1)} \\ 2x - y + 2 = 0 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Sumando (1) y (2) se tiene

$3x = 0$ entonces $x = 0$.

Sustituyendo en (1),

$0 + y - 2 = 0$

$y = 2$

Punto de intersección:

$(0, 2)$.

1c) $\begin{cases} x + 2y + 6 = 0 & \text{---- (1)} \\ 4x + 3y + 4 = 0 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Despejando x en (1):

$x = -2y - 6$.

Sustituyendo en (2):

$4(-2y - 6) + 3y + 4 = 0$

$-8y - 24 + 3y + 4 = 0$

$-5y = 20$

$y = -4$

Entonces $x = -2(-4) - 6 = 2$.

Punto de intersección $(2, -4)$.

1d) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 & \text{---- (1)} \\ 4x - y = 8 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Punto de intersección:

$(2, 0)$.

1e) $\begin{cases} y = x + 1 & \text{---- (1)} \\ x = -2 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Punto de intersección:

$(-2, -1)$.

1f) $\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 & \text{---- (1)} \\ y = 2 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Punto de intersección:

$(3, 2)$.

2. $\begin{cases} y = k_1 \ldots (1) \\ x = k_2 \ldots (2) \end{cases}$

Ambas rectas pasan por el punto (k_2, k_1),
por lo tanto su punto de intersección es (k_2, k_1).

3. Si las rectas tienen punto de intersección, debe tener solución el sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} 10x - 5y = 10 & \text{---- (1)} \\ 10x - 5y = -25 & \text{---- (2)} \end{cases}$

Restando (2) de (1) se tiene:

$0 = 35$.

Y esto no es cierto, por lo que el sistema no tiene solución y por lo tanto, las rectas no se cortan en ningún punto.

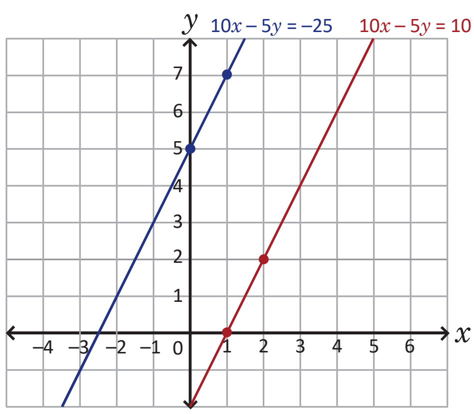
Puntos para $10x - 5y = -25$

$(0, 5)$ y $(1, 7)$

Puntos para $10x - 5y = 10$

$(1, 0)$ y $(2, 2)$

El método de solución utilizado se conoce como reducción al absurdo.



Lección 3

3.4 Rectas paralelas

Problema inicial

Dadas las rectas con ecuaciones $y = 2x + 3$ y $y = 2x - 5$:

1. ¿Cuál es el valor de la pendiente en cada recta?
2. ¿Se cortan las rectas en algún punto? Justifica tu respuesta.
3. Grafica ambas rectas en un mismo plano cartesiano. ¿Cómo son, una con respecto a la otra?

Si la ecuación de una recta está escrita en la forma $y = mx + b$ entonces el coeficiente de la variable x es la pendiente de la recta.

Solución

1. Las ecuaciones de las rectas están escritas en la forma $y = mx + b$, por tanto la pendiente de ambas rectas es igual a 2.

2. Para saber si se cortan las rectas debe resolverse el sistema:

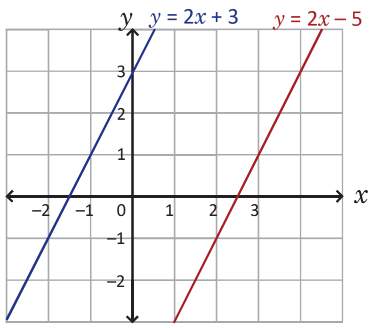
$$\begin{cases} y = 2x + 3 & \text{----------} \ (1) \\ y = 2x - 5 & \text{----------} \ (2) \end{cases}$$

Pero este sistema no tiene solución, ya que al sustituir (1) en (2) resulta:

$$2x + 3 = 2x - 5$$
$$2x - 2x = -3 - 5$$
$$0 = -8$$

Esto indica que las rectas NO se cortan en ningún punto.

3. Las gráficas de ambas rectas se presentan en la figura de la derecha. Como las rectas no se cortan en ningún punto, esto indica entonces que son paralelas.



Dos rectas son paralelas si, aunque se prolonguen, guardan la misma distancia entre sí.

Teorema

Dos (o más) líneas rectas no verticales son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente. Esto quiere decir que si dos (o más) rectas son paralelas entonces tienen la misma pendiente y viceversa.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1, 3) y es paralela a $2x + y - 1 = 0$.

Se despeja y en $2x + y - 1 = 0$ para encontrar el valor de la pendiente: $y = -2x + 1$; luego, $m = -2$. Como la recta pasa por A(1, 3), se utiliza la forma punto – pendiente de la ecuación de una recta:

$$y - 3 = -2(x - 1)$$
$$y = -2x + 5$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por A(1, 3) y es paralela a $2x + y - 1 = 0$ es $y = -2x + 5$.

Problemas

1. Determina si las siguientes parejas de rectas son paralelas:

a) $y = -4x + 7$; $y = -4x + 16$ b) $3x - 2y + 3 = 0$; $6x - 4y - 9 = 0$ c) $x - 2y + 5 = 0$; $x - 3y = 0$

2. Para cada literal, encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta dada y que pasa por el punto A:

a) $2x - y = 0$; A(4, 0) b) $x + 3y - 5 = 0$; A(3, 4)
c) $y = 5$; A(0, –1) d) $x = 1$; A(3, –2)

Indicador de logro

3.4 Verifica el paralelismo entre rectas a partir del valor de sus pendientes.

Secuencia

En la lección 2 se estudiaron las rectas paralelas a los ejes coordenados, estas deben tenerse presentes en la resolución de problemas. Para esta clase se relaciona el paralelismo de dos rectas con sus pendientes.

Propósito

Con el Problema se establece la relación entre la pendiente de una recta y las rectas paralelas a esta, además se establece analíticamente que estas rectas no se cortan en un punto por medio del sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de la rectas, el cual no tienen solución.

Solución de problemas:

1a) $y = -4x + 7$; $y = -4x + 16$, son paralelas pues la pendiente de ambas es -4.

1b) $3x - 2y + 3 = 0$; $6x - 4y - 9 = 0$

Se escriben en la forma $y = mx + b$

$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$; $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$, son paralelas pues la pendiente de ambas es $\frac{3}{2}$.

1c) $x - 2y + 5 = 0$; $x - 3y = 0$

Se escriben en la forma $y = mx + b$: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; $y = \frac{1}{3}x$.

No son paralelas pues tienen pendientes distintas.

2a) $2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow m = 2$ y A(4, 0)

Utilizando la forma punto-pendiente

$$y - 0 = 2(x - 4).$$

Por lo tanto, la recta es $y = 2x - 8$.

2b) $x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$ y A(3, 4)

Utilizando la forma punto-pendiente

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 3).$$

Por lo tanto, la recta es $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

2c) $y = 5 \Rightarrow m = 0$ y A(0, –1).

Utilizando la forma punto-pendiente

$$y - (-1) = 0(x - 0).$$

Por lo tanto, la recta es $y = -1$.

2d) $x = 1$, es una recta vertical.

Así una recta paralela a esta debe ser vertical y pasar por el punto A(3, –2).

Por lo tanto, la recta es $x = 3$.

3.5 Rectas perpendiculares*

Problema inicial

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el origen y además es perpendicular a la recta con ecuación:

$$y = 3x.$$

¿Cuál es la relación entre las pendientes de ambas rectas?

Solución

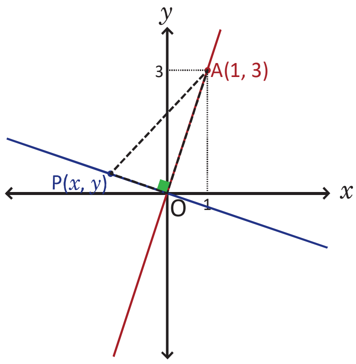
La ecuación buscada es de la forma $y = mx$, ya que pasa por el origen; sea P(x, y) un punto cualquiera sobre ella. El punto A(1, 3) pertenece a $y = 3x$ pues sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Si O es el origen entonces el triángulo POA es rectángulo (las rectas son perpendiculares). Por el teorema de Pitágoras:

$$d(\text{P, A})^2 = d(\text{P, O})^2 + d(\text{O, A})^2$$

En la ecuación anterior: $d(\text{P, A})^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2$, $d(\text{P, O})^2 = x^2 + y^2$ y $d(\text{O, A})^2 = 1^2 + 3^2$. Se sustituyen los valores y se despeja y en términos de x:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x^2 + y^2) + (1 + 9)$$
$$\cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} - 6y + \cancel{9} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{1} + \cancel{9}$$
$$-2x - 6y = 0$$
$$y = -\frac{1}{3}x$$



Por lo tanto, la ecuación de la recta perpendicular a $y = 3x$ que pasa por el origen es: $y = -\frac{1}{3}x$. Al comparar las pendientes de ambas rectas, que son 3 y $-\frac{1}{3}$ respectivamente, se observa que el resultado del producto de ellas es igual a –1.

Teorema

Dos rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2 respectivamente son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a –1, o sea:

$$m_1m_2 = -1$$

Esto quiere decir que, si dos rectas son perpendiculares entonces el producto de sus pendientes es igual a –1 y viceversa.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1, 3) y es perpendicular a $2x + y - 1 = 0$.

Al despejar y en $2x + y - 1 = 0$ se obtiene $y = -2x + 1$; luego, $m_1 = -2$. Si m_2 es la pendiente de la recta buscada entonces debe cumplir $m_1m_2 = -1$; se sustituye m_1 y se despeja m_2:

$$-2m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta perpendicular a $2x + y - 1 = 0$ que pasa por A(1, 3) es $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Problemas

1. Determina si las siguientes parejas de rectas son perpendiculares:

a) $y = -2x$ y $y = \frac{x}{2}$

b) $y = \frac{4}{3}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$

c) $x - y + 2 = 0$ y $3x + 2y + 6 = 0$

d) $x - 2y + 2 = 0$ y $2x + y - 6 = 0$

2. Para cada caso encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto P:

a) $y = x$; P(3, 3)

b) $y = -2x + 5$; P(–4, 3)

c) $x - 4y + 4 = 0$; P(–1, 5)

d) $y = 1$; P(1, –1)

Indicador de logro

3.5 Verifica perpendicularidad entre rectas utilizando sus pendientes.

Secuencia

Se determina la recta perpendicular a otra estudiando el caso particular en el que la recta pasa por el origen. El Problema inicial requiere el uso de la fórmula de la distancia y utilizar algún punto de la gráfica, si esto es muy difícil para los estudiantes el docente debe resolver este problema.

Propósito

Al resolver el Problema inicial se establece la relación entre las pendientes de dos rectas que son perpendiculares. Si se vuelve complicado plantear la solución, el docente debe intervenir. Los casos en los que una de las rectas es vertical u horizontal se aborda en los Problemas.

Solución de problemas:

1a) $y = -2x$ y $y = \frac{x}{2}$

$m_1 = -2 \qquad m_2 = \frac{1}{2}$

$m_1 m_2 = -2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

Son perpendiculares.

1b) $y = \frac{4}{3}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$

$m_1 = \frac{4}{3} \qquad m_2 = -\frac{3}{4}$

$m_1 m_2 = \frac{4}{3}\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$

Son perpendiculares.

1c) $y = x + 2$ y $y = -\frac{3}{2}x - 3$

$m_1 = 1 \qquad m_2 = -\frac{3}{2}$

$m_1 m_2 = 1\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

No son perpendiculares.

1d) $y = \frac{x}{2} + 1$ y $y = -2x + 6$

$m_1 = \frac{1}{2} \qquad m_2 = -2$

$m_1 m_2 = \frac{1}{2}(-2) = -1$

Son perpendiculares.

2a) $y = x$; P(3, 3); $m_1 = 1$

$$
\begin{aligned}
m_1 m_2 &= -1\\
1(m_2) &= -1\\
m_2 &= -1\\
y - 3 &= -(x - 3)\\
y &= -x + 6
\end{aligned}
$$

2b) $y = -2x + 5$; P(–4, 3); $m_1 = -2$

$$
\begin{aligned}
m_1 m_2 &= -1\\
-2(m_2) &= -1\\
m_2 &= \frac{1}{2}\\
y - 3 &= \frac{1}{2}[x - (-4)]\\
y &= \frac{1}{2}x + 5
\end{aligned}
$$

2c) $y = \frac{x}{4} + 1$; P(–1, 5); $m_1 = \frac{1}{4}$

$$
\begin{aligned}
m_1 m_2 &= -1\\
\frac{1}{4}(m_2) &= -1\\
m_2 &= -4\\
y - 5 &= -4[x - (-1)]\\
y &= -4x + 1
\end{aligned}
$$

2d) $y = 1$ es una recta horizontal.
Una recta perpendicular a esta debe ser vertical, además debe pasar por P(1, –1).
Entonces la recta es $x = 1$.

Lección 3

3.6 Distancia de un punto a una recta

Teorema

Dada una recta l con ecuación $ax + by + c = 0$ y $P(x_1, y_1)$ un punto que no pertenece a l, la distancia desde P a la recta l se denota por $d(P, l)$ y:

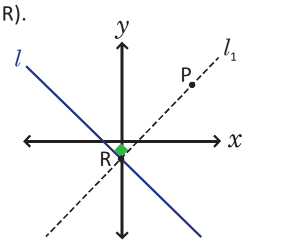
$$d(P, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ejemplo

Para cada caso, encuentra la distancia del punto P a la recta l:

a) l: $2x - y + 1 = 0$ y P(2, 0) b) l: $3x + 2y - 9 = 0$ y P(2, −2) c) l: $y = \frac{x}{3} + \frac{8}{3}$ y P(0, 5)

Si l_1 es la recta perpendicular a l que pasa por P y R es el punto de intersección entre l y l_1 entonces, calcular $d(P, l)$ equivale a encontrar $d(P, R)$.



a) Se sustituyen los valores: $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$, $x_1 = 2$ y $y_1 = 0$:

$$d(P, l) = \frac{|2(2) + (-1)(0) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 + 0 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Por lo tanto, la distancia desde P a la recta l es $\sqrt{5}$.

b) Se sustituyen los valores: $a = 3$, $b = 2$, $c = -9$, $x_1 = 2$ y $y_1 = -2$:

$$d(P, l) = \frac{|3(2) + (2)(-2) + (-9)|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|6 - 4 - 9|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

Por lo tanto, la distancia desde P a la recta l es $\frac{7\sqrt{13}}{13}$.

c) Primero debe escribirse la ecuación de la recta en la forma $ax + by + c = 0$. Al multiplicar toda la ecuación por 3 resulta:

$$3y = x + 8$$
$$x - 3y + 8 = 0$$

Luego se sustituyen los valores: $a = 1$, $b = -3$, $c = 8$, $x_1 = 0$ y $y_1 = 5$:

$$d(P, l) = \frac{|1(0) + (-3)(5) + 8|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|0 - 15 + 8|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}.$$

Por lo tanto, la distancia desde P a la recta l es $\frac{7\sqrt{10}}{10}$.

Problemas

1. Encuentra la distancia del punto P a la recta l:
   a) l: $x + 3y - 3 = 0$ y P(1, −1) b) l: $2x + y - 4 = 0$ y P(0, 3)
   c) l: $y = \frac{3}{4}x$ y P(1, −2) d) l: $y = \frac{x}{5} + 1$ y P(3, −3)

2. Demuestra que la distancia del origen a la recta l: $ax + by + c = 0$ es $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Indicador de logro

3.6 Calcula la distancia de un punto a una recta.

Secuencia

En esta clase se utiliza la fórmula de la distancia de un punto a una recta. El estudiante debe comprender qué longitud es la que calcula al utilizar la fórmula.

Propósito

No se deduce la fórmula de la distancia, por ser un problema extenso en resolver, sin embargo se espera que el estudiante sea capaz de utilizar adecuadamente la fórmula.

Solución de problemas:

1a) l: $x + 3y - 3 = 0$ y $P(1, -1)$

$$d(P, l) = \frac{|1 + 3(-1) - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

1b) l: $2x + y - 4 = 0$ y $P(0, 3)$

$$d(P, l) = \frac{|2(0) + 3 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

1c) l: $3x - 4y = 0$ y $P(1, -2)$

$$d(P, l) = \frac{|3(1) - 4(-2)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|11|}{5} = \frac{11}{5}$$

1d) l: $x - 5y + 5 = 0$ y $P(3, -3)$

$$d(P, l) = \frac{|3 - 5(-3) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{|23|}{\sqrt{26}} = \frac{23\sqrt{26}}{26}$$

2. $$d(P, l) = \frac{|a(0) + b(0) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Puede revisar la demostración de la fórmula en:
https://youtu.be/P740MiWj2GU

3.7 Practica lo aprendido

1. Encuentra las coordenadas de los interceptos de cada recta con los ejes:

a) $y = 2x$ b) $5x + 2y + 10 = 0$

c) $y = \frac{x}{6} - 1$ d) $y = -8x + 4$

e) $y = 3$ f) $x = -4$

2. Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre cada pareja de rectas:

a) $x + y - 2 = 0$; $4x - y + 7 = 0$ b) $y = -x$; $3x + y - 6 = 0$

c) $x + 2y + 2 = 0$; $y = 2x + 9$ d) $x - y - 1 = 0$; $y = 3$

e) $3x - y + 3 = 0$; $9x + 7y - 4 = 0$ f) $y = -5$; $x = \frac{1}{4}$

3. Determina si cada pareja de rectas son paralelas o perpendiculares:

a) $y = 3x - 5$; $y = 3x$ b) $y = \frac{x}{4} + 1$; $x - 4y + 2 = 0$

c) $y = -3x - 2$; $x - 3y + 1 = 0$ d) $y = -2$; $x = 1$

4. Encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta l que pasa por el punto A:

a) l: $y = -2x + 5$; A(–2, –3) b) l: $y = 3x + 4$; A(5, –1)

5. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta l que pasa por el punto A:

a) l: $y = -5x - 1$; A(10, 1) b) l: $3x - 4y + 8 = 0$; A(–6 , 0)

6. Dos rectas l_1 y l_2 se intersecan en el punto (–4, 4). Si l_1 pasa por (0, 12) y es perpendicular a l_2, ¿cuáles son las ecuaciones de ambas rectas?

7. Sea l la recta con ecuación $5x - 2y = 0$. Determina los valores de a y b para que la recta $ax + by + c = 0$:

a) Sea paralela a la recta l. b) Sea perpendicular a la recta l.

Existen infinitas rectas paralelas y perpendiculares a l: $5x - 2y = 0$; basta con encontrar un par de valores para a y b en cada literal.

8. Sea l la recta con ecuación $x - 3y - 6 = 0$. Determina el valor de a en la recta con ecuación $ax + (a - 4)y + c = 0$ para que:

a) Sea paralela a la recta l. b) Sea perpendicular a la recta l.

9. Para cada caso, encuentra la distancia del punto P a la recta l:

a) P(4, –9); l: $x + 4y - 2 = 0$ b) P(8, 5); l: $y = x$

c) P(0, –3); l: $y = -2x$ d) P(3, 1); l: $x = -3$

Indicador de logro

3.7 Resuelve problemas correspondientes a posiciones relativas entre rectas.

Solución de problemas:

1a) $y = 2x$

Intercepto en el eje x

$0 = 2x \Rightarrow x = 0$

(0, 0) y es también el intercepto con eje y.

1b) $5x + 2y + 10 = 0$

Intercepto en el eje x

$5x + 2(0) + 10 = 0$

$\Rightarrow x = -2$

Por lo tanto, el intercepto en el eje x es $(-2, 0)$.

Intercepto en el eje y

$5(0) + 2y + 10 = 0$

$\Rightarrow y = -5$

Por lo tanto, el intercepto en el eje y es $(0, -5)$.

1c) $y = \frac{x}{6} - 1$ Intercepto en el eje x $(6, 0)$.

Intercepto en el eje y $(0, -1)$.

1d) $y = -8x + 4$ Intercepto en el eje x $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Intercepto en el eje y $(0, 4)$.

1e) $y = 3$

No tiene intercepto en el eje x.

Intercepto en el eje y $(0, 3)$.

1f) $x = -4$

Intercepto en el eje x $(-4, 0)$.

No tiene intercepto en el eje y.

2a) $\begin{cases} x + y - 2 = 0 & \text{----- (1)} \\ 4x - y + 7 = 0 & \text{----- (2)} \end{cases}$

Sumando (1) y (2) se tiene

$5x + 5 = 0$

$x = -1$

Sustituyendo en (1)

$-1 + y - 2 = 0$

$y = 3$

Punto de intersección

$(-1, 3)$.

2b) $\begin{cases} y = -x & \text{----- (1)} \\ 3x + y - 6 = 0 & \text{----- (2)} \end{cases}$

Sustituyendo (1) en (2)

$3x - x - 6 = 0$

$x = 3$

Sustituyendo en (1):

$y = -3$

Punto de intersección

$(3, -3)$.

2c) $\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 & \text{----- (1)} \\ y = 2x + 9 & \text{----- (2)} \end{cases}$

Sustituyendo (2) en (1):

$x + 2(2x + 9) + 2 = 0$

$x = -4$

Sustituyendo en (2):

$y = 2(-4) + 9$

$y = 1$

Punto de intersección

$(-4, 1)$.

2d) $x - y - 1 = 0;\ y = 3$

Punto de intersección $(4, 3)$.

2e) $3x - y + 3 = 0;\ 9x + 7y - 4 = 0$

Punto de intersección $\left(-\frac{17}{30}, \frac{13}{10}\right)$.

2f) $y = -5;\ x = \frac{1}{4}$

Punto de intersección $\left(\frac{1}{4}, -5\right)$.

3a) $y = 3x - 5;\ y = 3x$

$m_1 = m_2 = 3$

Son paralelas.

3b) $y = \frac{x}{4} + 1;\ x - 4y + 2 = 0$

$x - 4y + 2 = 0 \longrightarrow y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$

$m_1 = m_2 = \frac{1}{4}$

Son paralelas.

3c) $y = -3x - 2$; $x - 3y + 1 = 0$

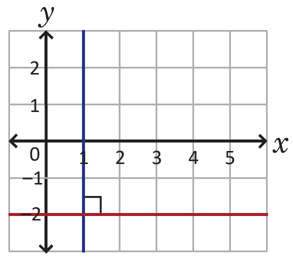
$x - 3y + 1 = 0 \longrightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

$m_1 m_2 = -3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$

Son perpendiculares.

3d) $y = -2;\ x = 1$

Son perpendiculares.



4a) l: $y = -2x + 5$; A(−2, −3)

$m = -2$

$y - (-3) = -2[x - (-2)]$

$y = -2x - 7$

4b) l: $y = 3x + 4$; A(5, −1)

$m = 3$

$y - (-1) = 3(x - 5)$

$y = 3x - 16$

5a) l: $y = -5x - 1$; A(10, 1)

$m_1 = -5$

$m_1 m_2 = -1$

$-5m_2 = -1$

$m_2 = \frac{1}{5}$

$y - 1 = \frac{1}{5}(x - 10)$

$y = \frac{1}{5}x - 1$

5b) l: $3x - 4y + 8 = 0$; A(−6 , 0)

$3x - 4y + 8 = 0 \longrightarrow y = \frac{3}{4}x + 2$

$m_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow m_1 m_2 = -1$

$\frac{3}{4}m_2 = -1$

$m_2 = -\frac{4}{3}$

$y - 0 = -\frac{4}{3}[x - (-6)]$

$y = -\frac{4}{3}x - 8$

6. La recta l_1 pasa por (−4, 4) y por (0, 12), entonces se utiliza la ecuación de la recta dados dos puntos:

$$y - 12 = \frac{12 - 4}{0 - (-4)}(x - 0)$$

Por lo tanto l_1: $y = 2x + 12$. Luego, l_2 es perpendicular a l_1 con pendiente $m_1 = 2$ y pasa por el punto (−4, 4).

Sea m_2 la pendiente de l_2 entonces $m_1 m_2 = -1$ entonces $m_2 = -\frac{1}{2}$.

Se utiliza la forma punto-pendiente:

$$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-4)]$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

7. $5x - 2y = 0 \longrightarrow y = \frac{5}{2}x$ $\qquad ax + by + c = 0 \longrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

7a) Se debe cumplir $-\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ basta tomar $a = 5$ y $b = -2$.

7b) Se debe cumplir $\frac{5}{2}\left(-\frac{a}{b}\right) = -1$ entonces $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ basta tomar $a = 2$ y $b = 5$. El valor de c puede ser cualquier número real.

8. $x - 3y - 6 = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{3}x - 2$ $\qquad ax + (a - 4)y + c = 0 \longrightarrow y = \frac{a}{4 - a}x + \frac{c}{4 - a}$

8a) $\frac{a}{4 - a} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a = 4 - a \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$

8b) $\frac{a}{4 - a}\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{a}{12 - 3a} = -1 \Rightarrow a = 3a - 12 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6$

9a) P(4, −9); l: $x + 4y - 2 = 0$

$d(P, l) = \frac{|4 + 4(-9) - 2|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{|-34|}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}$

9b) P(8, 5); l: $x - y = 0$

$d(P, l) = \frac{|8 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

9c) P(0, −3); l: $2x + y = 0$

$d(P, l) = \frac{|2(0) + (-3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

9d) P(3, 1); l: $x + 3 = 0$

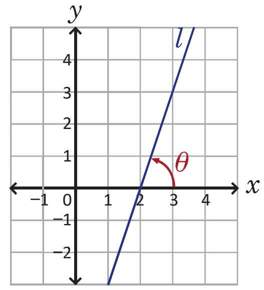
$d(P, l) = \frac{|3 + 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 6$

3.8 Ángulo de inclinación de una recta

Problema inicial

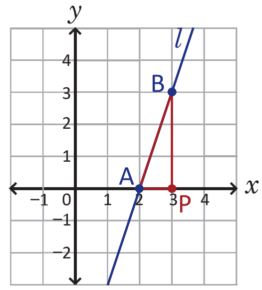
Dada la recta l: $y = 3x - 6$, ¿cuál es la medida del ángulo θ que va desde el eje x positivo hacia la recta? Aproxima hasta las décimas.

Forma el triángulo rectángulo APB con los puntos A(2, 0), P(3, 0) y B(3, 3) y utiliza razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.



Solución

Los puntos A(2, 0) y B(3, 3) pertenecen a la recta l; se toma también el punto P(3, 0) sobre el eje x formándose el triángulo rectángulo APB como se muestra en la figura. Utilizando las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo:



$$\tan A = \frac{\text{PB}}{\text{AP}}$$

Nótese que la medida del ángulo θ es igual a la medida del ángulo cuyo vértice es A y el cociente $\frac{\text{PB}}{\text{AP}}$ corresponde al valor de la pendiente de la recta l, o sea 3. Luego:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= 3 \\ \theta &= \tan^{-1}(3) \\ &\approx 71.6° \end{aligned}$$

Por lo tanto, la medida del ángulo θ es aproximadamente 71.6°.

Definición

Dada una recta l, se llama **ángulo de inclinación** de la recta l al formado por el eje x positivo y la recta (en sentido antihorario). Si m es la pendiente de la recta l y θ su ángulo de inclinación entonces:

$$0° \leq \theta < 180° \text{ y } \tan\theta = m.$$

Ejemplo

Calcula el ángulo de inclinación de la recta l: $x + 2y + 1 = 0$ (aproxima hasta las décimas).

Se escribe la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$ para encontrar la pendiente:

$$\begin{aligned} 2y &= -x - 1 \\ y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego, $m = -\frac{1}{2}$ y:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= -\frac{1}{2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\approx 153.4° \end{aligned}$$

Si al calcular $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ en la calculadora obtuviste −26.6°, este es el ángulo medido desde el eje x positivo hacia la recta en sentido horario. Como el ángulo de inclinación debe ser en sentido antihorario basta con sumar al resultado anterior 180° ya que $\tan\theta = \tan(\theta + 180°)$.

Por lo tanto, el ángulo de inclinación de l: $x + 2y + 1 = 0$ es aproximadamente 153.4°.

Problemas

Calcula el ángulo de inclinación de las siguientes rectas (aproxima hasta las décimas):

a) $y = 2x + 7$ b) $y = -x + 1$ c) $x - 2y + 4 = 0$

d) $5x + 3y - 20 = 0$ e) $x + 1 = 0$ f) $y - 1 = 0$

Indicador de logro

3.8 Calcula el ángulo de inclinación de una recta utilizando su pendiente.

Secuencia

Ahora se establece la relación entre el ángulo formado por la recta y eje x con la pendiente de dicha recta. Se utilizará la tangente inversa que se vio en la unidad 5 de primer año.

Propósito

En la Definición, la restricción de los valores del ángulo facilitará, en la siguiente clase, la comprensión del ángulo determinado entre dos rectas.

Solución de problemas:

a) $y = 2x + 7$

$m = 2$

$\tan \theta = 2$

$\theta = \tan^{-1} 2$

≈ 63.4

b) $y = -x + 1$

$m = -1$

$\tan \theta = -1$

$\theta = \tan^{-1}(-1)$

$= 135°$

c) $x - 2y + 4 = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

$m = \frac{1}{2}$

$\tan \theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\approx 26.6°$

d) $5x + 3y - 20 = 0 \longrightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$

$m = -\frac{5}{3}$

$\tan \theta = -\frac{5}{3}$

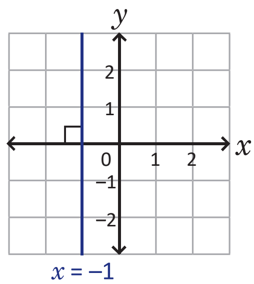
$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right)$

$\approx 121.0°$

e) $x + 1 = 0$

$x = -1$

$\theta = 90°$, ya que la recta es vertical.



f) $y - 1 = 0$

$m = 0$

$\tan \theta = 0$

$\theta = \tan^{-1} 0 = 0$

El estudiante también puede percatarse inmediatamente que el ángulo de la recta horizontal es cero.

3.9 Ángulo entre rectas

Teorema

Sean l_1 y l_2 dos rectas cualesquiera no perpendiculares con pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Si α es el ángulo formado entre ambas rectas y medido de l_1 a l_2 en sentido antihorario, entonces:

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

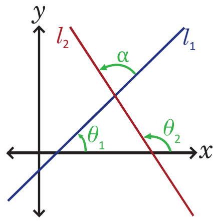
para $m_1 m_2 \neq -1$.

Si θ_1 y θ_2 son los ángulos de inclinación de l_1 y l_2 respectivamente entonces:

$$\theta_2 = \alpha + \theta_1$$
$$\alpha = \theta_2 - \theta_1$$

De lo anterior,

$$\tan \alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

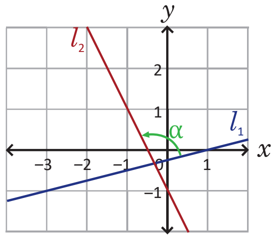


Ejemplo

¿Cuál es la medida del ángulo formado por las rectas l_1: $x - 4y - 1 = 0$ y l_2: $y = -2x - 1$ medido de l_1 a l_2? Aproxima hasta las décimas.

Primero deben determinarse las pendientes m_1 y m_2 de las rectas l_1 y l_2 respectivamente. Para el caso de l_1 se escribe su ecuación en la forma $y = m_1 x + b$:

$$4y = x - 1$$
$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$



Luego, $m_1 = \frac{1}{4}$ y $m_2 = -2$. Sea α el ángulo entre las rectas, medido de l_1 a l_2 en sentido antihorario (ver figura). Entonces:

$$\tan \alpha = \frac{-2 - \frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)(-2)}$$

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{9}{4}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\tan \alpha = -\frac{9}{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$$

$$\approx 102.5°$$

Si al calcular $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$ en la calculadora obtuviste como resultado −77.5° (aproximadamente) entonces este valor corresponde al ángulo medido desde l_1 hasta l_2 pero en sentido horario. Basta con sumar al resultado 180° pues:

$$\tan\theta = \tan(180° + \theta)$$

Por lo tanto, la medida del ángulo formado por las rectas l_1 y l_2 es 102.5°.

Problemas

1. Calcula el ángulo formado entre las rectas l_1 y l_2 (medido desde l_1 a l_2), aproxima hasta las décimas:
   a) l_1: $y = 5x$, l_2: $y = -5x$
   b) l_1: $y = x - 1$, l_2: $y = -2x + 7$
   c) l_1: $y = 4x - 4$, l_2: $y = -5x$
   d) l_1: $5x + 2y + 12 = 0$, l_2: $2x + 3y + 6 = 0$
   e) l_1: $2x - 7y - 2 = 0$, l_2: $2x + y + 2 = 0$
   f) l_1: $6x - y - 2 = 0$, l_2: $3x + 5y + 20 = 0$

2. Calcula la medida de los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son los puntos A(−1, 6), B(−5, 3) y C(4, 1), aproxima hasta las décimas.

3. Dadas dos rectas l_1: $y = k$ y l_2: $y = mx + b$, con m y k números reales diferentes de cero. Demuestra que el ángulo entre las rectas l_1 y l_2 (medido desde l_1 a l_2) es igual al ángulo de inclinación de la recta l_2.

Indicador de logro

3.9 Calcula el ángulo formado entre dos rectas no paralelas usando los valores de sus pendientes.

Secuencia

Ahora se determina el valor del ángulo entre dos rectas dadas, los estudiantes deben recordar algunos conceptos geométricos de Tercer Ciclo, para interpretar el ángulo que se calcula al utilizar la fórmula, y también la relación entre el ángulo y la pendiente de la recta.

Posibles dificultades

Los estudiantes deben fijarse a partir de qué recta están midiendo el ángulo al utilizar la fórmula, sobre todo cuando resuelvan el problema 2.

Solución de problemas:

1a) $l_1: y = 5x$, $l_2: y = -5x$

$m_1 = 5 \quad m_2 = -5$

$\tan\alpha = \frac{-5-5}{1+5(-5)} = \frac{-10}{-24} = \frac{5}{12}$

$\alpha = \tan^{-1}\frac{5}{12} \approx 22.6°$

1b) $l_1: y = x - 1$, $l_2: y = -2x + 7$

$m_1 = 1 \quad m_2 = -2$

$\tan\alpha = \frac{-2-1}{1+1(-2)} = 3$

$\alpha = \tan^{-1} 3 \approx 71.6°$

1c) $l_1: y = 4x - 4$, $l_2: y = -5x$

$m_1 = 4 \quad m_2 = -5$

$\tan\alpha = \frac{-5-4}{1+4(-5)} = \frac{9}{19}$

$\alpha = \tan^{-1}\frac{9}{19} \approx 25.3°$

1d) $l_1: 5x + 2y + 12 = 0$, $l_2: 2x + 3y + 6 = 0 \longrightarrow l_1: y = -\frac{5}{2}x - 6$, $l_2: y = -\frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow m_1 = -\frac{5}{2}, m_2 = -\frac{2}{3}$

$\tan\alpha = \frac{-\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{2}\right)}{1+\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{11}{16}$ $\qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{11}{16} \approx 34.5°$

1e) $l_1: 2x - 7y - 2 = 0$, $l_2: 2x + y + 2 = 0 \longrightarrow l_1: y = \frac{2}{7}x - \frac{2}{7}$, $l_2: y = -2x - 2 \Rightarrow m_1 = \frac{2}{7}, m_2 = -2$

$\tan\alpha = \frac{-2-\frac{2}{7}}{1+\frac{2}{7}(-2)} = -\frac{16}{3}$ $\qquad \alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{16}{3}\right) \approx 100.6°$

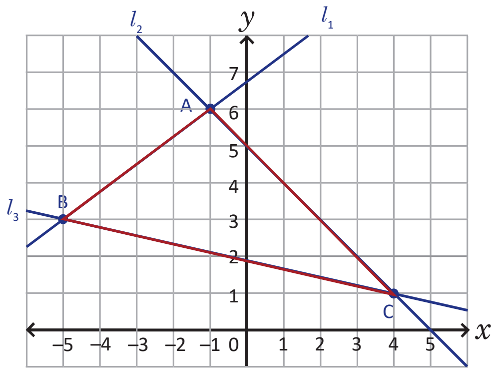
1f) $l_1: 6x - y - 2 = 0$, $l_2: 3x + 5y + 20 = 0 \longrightarrow l_1: y = 6x - 2$, $l_2: y = -\frac{3}{5}x - 4 \Rightarrow m_1 = 6, m_2 = -\frac{3}{5}$

$\tan\alpha = \frac{-\frac{3}{5}-6}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)(6)} = \frac{33}{13}$ $\qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{33}{13} \approx 68.5°$

2. Sean l_1, l_2 y l_3 las rectas correspondientes a los segmentos AB, AC y BC respectivamente, con pendientes $m_1 = \frac{3}{4}$, $m_2 = -1$ y $m_3 = -\frac{2}{9}$.

Sea α el ángulo medido de l_1 a l_2 $\tan\alpha = \frac{-1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}(-1)} = -7 \Rightarrow \alpha \approx 98.1°$.

Sea β el ángulo medido de l_2 a l_3 $\tan\alpha = \frac{-\frac{2}{9}-(-1)}{1+\left(-\frac{2}{9}\right)(-1)} = \frac{7}{11} \Rightarrow \beta \approx 32.5°$.



Por la suma de los ángulos internos de un triángulo, el otro ángulo es 180° – (98.1° + 32.5°) = 49.4°.

3. La pendiente de $l_1: y = k$ es $m_1 = 0$ y la de $l_2: y = mx + b$ es $m_2 = m$. Sea α el ángulo entre las rectas l_1 y l_2. Entonces $\tan\alpha = \frac{m-0}{1+0(m)} = m$. Por lo tanto α es el ángulo de inclinación de l_2.

Otra solución: La recta $l_1: y = k$ es paralela al eje x por lo que el ángulo entre l_1 y l_2 es el ángulo de inclinación de l_2.

Lección 3

3.10 Aplicaciones

Problema inicial

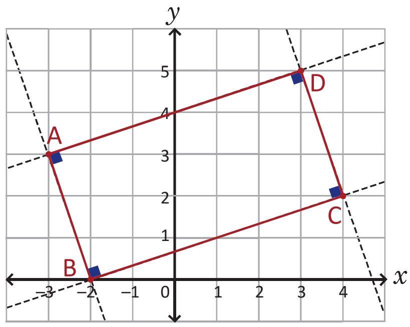
Demuestra que los puntos A(–3, 3), B(–2, 0), C(4, 2) y D(3, 5) forman un rectángulo.

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene 4 ángulos rectos.

Solución

Para que ABCD sea rectángulo debe cumplirse lo siguiente:

a) $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ b) $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ c) $\overline{CD} \perp \overline{DA}$



Si se cumplen estas tres condiciones entonces también el lado DA será perpendicular al lado AB.

a) Para demostrar que el lado AB es perpendicular al lado BC debe verificarse que la recta que pasa por A y B es perpendicular a la que pasa por B y C.

Pendiente de la recta que pasa por A(–3, 3) y B(–2, 0): $m_1 = \frac{0-3}{-2-(-3)} = -3$.

Pendiente de la recta que pasa por B(–2, 0) y C(4, 2): $m_2 = \frac{2-0}{4-(-2)} = \frac{1}{3}$.

Al efectuar el producto de las pendientes: $m_1 m_2 = -3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$.

Por lo tanto, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$.

b) De forma similar al literal anterior se resuelve para este caso.

Pendiente de la recta que pasa por B(–2, 0) y C(4, 2): $m_2 = \frac{1}{3}$.

Pendiente de la recta que pasa por C(4, 2) y D(3, 5): $m_3 = \frac{5-2}{3-4} = -3$.

Al efectuar el producto de las pendientes: $m_2 m_3 = \frac{1}{3}(-3) = -1$.

Por lo tanto, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$.

c) Al realizar un procedimiento similar a los literales anteriores se obtiene la pendiente de la recta que pasa por D y A, cuyo valor es $\frac{1}{3}$. El producto de las pendientes es igual a –1, luego: $\overline{CD} \perp \overline{DA}$. Por lo tanto, ABCD es rectángulo.

Problemas

1. Demuestra que los puntos A(2, 3), B(0, –3), C(5, –2) y D(7, 4) forman un paralelogramo.

2. Demuestra que los puntos A(–4, 0), B(1, –1), C(6, 0) y D(1, 1) forman un rombo.

Un rombo es un cuadrilátero que tiene todos sus lados de igual longitud.

Indicador de logro

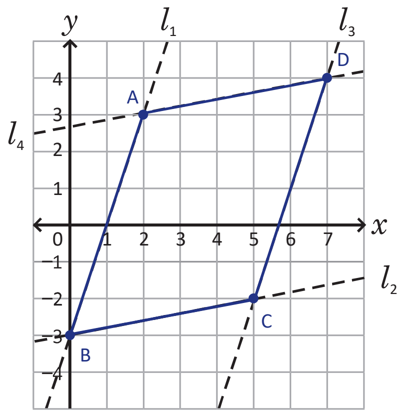
3.10 Resuelve problemas de geometría utilizando las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas y distancia entre dos puntos.

Secuencia

Se utilizan los conceptos de paralelismo, perpendicularidad entre rectas y distancia entre puntos para resolver problemas geométricos; en ese sentido se deben recordar algunas propiedades de las figuras utilizadas.

Solución de problemas:

1. Se demostrará que $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$ y que $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{AD}$.
Sean l_1, l_2, l_3 y l_4 las rectas que pasan por los puntos A y B; B y C; C y D; A y D, respectivamente, y pendientes respectivas m_1, m_2, m_3 y m_4.



Para demostrar que AB es paralela a CD basta demostrar que $m_1 = m_3$.

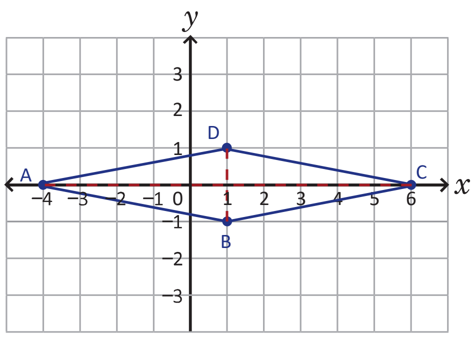
$$m_1 = \frac{-3-3}{0-2} = 3 \quad \text{y} \quad m_3 = \frac{-2-4}{5-7} = 3$$

Para demostrar que AD es paralela a BC basta demostrar que $m_2 = m_4$.

$$m_2 = \frac{-2-(-3)}{5-0} = \frac{1}{5} \quad \text{y} \quad m_4 = \frac{4-3}{7-2} = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto ABCD es un paralelogramo.

2. *Solución 1*: Calculando las longitudes de los lados del cuadrilátero.



$AB = \sqrt{(1-(-4))^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$

$BC = \sqrt{(6-1)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$CD = \sqrt{(1-6)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$AD = \sqrt{(1-(-4))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

Así, AB = BC = CD = AD, por lo tanto ABCD es un rombo.

Solución 2: Demostrar que las diagonales son perpendiculares y que se intersecan en su punto medio.
La diagonal $\overline{BD}$ está sobre la recta vertical $x = 1$ y la diagonal $\overline{AC}$ está sobre la recta horizontal $y = 0$ (el eje x); por lo que, las diagonales son perpendiculares.

El punto medio de $\overline{BD}$ es $\left(\frac{1+1}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right) = (1, 0)$ y el punto medio de $\overline{AC}$ es $\left(\frac{6+(-4)}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (1, 0)$.
Así, las diagonales se intersecan en su punto medio.
Por lo tanto, ABCD es un rombo.

3.11 Practica lo aprendido

1. Demuestra que los puntos A(0, 3), B(4, –1), C(7, 2) y D(5, 4) forman un trapecio rectángulo.

Un cuadrilátero es trapecio rectángulo si tiene un par de lados opuestos paralelos y un ángulo recto.

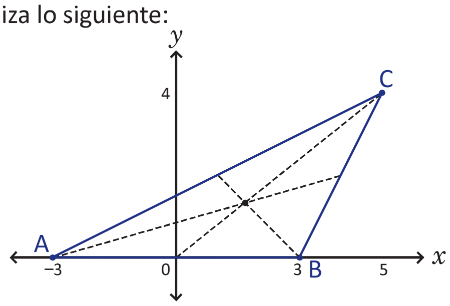
2. Con los puntos A(–3, 3), B(–5, –1), C(5, 1) y D(3, 5) se forma un cuadrilátero. Demuestra que el cuadrilátero formado por los puntos medios de los lados de ABCD es paralelogramo.

3. Encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento formado por los puntos A(–1, 6) y B(7, 4).

La mediatriz de un segmento es la recta que corta al segmento en su punto medio y forma con él un ángulo recto.

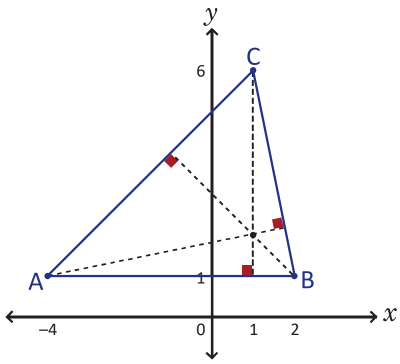
4. La **mediana** en un triángulo es el segmento que inicia en un vértice y termina en el punto medio del lado opuesto al vértice; en un triángulo pueden trazarse tres medianas (una por cada vértice). Se forma un triángulo cuyos vértices son A(–3, 0), B(3, 0) y C(5, 4); realiza lo siguiente:

   a) encuentra las coordenadas del punto medio de cada lado;
   b) encuentra las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC (por ejemplo, una de ellas pasa por A(–3, 0) y por el punto medio del lado BC);
   c) verifica que las medianas se intersecan en un punto.



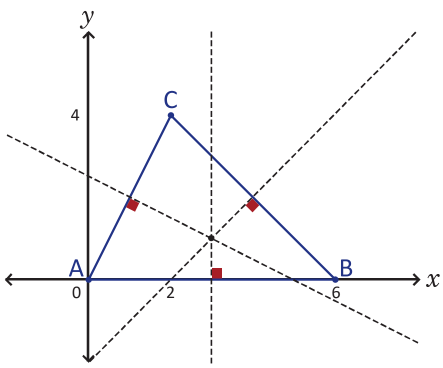
5. La **altura** en un triángulo es el segmento que inicia en un vértice y forma con el lado opuesto un ángulo recto; en un triángulo pueden trazarse tres alturas (una por cada vértice). Se forma un triángulo cuyos vértices son A(–4, 1), B(2, 1) y C(1, 6); realiza lo siguiente:

   a) encuentra las pendientes de las rectas que pasan por los puntos A y B, B y C, y C y A;
   b) encuentra las ecuaciones de las tres alturas del triángulo ABC (por ejemplo, una de ellas pasa por A(–4, 1) y es perpendicular al lado BC);
   c) verifica que las alturas se intersecan en un punto.



6. Se forma un triángulo con los puntos A(0, 0), B(6, 0) y C(2, 4); realiza lo siguiente:

   a) encuentra las coordenadas del punto medio de cada lado;
   b) encuentra las ecuaciones de las mediatrices del triángulo (por ejemplo, una de ellas pasa por el punto medio del lado AB y es perpendicular a este);
   c) verifica que las mediatrices se intersecan en un punto.



Unidad 2

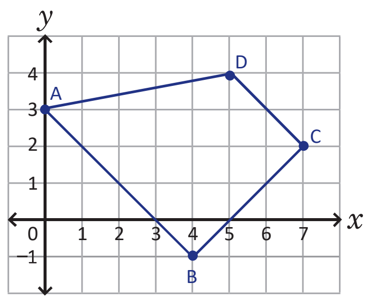
43

Indicador de logro

3.11 Resuelve problemas de geometría utilizando las propiedades de puntos, segmentos y líneas rectas.

Solución de problemas:

1. Se probará que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos y que $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{BC}$.



Sean m_1, m_2 y m_3 las pendientes de las rectas que pasan por A y B; B y C; C y D respectivamente.

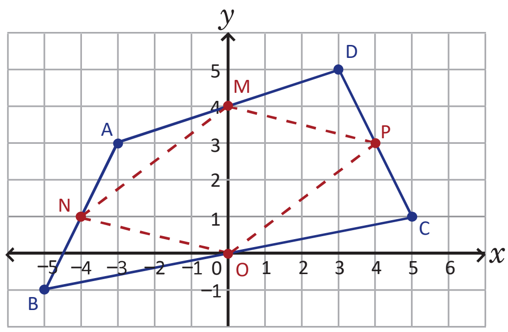
$$m_1 = \frac{-1-3}{4-0} = -1,\ m_2 = \frac{2-(-1)}{7-4} = \frac{3}{3} = 1 \text{ y } m_3 = \frac{4-2}{5-7} = -1$$

Así, $m_1 = m_3$ entonces $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$.

También, $m_1 m_2 = -1$ por lo que $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{BC}$.

Por lo tanto, ABCD es un trapecio rectángulo.

2. Se obtienen los puntos medios M, N, O y P de los segmentos AD, AB, BC y CD respectivamente.



$\text{M}\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = \text{M}(0, 4)$ $\quad$ $\text{N}\left(\frac{-3+(-5)}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = \text{N}(-4, 1)$

$\text{O}\left(\frac{5+(-5)}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right) = \text{O}(0, 0)$ $\quad$ $\text{P}\left(\frac{5+3}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = \text{P}(4, 3)$

Se prueba que los lados opuestos son paralelos, por medio de la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados:

Por M y N es $\frac{1-4}{-4-0} = \frac{3}{4}$. $\quad$ Por O y P es $\frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}$. $\quad$ Así, $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{OP}$.

Por M y P es $\frac{3-4}{4-0} = -\frac{1}{4}$. $\quad$ Por N y O es $\frac{0-1}{0-(-4)} = -\frac{1}{4}$. $\quad$ Así, $\overline{MP}$ es paralelo a $\overline{NO}$.

Por lo tanto, MNOP es un paralelogramo.

3. Se encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento formado por los puntos A(–1, 6) y B(7, 4).

Se obtiene el punto medio de A y B: $\left(\frac{7+(-1)}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = \text{M}(3, 5)$.

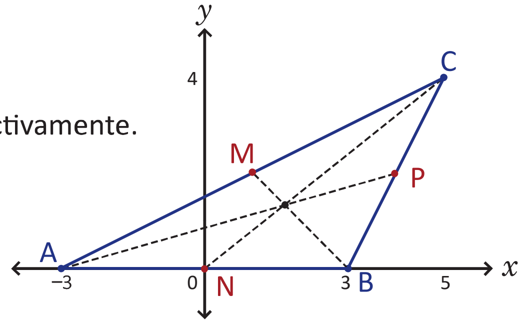
La pendiente de la recta que pasa por A y B es $\frac{4-6}{7-(-1)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$.

Si m es la pendiente de la mediatriz, entonces $-\frac{1}{4}m = -1$ entonces $m = 4$.

Se obtiene la ecuación de la recta utilizando la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - 5 &= 4(x-3) \\ y &= 4x - 12 + 5 \\ y &= 4x - 7 \end{aligned}$$

4a) Sean M, N y P los puntos medios de los lados CA, AB y BC respectivamente.



$\text{N}\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \text{N}(0, 0)$, $\text{P}\left(\frac{5+3}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \text{P}(4, 2)$,

$\text{M}\left(\frac{5+(-3)}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = \text{M}(1, 2)$

4b) Se obtiene las ecuaciones de las tres medianas:

Mediana AP

$$y - 0 = \frac{2-0}{4-(-3)}(x-(-3))$$
$$y = \frac{2}{7}x + \frac{6}{7}$$

Mediana CN

$$y - 0 = \frac{4-0}{5-0}(x-0)$$
$$y = \frac{4}{5}x$$
$$y = \frac{4}{5}x$$

Mediana BM

$$y - 0 = \frac{2-0}{1-3}(x-3)$$
$$y = \frac{2}{-2}(x-3)$$
$$y = -x + 3$$

4c) Se determina el punto de intersección de $\overline{\text{CN}}$ y $\overline{\text{BM}}$.

Se sustituye la ecuación de $\overline{\text{BM}}$ en la de $\overline{\text{CN}}$: $-x + 3 = \frac{4}{5}x \Rightarrow -5x + 15 = 4x \Rightarrow 9x = 15 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$.

Se sustituye $x = \frac{5}{3}$ en la ecuación de $\overline{\text{CN}}$: $y = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

El punto de intersección de la mediana CN y $\overline{\text{BM}}$ es $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

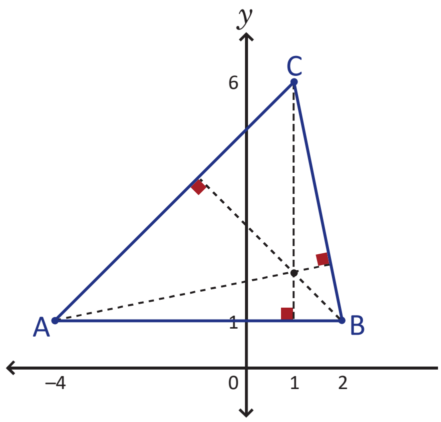
Ahora se comprueba que este punto está en la mediana AP: $y = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{6}{7} = \frac{10}{21} + \frac{18}{21} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$.

Así, $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ está en la mediana AP.

Por lo tanto, todas las medianas se intersecan en el punto $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

5a) Sean m_1, m_2 y m_3 las pendientes de las rectas que pasan por A y B, B y C, y C y A respectivamente.

$$m_1 = \frac{1-1}{2-(-4)} = 0,\ m_2 = \frac{6-1}{1-2} = -5 \text{ y } m_3 = \frac{1-6}{-4-1} = 1$$



5b) Sean n_1, n_2 y n_3 las pendientes de las alturas que pasan por C, A y B, respectivamente.

$\Rightarrow$ ya que AB es horizontal, la altura que pasa por C es $x = 1$.

Luego, $n_2(-5) = -1 \Rightarrow n_2 = \frac{1}{5} \Rightarrow$ la altura que pasa por A es

$$y - 1 = \frac{1}{5}(x+4) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}.$$

Luego, $n_3(1) = -1 \Rightarrow\ n_3 = -1 \Rightarrow$ la altura que pasa por B es

$$y - 1 = -(x-2) \Rightarrow y = -x + 3.$$

5c) Se determina el punto de intersección de las tres alturas.

Si $x = 1$ entonces $y = \frac{1}{5} + \frac{9}{5} = \frac{10}{5} = 2$, luego en la otra altura $y = -1 + 3 = 2$.

Por lo tanto, las tres alturas se intersecan en el punto (1, 2).

6a) Sean M, N y P los puntos medios de los lados AB, BC y CA respectivamente.

$\text{M}\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \text{M}(3, 0)$, $\text{N}\left(\frac{6+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \text{N}(4, 2)$, $\text{P}\left(\frac{2+0}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = \text{P}(1, 2)$.

6b) Mediatriz que pasa por M(3, 0): $x = 3$.

Pendiente de BC: $\frac{4-0}{2-6} = -1$. Pendiente de la mediatriz: $m_2(-1) = -1 \Rightarrow m_2 = 1$.

Mediatriz que pasa por N(4, 2) : $y - 2 = 1(x-4) \Rightarrow y = x - 2$.

Pendiente de AC: $\frac{4-0}{2-0} = 2$. Pendiente de la mediatriz: $m_2(2) = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}$.

Mediatriz que pasa por P(1, 2) y tiene pendiente $-\frac{1}{2}$: $y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

6c) Se determina el punto de intersección de las tres alturas.

Si $x = 3$ entonces $y = 3 - 2 = 1$, luego en la otra mediatriz $y = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$.

Por lo tanto, las tres alturas se intersecan en el punto (3, 1).

3.12 Problemas de la unidad

1. Dados los puntos A(–5, 3) y B(4, –3), encuentra las coordenadas de los puntos C y D que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

El punto C divide al segmento AB en razón 1:2.

2. Determina el valor de a para que el punto $P\left(a + 1, \frac{1}{a}\right)$ se encuentre sobre la recta con ecuación $2x - 3y + 3 = 0$.

3. Tres de los vértices de un paralelogramo ABCD son A(–5, 0), B(–2, –1) y C(5, 2). Encuentra las coordenadas del cuarto vértice.

4. Con el triángulo ABC cuyos vértices son A(0, 8), B(–4, 0) y C(10, 4) realiza lo siguiente:

   a) encuentra los puntos medios de los lados AB, BC y CA, y denótalos por D, E y F respectivamente;
   b) encuentra las coordenadas del punto que divide al segmento AE en razón 2:1;
   c) encuentra las coordenadas de los puntos que dividen a los segmentos BF y CD en razón 2:1. ¿Qué relación hay con el literal anterior?
   d) ¿Qué puedes concluir de este problema y el problema 4 de la clase 3.11?

5. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(–3, –1) y B(2, 2). Si la intersección de sus diagonales está en el punto P(3, 0), ¿cuáles son las coordenadas de sus otros dos vértices?

6. Los puntos medios de los lados AB, BC y CA de un triángulo son D(–1, –1), E(4, 2) y F(2, 3) respectivamente. Encuentra las coordenadas de los vértices A, B y C del triángulo.

7. Demuestra que si dos rectas con ecuaciones $ax + by + c = 0$ y $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ son perpendiculares entonces $aa_1 + bb_1 = 0$.

8. Demuestra que la ecuación de la recta que pasa por el punto P(x_1, y_1) y que además es paralela a la recta l: $ax + by + c = 0$ es $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$.

9. Las rectas l_1 y l_2 se cortan formando un ángulo de 135° (medido de l_1 a l_2). Si la pendiente de l_2 es igual a –3, ¿cuál es el valor de la pendiente de l_1?

10. Encuentra las coordenadas de los vértices B y C de un triángulo ABC, si las coordenadas de A son (–4, 0) y las ecuaciones de la altura y mediana trazadas desde B son $4x + y - 7 = 0$ y $2x - y + 1 = 0$ respectivamente.

Indicador de logro

3.12 Resuelve problemas correspondientes a la línea recta.

Solución de problemas:

1. El punto C que divide al segmento AB en razón 1:2 es $C\left(\frac{2(-5)+1(4)}{1+2}, \frac{2(3)+1(-3)}{1+2}\right) = C\left(\frac{-6}{3}, \frac{3}{3}\right) = C(-2, 1)$.

Luego, D es el punto medio del segmento BC: $D\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = D(1, -1)$.

2. Se evalúa el punto $P\left(a+1, \frac{1}{a}\right)$ en la ecuación de la recta $2x - 3y + 3 = 0$.

$2(a+1) - 3\left(\frac{1}{a}\right) + 3 = 0 \Rightarrow 2a(a+1) - 3 + 3a = 0 \Rightarrow 2a^2 + 5a - 3 = 0 \Rightarrow (a+3)(2a-1) = 0 \Rightarrow a = -3,\ a = \frac{1}{2}$

3. Si el punto $D(a, b)$ es el cuarto vértice entonces AD es paralela a BC y CD es paralela a AB.
Utilizando pendientes:

Las pendientes de las rectas AD y BC son iguales: $\frac{b-0}{a-(-5)} = \frac{2-(-1)}{5-(-2)} = \frac{3}{7} \Rightarrow 7b = 3a + 15$ ------ (1).

Las pendientes de las rectas CD y AB son iguales: $\frac{b-2}{a-5} = \frac{-1-0}{-2-(-5)} = \frac{-1}{3} \Rightarrow 3b - 6 = -a + 5 \Rightarrow a = -3b + 11$ ---(2).

Se sustituye (2) en (1): $7b = 3(-3b + 11) + 15 \Rightarrow 7b = -9b + 33 + 15 \Rightarrow 16b = 48 \Rightarrow b = 3$.

Se sustituye $b = 3$ en (2): $a = -3(3) + 11 = 2$.

Por lo tanto, el cuarto vértice del paralelogramo es D(2, 3).

4. Los vértices del triángulo ABC son A(0, 8), B(–4, 0) y C(10, 4).

4a) $D\left(\frac{0+(-4)}{2}, \frac{8+0}{2}\right) = D(-2, 4)$; $E\left(\frac{-4+10}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = E(3, 2)$; $F\left(\frac{0+10}{2}, \frac{8+4}{2}\right) = F(5, 6)$.

4b) El punto es $\left(\frac{1(0)+2(3)}{2+1}, \frac{1(8)+2(2)}{2+1}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{12}{3}\right) = (2, 4)$.

4c) En el segmento BF: $\left(\frac{1(-4)+2(5)}{2+1}, \frac{1(0)+2(6)}{2+1}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{12}{3}\right) = (2, 4)$.

En el segmento CD: $\left(\frac{1(10)+2(-2)}{2+1}, \frac{1(4)+2(4)}{2+1}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{12}{3}\right) = (2, 4)$.

¿Qué relación hay con el literal anterior? El punto encontrado para cada segmento es el mismo.

4d) El punto de intersección de las medianas divide a cada una de ellas en dos segmentos que se encuentran en razón 2:1.

5. Las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio.
Sean $C(a, b)$ y $D(c, d)$ los otros dos vértices del paralelogramo tal que AC y BD son sus diagonales.

Se calcula P como punto medio de AC:

$\Rightarrow P\left(\frac{a+(-3)}{2}, \frac{b+(-1)}{2}\right) = P(3, 0)$

$\Rightarrow \frac{a+(-3)}{2} = 3$ y $\frac{b+(-1)}{2} = 0$

$\Rightarrow a - 3 = 6$ y $b - 1 = 0$

$\Rightarrow a = 9$ y $b = 1$

Se calcula P como punto medio de BD:

$\Rightarrow P\left(\frac{c+2}{2}, \frac{d+2}{2}\right) = P(3, 0)$

$\Rightarrow \frac{c+2}{2} = 3$ y $\frac{d+2}{2} = 0$

$\Rightarrow c + 2 = 6$ y $d + 2 = 0$

$\Rightarrow c = 4$ y $d = -2$

Por lo tanto, las coordenadas de los otros vértices son: (9, 1) y (4, –2).

6. Sea A(a, b), B(c, d) y C(e, f) las coordenadas de los vértices del triángulo.

Se calculan los puntos medios: $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) = (-1, -1)$; $\left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+f}{2}\right) = (4, 2)$; $\left(\frac{a+e}{2}, \frac{b+f}{2}\right) = (2, 3)$.

Utilizando la coordenada en x se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{a+c}{2} = -1 \text{ --- (1)} \\ \frac{c+e}{2} = 4 \text{ --- (2)} \\ \frac{a+e}{2} = 2 \text{ --- (3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c = -2 \text{ --- (1)} \\ c+e = 8 \text{ --- (2)} \\ a+e = 4 \text{ --- (3)} \end{cases}$$

Se resuelve el sistema, se resta (2) de (1), se obtiene:

$$a - e = -10 \text{ ----- (4)}$$

Se forma el sistema: $\begin{cases} a+e = 4 & \text{----- (3)} \\ a-e = -10 & \text{----- (4)} \end{cases}$

Sumando (3) y (4): $2a = -6 \Rightarrow a = -3$.

Se sustituye en (3) y en (1): $-3 + e = 4 \Rightarrow e = 7, -3 + c = -2 \Rightarrow c = 1$.

Así, la solución del sistema es $a = -3$, $e = 7$, $c = 1$.

Utilizando la coordenada en y se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{b+d}{2} = -1 \text{ ----- (5)} \\ \frac{d+f}{2} = 2 \text{ ----- (6)} \\ \frac{b+f}{2} = 3 \text{ ----- (7)} \end{cases}$$

Su solución es: $b = 0, d = -2, f = 6$.

7. Si una de las rectas es vertical, por ejemplo $ax + by + c = 0$, se debe cumplir $b = 0$, y una recta perpendicular a esta es horizontal, entonces $a_1 = 0$. Entonces $aa_1 + bb_1 = a(0) + 0(b_1) = 0$.

Luego, si ninguna es vertical, entonces $b \neq 0$ y $b_1 \neq 0$.

Se reescriben las ecuaciones para obtener sus pendientes:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \text{ y } a_1x + b_1y + c_1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$$

Al ser perpendiculares se cumple que $\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) = -1 \Rightarrow aa_1 = -bb_1 \Rightarrow aa_1 + bb_1 = 0$.

8. Si $b \neq 0$, la recta $ax + by + c = 0$ se reescribe como $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, así su pendiente es $-\frac{a}{b}$.

Así la recta paralela a la recta $ax + by + c = 0$ que pasa por P(x_1, y_1) es:

$y - y_1 = -\frac{a}{b}(x - x_1) \Rightarrow b(y - y_1) = -a(x - x_1) \Rightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$.

Si $b = 0$, la recta tiene ecuación $ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$, con $a \neq 0$.

Así, la recta paralela a la recta $ax + by + c = 0$ que pasa por P(x_1, y_1) es:

$x = x_1 \Rightarrow x - x_1 = 0$, esta ecuación puede reescribirse como $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$, ya que $b = 0$.

La recta $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ es el desplazamiento paralelo de la recta l que pasa por P(x_1, y_1).

9. Sean m_1 y m_2 las pendientes de las rectas l_1 y l_2, respectivamente entonces $m_2 = -3$ y se cumple que

$$\tan 135° = \frac{-3 - m_1}{1 + m_1(-3)} \Rightarrow -1 = \frac{-3 - m_1}{1 + m_1(-3)} \Rightarrow -1 + 3m_1 = -3 - m_1 \Rightarrow 4m_1 = -2 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}.$$

10. El punto B es el punto de intersección de la altura y la mediana, así basta resolver el sistema:

$\begin{cases} 4x + y - 7 = 0 \text{ ---- (1)} \\ 2x - y + 1 = 0 \text{ ---- (2)} \end{cases}$ Con solución: $x = 1$, $y = 3$. Por lo tanto, el vértice B es (1, 3).

Luego, para el vértice C(a, b). El punto medio de $\overline{AC}$ es M$\left(\frac{a-4}{2}, \frac{b}{2}\right)$ y M está en la mediana, así se puede sustituir en su ecuación (2): $2\left(\frac{a-4}{2}\right) - \frac{b}{2} + 1 = 0$ y se obtiene que $2a - b = 6$ ---- (1)

Ahora, la recta que pasa por A y C tiene pendiente $\frac{b-0}{a-(-4)} = \frac{b}{a+4}$.

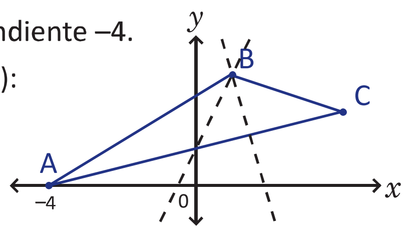
Se obtiene la pendiente de la altura $4x + y - 7 = 0 \Rightarrow y = -4x + 7$, tiene pendiente -4.

Se cumple que $-4\left(\frac{b}{a+4}\right) = -1 \Rightarrow 4b = a + 4 \Rightarrow a = 4b - 4$, se sustituye en (1):

$$2(4b - 4) - b = 6,$$

de donde se obtiene que $b = 2 \Rightarrow a = 4(2) - 4 = 4$.

Por lo tanto, C(a, b) = C(4, 2).



4.1 Práctica en GeoGebra: segmentos y ecuaciones de líneas rectas

En el año anterior aprendiste cómo graficar funciones en GeoGebra, realizar desplazamientos horizontales y verticales de funciones cuadráticas, graficar vectores y realizar operaciones con ellos. En esta práctica se utilizará el software para graficar segmentos y líneas rectas a partir de su ecuación.

Debes verificar si tu computadora cuenta con GeoGebra, para ello busca el ícono de la aplicación (es el que se encuentra en la esquina superior derecha de esta página). Caso contrario puedes descargar el software siguiendo el enlace: GeoGebra https://goo.gl/jRmmdc

Descarga (instala) "GeoGebra Clásico 5". También puedes descargar la app para el celular o trabajar "GeoGebra en línea" en los siguientes enlaces:

App → https://goo.gl/wf5mHx **En línea** → https://goo.gl/ThXbeB

Práctica

Puntos y segmentos en el plano cartesiano

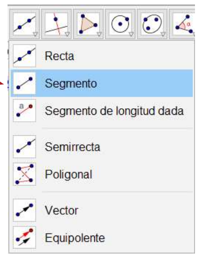
1. Abre un nuevo archivo de GeoGebra dando clic (o doble clic) al ícono del software.

2. Para crear el segmento AB con A(–2, 5) y B(3, –4):
   a) Ubica primero los puntos en el plano, ya sea utilizando la herramienta Punto o la barra de entrada.

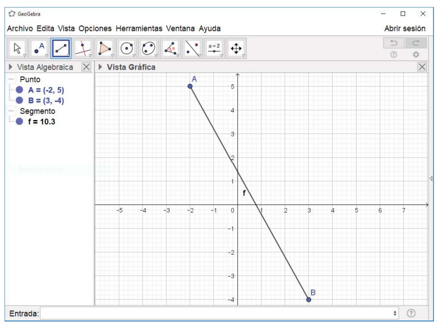
Entrada: A=(-2,5)

En GeoGebra los puntos se nombran con letras mayúsculas; si escribes "a=(-2,5)" obtendrás por resultado un vector.

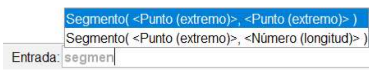
   b) Da clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta Recta y selecciona Segmento.

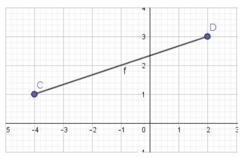


   c) En la Vista Gráfica selecciona los puntos A y B. En la Vista Algebraica aparecerá el nombre del segmento y la longitud del mismo. Recuerda que la longitud del segmento AB es igual a la distancia entre los puntos A y B, que en este caso particular es 10.3 aproximadamente.



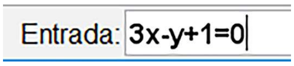
   d) También puedes crear segmentos usando la barra de entrada en lugar de la herramienta Segmento. Crea los puntos C(–4, 1) y D(2, 3); en la barra de entrada escribe la palabra segmento y elige la opción "Segmento(<Punto(extremo)>, <Punto(extremo)>)". En lugar de <Punto(extremo)> escribe C y D respectivamente.

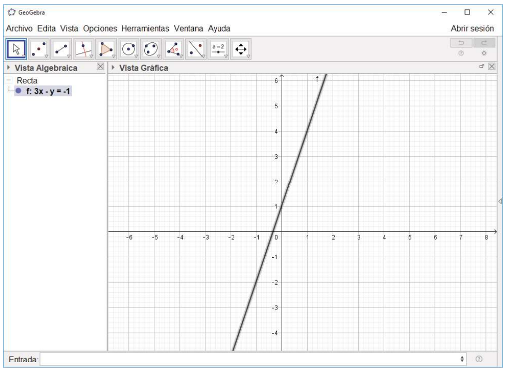




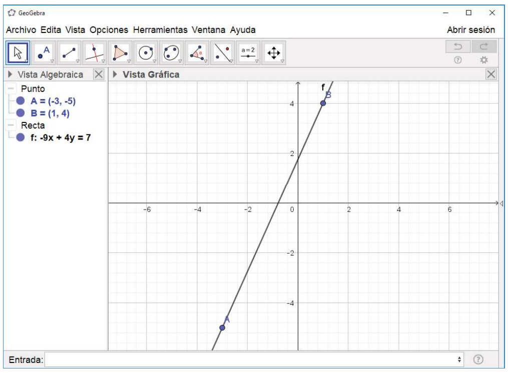
Líneas rectas:

3. Para trazar la gráfica de una línea recta cuya ecuación es conocida, simplemente se escribe dicha ecuación en la barra de entrada. Por ejemplo, para trazar la gráfica de $3x - y + 1 = 0$ se escribe 3x-y+1=0 y presiona enter:





4. Para encontrar la ecuación y trazar la gráfica de una recta que pasa por dos puntos dados, se utiliza el comando Recta(<Punto>, <Punto>) en la barra de entrada. Por ejemplo, para encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–3, –5) y B(1, 4) creas primero los puntos A y B; luego escribe Recta(A,B) y presionas enter. En la Vista Algebraica aparecerá la ecuación de la recta y en la Vista Gráfica la línea.



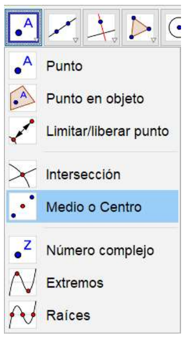
También puedes usar el comando anterior digitando Recta((-3,-5),(1,4)).

Actividades

1. **Punto medio de un segmento:**

   a) Abre una nueva ventana de GeoGebra y crea el segmento AB con A(–4, –3) y B(6, 1).

   b) Da clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta “Punto” y selecciona “Medio o Centro”.



   c) En la Vista Gráfica (o en la Vista Algebraica) da clic sobre los puntos A y B, aparecerá un nuevo punto C con coordenadas (1, –1) que corresponde al punto medio del segmento AB.

   d) Verifica las soluciones de los problemas 7, 8, 9 y 10 de la clase 1.6 (Practica lo aprendido).

2. **Pendiente de una recta:**

   a) En la barra de entrada escribe “pendiente” y automáticamente aparecerá la opción “Pendiente(<Recta, semirrecta o segmento>)”.

   b) En lugar de <Recta, semirrecta o segmento> escribe la ecuación de la recta y presiona enter.

   c) ¿Qué ocurre si calculas la pendiente de las rectas $y = -2$ y $x = 3$? ¿Cuál es el valor de la pendiente de una recta vertical y de una horizontal?

3. Verifica las soluciones de los problemas desde la clase 2.2 hasta la 2.5 de esta unidad.

Indicador de logro

4.1 Utiliza un software matemático para elaborar segmentos y líneas rectas dados dos puntos o su ecuación, y para calcular coordenadas del punto medio y valor de la pendiente.

Secuencia

Se utilizarán las herramientas de GeoGebra para trazar puntos, segmentos y rectas. Esto permitirá al estudiante comprobar problemas desarrollados a lo largo de las lecciones 1 y 2 de esta unidad.

Solución de problemas:

1a) Escribir en la barra de entrada A=(–4, –3) y luego B=(6, 1). En la barra de herramientas dar clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta Recta y seleccionar Segmento y seleccionar los dos puntos A y B.

1b) Dar clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta Punto y seleccionar Medio o Centro.

1c) En la Vista Gráfica (o en la Vista Algebraica) dar clic sobre los puntos A y B, aparecerá un nuevo punto C con coordenadas (1, –1) que corresponde al punto medio de AB.

1d) Problema 7: Se grafica el punto A(–1, 3) y el punto solución (4, –2) luego se determina el punto medio con el procedimiento realizado en 1b) y 1c).

2a) En la barra de entrada se escribe Pendiente y automáticamente aparecerá la opción Pendiente(<Recta, semirrecta o segmento>).

2b) Puede escribirse la ecuación de una recta estudiada en alguna clase, por ejemplo:
$4x + y - 7 = 0$, $2x - y + 1 = 0$.

2c) Las rectas horizontales tienen pendiente cero y las verticales indefinida.

3. Clase 2.2: Para comprobar la respuesta en cada literal se grafica la recta obtenida, se determina su pendiente y se grafica el punto dado.

Clase 2.3: Se pueden graficar los puntos dados en cada literal y luego utilizar la barra de herramientas para graficar la recta que pasa por estos dos puntos o escribir en la barra de entrada Recta((–3, –1), (1, –5)), para el literal a), por ejemplo.

Clase 2.4: Para cada literal graficar el punto dado, luego dar clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta Perpendicular y seleccionar Paralela. En la vista gráfica seleccionar el punto que se graficó y el eje x o el eje y según corresponda.

Clase 2.5: 1. Para cada literal se escribe la ecuación dada en la barra de herramientas.

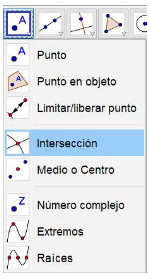
4.2 Práctica en GeoGebra: posiciones relativas entre rectas

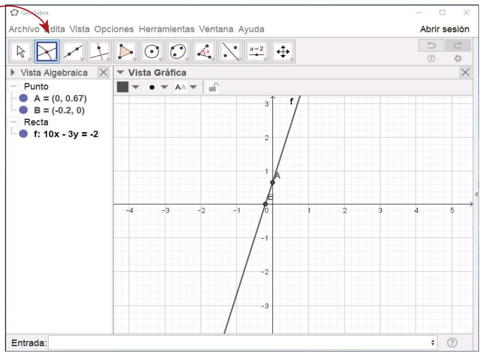
En esta práctica aprenderás a encontrar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas, trazar rectas paralelas y perpendiculares y calcular el ángulo de inclinación de una recta.

Práctica

Intersecciones con los ejes de coordenadas y rectas:

1. Traza la recta $10x - 3y + 2 = 0$ (acerca la Vista Gráfica si lo crees necesario).
2. Da clic sobre la parte inferior derecha de la herramienta Punto y selecciona Intersección. En la Vista Gráfica da clic sobre el eje x (o el eje y) y después sobre la línea recta; en la Vista Algebraica aparecerán las coordenadas del punto de intersección de la recta con el eje x (o el eje y).

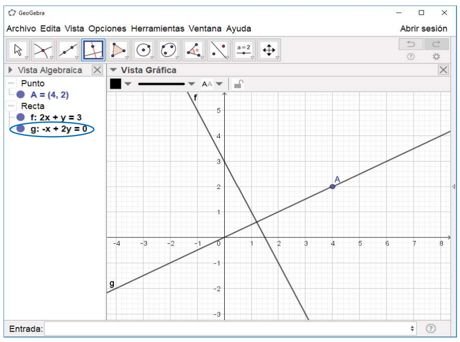




3. Para encontrar la intersección entre dos rectas se utiliza la misma herramienta; en este caso, en lugar de seleccionar alguno de los ejes de coordenadas se seleccionan ambas rectas.

Rectas paralelas y perpendiculares

4. Abre una nueva ventana y traza la recta $2x + y - 3 = 0$.
   a) Para trazar una recta perpendicular a la anterior da clic sobre la herramienta Perpendicular; en la Vista Gráfica selecciona la recta $2x + y - 3 = 0$ (verás que aparece la recta perpendicular) y luego el lugar donde quieras colocarla, dependiendo de ello quedará determinada su ecuación en la Vista Algebraica.

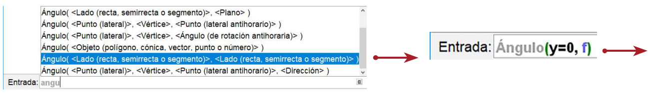


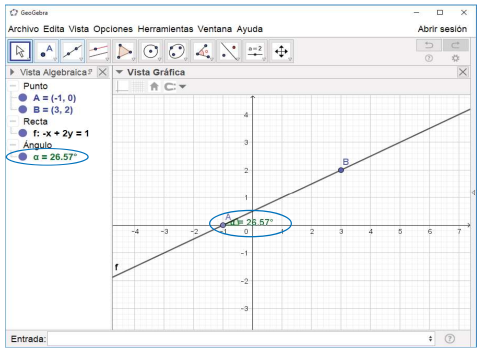
En la ventana, la recta perpendicular se colocó en el punto (4, 2), por tanto su ecuación es $-x + 2y = 0$.

   b) Para trazar una recta paralela a $2x + y - 3 = 0$ da clic sobre la esquina inferior derecha de la herramienta Perpendicular y selecciona Paralela; en la Vista Gráfica da clic sobre la recta $2x + y - 3 = 0$ (verás que aparece la recta paralela) y luego selecciona el lugar donde quieras colocarla, dependiendo de ello quedará determinada su ecuación en la Vista Algebraica.

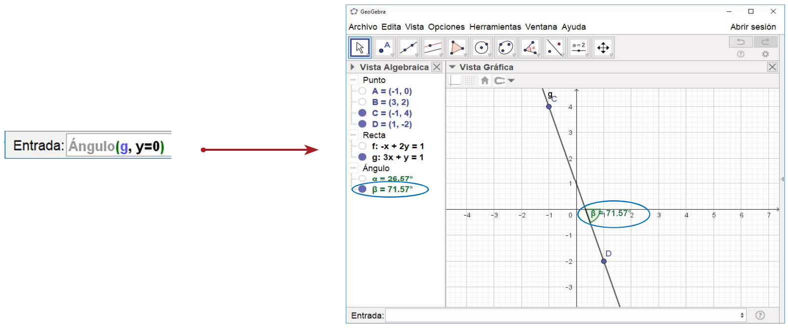
Ángulo de inclinación de una recta:

5. Para calcular el ángulo de inclinación debe tenerse en consideración la pendiente de la recta:
   a) Pendiente positiva: traza la gráfica de $x - 2y + 1 = 0$; en la barra de entrada escribe ángulo y en la lista selecciona Ángulo(<Lado(recta, semirrecta o segmento)>, <Lado(recta, semirrecta o segmento)>). En lugar de <Lado(recta, semirrecta o segmento)> escribe primero y=0 y luego la letra que aparece en la Vista Algebraica antes de la ecuación:





   b) Pendiente negativa: traza la gráfica de $3x + y - 1 = 0$; usando el comando Ángulo(<Lado(recta, semirrecta o segmento)>, <Lado(recta, semirrecta o segmento)>) escribe primero la letra que aparece en Vista Algebraica de la ecuación y luego y=0:



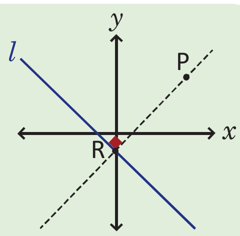
Observa que GeoGebra devuelve el ángulo medido desde la recta $3x + y - 1 = 0$ hacia el eje positivo x. Entonces el ángulo de inclinación de la recta será igual a la diferencia de 180° menos el obtenido con el comando.

Actividades

1. Verifica tus soluciones de los problemas desde la clase 3.1 hasta la clase 3.5 sobre intersecciones con los ejes de coordenadas, intersecciones entre rectas, rectas paralelas y perpendiculares.

2. Utilizando la recta l: $y = -3x + 2$ y el punto P(–2, –1), determina el procedimiento con GeoGebra para calcular la distancia desde el punto P hasta la recta l.

Si l_1 es la recta perpendicular a l que pasa por P y R es el punto de intersección entre l y l_1 entonces, calcular d(P, l) equivale a encontrar d(P, R).



3. Dadas las rectas f: $x - y - 5 = 0$ y g: $6x - y - 21 = 0$, determina el procedimiento con GeoGebra para calcular el ángulo formado entre ambas rectas.

Indicador de logro

4.2 Utiliza un software matemático para encontrar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas, calcular el ángulo de inclinación y el ángulo entre rectas, y elaborar rectas paralelas o perpendiculares.

Secuencia

Ahora se estudiarán en GeoGebra algunos de los conceptos utilizados en la lección 3 como paralelismo, perpendicularidad y ángulo entre rectas.

Propósito

Los numerales 2 y 3 de las actividades permitirán al estudiante describir procesos para resolver problemas en GeoGebra.

Solución de problemas:

1. Clase 3.1: Para el numeral 1, en cada literal graficar la recta dada, en la herramienta Punto seleccionar Intersección, luego seleccionar la recta graficada y el eje x.

Clase 3.2: Para el numeral 1, en cada literal graficar la recta dada, en la herramienta Punto seleccionar Intersección, luego seleccionar la recta graficada y el eje y.
Para el numeral 2, se sigue el mismo procedimiento: graficar la recta y se determinan los interceptos con los pasos hechos anteriormente.

Clase 3.3: Para el numeral 1, graficar las rectas dadas y utilizar la herramienta Intersección.
En el numeral 3 basta graficar las rectas dadas y ver que son paralelas. También puede utilizar la herramienta Intersección.

Clase 3.4: Para el numeral 1, en cada literal graficar las rectas dadas, se puede utilizar la herramienta Intersección, si no existe punto de intersección entre las rectas entonces son paralelas. Para el numeral 2, graficar la recta dada y el punto indicado, utilizar la herramienta Paralela, seleccionar el punto y la recta en la vista gráfica y se graficará la recta que se pide.

Clase 3.5: Numeral 1: para cada literal graficar las rectas dadas, luego utilizar la herramienta Ángulo y dar clic sobre las rectas, se graficará el ángulo entre las rectas.
Numeral 2: En cada literal graficar la recta y el punto dados. Utilizar la herramienta Perpendicular y seleccionar la recta y el punto, se graficará la recta buscada.

2. Graficar la recta y el punto P. Utilizar la herramienta Perpendicular y seleccionar la recta y el punto, se graficará la recta perpendicular a l que pasa por el punto P. Determinar el punto de intersección de l y su recta perpendicular. Se puede determinar la distancia entre P y el punto de intersección graficando el segmento que une estos dos puntos utilizando la herramienta Segmento; o también, puede escribir en la barra de entrada Distancia(P, Q) donde Q es el punto de intersección entre la recta y su perpendicular.

3. Graficar las rectas escribiéndolas en la barra de entrada, seleccionar la herramienta Ángulo y dar clic sobre las rectas dadas.