Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. La parábola	1	1. Lugar geométrico de una ecuación
	1	2. Ecuación de un lugar geométrico
	1	3. Actividad introductoria de parábola
	1	4. La parábola
	1	5. Desplazamientos paralelos
	1	6. Procedimiento para completar cuadrados perfectos
	1	7. Ecuación general de la parábola
	1	8. Líneas rectas y parábolas
	1	9. Determinación de parámetros
	1	10. Practica lo aprendido
	1	11. Aplicaciones de la parábola
	1	12. Practica lo aprendido
	2	Prueba del primer periodo
2. La circunferencia	1	1. La circunferencia
	1	2. Desplazamientos paralelos de la circunferencia
	1	3. Ecuación general de la circunferencia
	1	4. Recta tangente a una circunferencia

Lección	Horas	Clases
	1	5. Rectas secantes a una circunferencia
	1	6. Practica lo aprendido
	1	7. Aplicaciones de la circunferencia
	1	Prueba de las lecciones 1 y 2
3. La elipse	1	1. Actividad introductoria de elipse
	1	2. La elipse
	1	3. Elementos y propiedades de la elipse
	1	4. Desplazamientos paralelos de la elipse
	1	5. Ecuación general de la elipse
	1	6. Practica lo aprendido
	2	7. Aplicaciones de la elipse
4. La hipérbola	1	1. Actividad introductoria de la hipérbola
	1	2. La hipérbola
	1	3. Elementos y propiedades de la hipérbola
	1	4. Desplazamientos paralelos de la hipérbola
	1	5. Ecuación general de la hipérbola
	1	6. Practica lo aprendido
	2	7. Aplicaciones de la hipérbola
	2	8. Problemas de la unidad

Lección	Horas	Clases
5. Práctica en GeoGebra.	1	1. Construcción de secciones cónicas
	1	2. Gráfica de la ecuación general de las secciones cónicas
	1	3. Propiedades de las secciones cónicas
	1	4. Problemas sobre el lugar geométrico de cónicas
	1	Prueba de las lecciones 3 y 4

41 horas clase + prueba del primer periodo + prueba de las lecciones 1 y 2 + prueba de las lecciones 3 y 4

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: La parábola
Se estudia desde la definición de lugar geométrico, trabajando un poco sobre la forma de plantear un problema para encontrar la ecuación que determina un lugar geométrico descrito matemáticamente, y se definen procedimientos generales para los desplazamientos paralelos y para completar cuadrados perfectos. Se trabaja con los contenidos correspondientes de la parábola, iniciando con su definición, luego identificando sus elementos y finalmente estudiando sus aplicaciones utilizando la propiedad reflectora del foco; además, se hace un estudio de las rectas secantes y tangentes a la parábola. En esta unidad se aborda primero la parábola, puesto que en su ecuación general es más sencillo completar cuadrados, debido a que este procedimiento solamente es necesario hacerlo una vez.

Lección 2: La circunferencia
Este lugar geométrico ya es conocido por los estudiantes de manera geométrica. En esta lección se establece de manera analítica su ecuación a partir de su definición, utilizando los resultados que se tienen en el plano cartesiano, y se trabajan los demás temas de manera muy parecida a la parábola. Además, se abarca el contenido de las rectas tangentes a la circunferencia en un punto específico, de manera general, el cual es un resultado muy práctico pero con cierta complejidad en su demostración; finalmente, es necesario aplicar la resolución de ecuaciones cuadráticas de manera eficiente, pues será muy útil en esta lección y en general en toda la unidad.

Lección 3: La elipse
Para iniciar esta lección se realiza una actividad con la cual los estudiantes se puedan familiarizar con la forma geométrica de una elipse, y puedan asociarla con su definición formal, a partir de construcciones en algunos materiales de uso cotidiano; luego se realiza el estudio teórico de la elipse y sus elementos, para finalizar con las aplicaciones que tiene tanto su forma geométrica como la propiedad reflectora de sus focos.

Lección 4: La hipérbola
Después de haber abordado casi todas las secciones cónicas, se trabaja con la hipérbola, cuya complejidad es un poco mayor respecto de las figuras anteriores, de manera similar, se hace una actividad con los estudiantes para que puedan familiarizarse con la forma geométrica de una hipérbola, y logren asociarla con su definición formal; posteriormente se realiza el estudio teórico de la hipérbola, sus elementos y propiedades, y de manera análoga se estudian las aplicaciones que tiene ya sea por su forma geométrica o por la propiedad reflectora de sus focos. En esta lección también se abordan algunos problemas que tienen correspondencia con todas las lecciones trabajadas durante la unidad, con el fin de asegurar el aprendizaje y la comprensión de todos los contenidos.

Lección 5: Práctica en GeoGebra
Después de haber abordado todos los contenidos sobre secciones cónicas, se proponen algunas prácticas en GeoGebra como una herramienta muy potente para complementar la actividad matemática, con el fin de corroborar su aplicación en las gráficas de las secciones cónicas, de conocer las diferentes herramientas que tiene dicho software, y que puede ayudar a visualizar los resultados establecidos de manera teórica.

1.1 Lugar geométrico de una ecuación

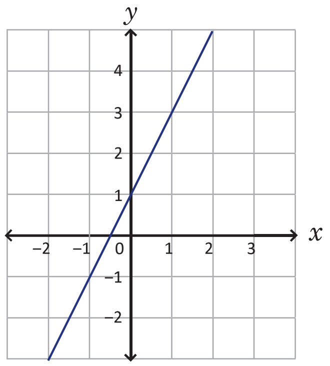
Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano el conjunto de puntos que satisfacen las ecuaciones:

a) $y = 2x + 1$ b) $y = x^2 - 1$

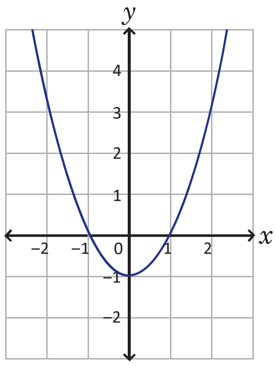
Solución

a) La ecuación es una función lineal y su gráfica en el plano es:



Por lo tanto, el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $y = 2x + 1$ es una línea recta.

b) La ecuación es una función cuadrática y su gráfica en el plano es:



Por lo tanto, el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $y = x^2 - 1$ es una parábola.

Definición

El **lugar geométrico** determinado por una ecuación es el conjunto de puntos que satisfacen dicha ecuación; en casos particulares pueden ser figuras conocidas como un punto, una línea recta, una circunferencia, una parábola, etc.

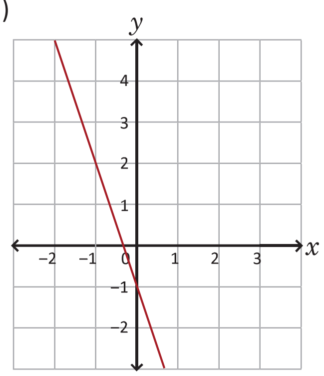
Problemas

1. Grafica en el plano cartesiano el lugar geométrico determinado por cada ecuación.

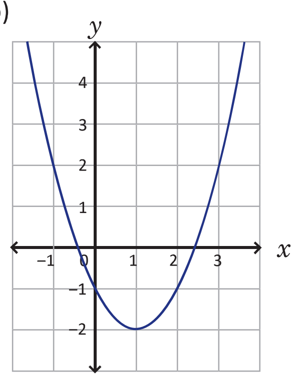
a) $y = x - 4$ b) $y = -3x + 2$ c) $y = x^2 - 3$

2. Determina las ecuaciones cuyo lugar geométrico corresponda a cada gráfica.

a)



b)



Indicador de logro

1.1 Grafica el lugar geométrico determinado por una ecuación.

Secuencia

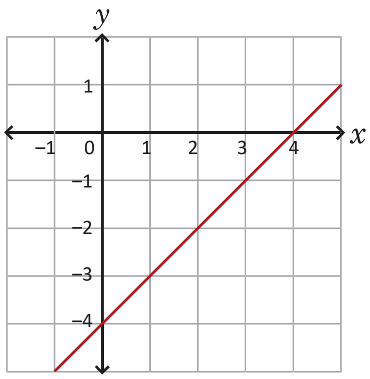
De la unidad anterior, sobre línea recta, los estudiantes han utilizado el plano cartesiano como lugar para graficar diferentes figuras geométricas, y se parte de las figuras que conoce para introducir conceptos sobre geometría analítica.

Propósito

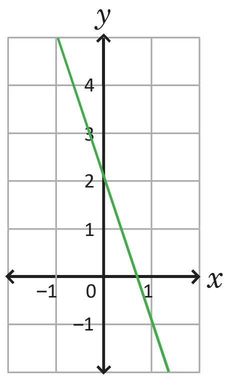
El Problema inicial utiliza las ecuaciones de funciones ya conocidas por los estudiantes, tales como la línea recta o la parábola, con el objetivo de introducir la definición del término "Lugar geométrico" de una ecuación.

Solución de problemas:

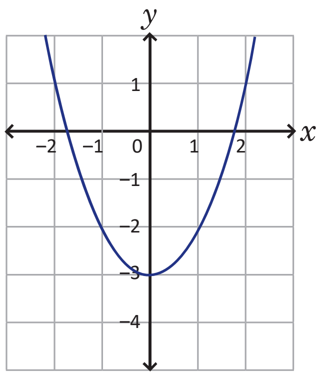
1a)



1b)



1c)



2a) Es una línea recta que pasa por los puntos (0, –1) y (–1, 2), entonces:

La pendiente es $\frac{2-(-1)}{-1-0} = -3$.

El intercepto con el eje y es –1.

Por lo tanto, la ecuación es:

$$y = -3x - 1.$$

En el numeral 2, considere que un estudiante puede expresar de diferente forma las ecuaciones, por ejemplo en el literal b, podría desarrollar el cuadrado del binomio o dejarlo indicado; en este caso cualquier forma de expresar la ecuación se podría considerar correcta, a menos que como docente brinde la indicación de expresarlo en una forma específica.

2b) Es una parábola desplazada 1 unidad a la derecha y 2 hacia abajo. Ahora si el vértice de esta parábola estuviera en el origen sería de la forma $y = ax^2$, y pasaría por el punto (1, 1), así se debe cumplir que:

$$1 = a(1)^2$$

$$1 = a$$

Por lo tanto, la ecuación que determina dicho lugar geométrico es la parábola $y = x^2$ desplazada 1 unidad a la derecha y 2 hacia abajo, es decir, $y + 2 = (x-1)^2$, o bien $y = (x-1)^2 - 2$.

1.2 Ecuación de un lugar geométrico*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto A (0, 2) es igual a la distancia al punto B(4, 0).

Solución

Se colocan los puntos A y B en el plano cartesiano.

En particular un punto que cumple es el punto medio del segmento AB.

Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos:

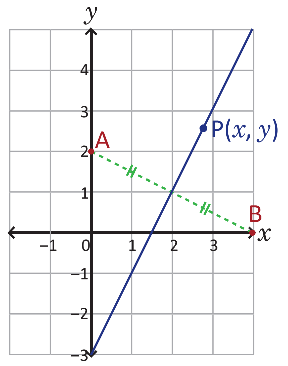
$$d(\text{A, P}) = d(\text{P, B})$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2} \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} \quad \text{simplificando la ecuación,}$$

$$8x - 4y - 12 = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación que determina el lugar geométrico es $2x - y - 3 = 0$, y gráficamente es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio (mediatriz del segmento AB).



Puedes comprobar que las rectas son perpendiculares.

Conclusión

Para deducir la ecuación que determina un lugar geométrico con condiciones específicas, se plantea la ecuación que cumple las condiciones requeridas, aplicando conceptos de distancia entre puntos, entre punto y recta, etc.

Ejemplo

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al eje x es siempre igual a la distancia al punto A(0, 2).

En particular un punto que cumple es el punto medio de la distancia entre el punto A y el eje x.

Planteando la ecuación para P(x, y) que cumple las condiciones:

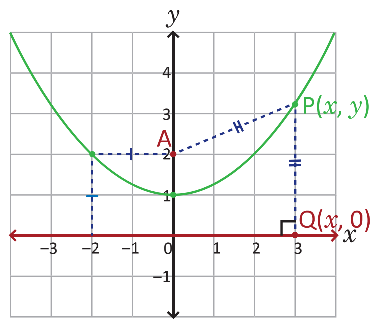
$$d(\text{P, Q}) = d(\text{A, P})$$

$$|y| = \sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$\cancel{y^2} = x^2 + \cancel{y^2} - 4y + 4 \quad \text{simplificando la ecuación,}$$

$$x^2 - 4y + 4 = 0.$$

Y se puede expresar como: $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$.



Por lo tanto, la ecuación que determina el lugar geométrico es $x^2 - 4y + 4 = 0$, y es una parábola.

Problemas

1. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto A(2, –3) es igual a la distancia al punto B(0, –1).
2. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $y = -1$ es siempre igual a la distancia al punto A(0, 1).
3. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que están a 2 unidades de distancia del eje y.
4. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia del eje x como del eje y.

Indicador de logro

1.2 Deduce la ecuación que determina un lugar geométrico con condiciones dadas.

Secuencia

Ahora que los estudiantes ya saben qué es un lugar geométrico, se trabajarán problemas que brindan condiciones que determinan un lugar en el plano para deducir sus ecuaciones. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

El Ejemplo es un problema parecido al inicial, de modo que apliquen los conocimientos sobre distancia entre dos puntos o distancia entre punto y recta. Al resolverlo se avanza en la deducción de la ecuación canónica de la parábola, partiendo de un caso específico.

Solución de problemas:

1. Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos:

$$d(\text{A, P}) = d(\text{P, B})$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2} \quad \text{elevando al cuadrado cada miembro,}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4x + 4 + 6y + 9 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + 1$$

$$-4x + 4y + 12 = 0 \quad \text{dividiendo por } -4,$$

$$x - y - 3 = 0.$$

2. Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos y distancia de un punto a una recta:

$$d(\text{P}, l) = d(\text{A, P}) \qquad l\text{: recta } y = -1,$$

$$|y-(-1)| = \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} \quad \text{elevando al cuadrado cada miembro,}$$

$$\cancel{y^2} + 2y + 1 = x^2 + \cancel{y^2} - 2y + 1$$

$$x^2 - 4y = 0.$$

3. Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia de un punto a una recta:

$$d(\text{P, l}) = 2$$

$$|x-0| = 2$$

$$|x| = 2$$

$$x = 2 \text{ o } x = -2$$

Por lo tanto, son los puntos que pertenecen a las rectas $x = 2$ o $x = -2$.

4. Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia de un punto a una recta:

$$d(\text{P}, l_1) = d(\text{P}, l_2) \qquad l_1\text{: el eje } x,\ l_2\text{: el eje } y.$$

$$|x| = |y|$$

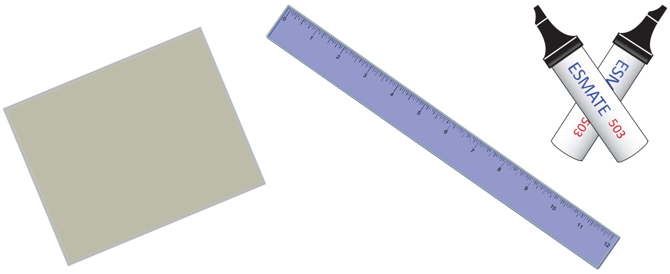
$$x = y \text{ o } x = -y$$

Por lo tanto, son los puntos que pertenecen a las rectas $y = x$ o $y = -x$.

1.3 Actividad introductoria

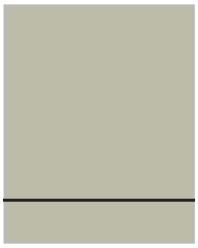
Materiales

- Hoja de papel vegetal
- Plumón
- Regla

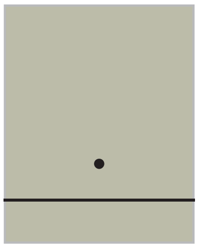


Actividad

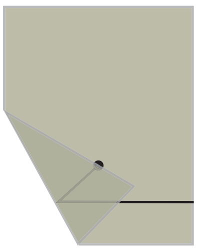
1. Dibuja una recta paralela al lado más angosto de la página, cercana al final de la misma.



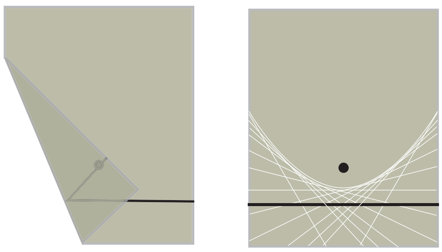
2. Dibuja un punto arriba de la recta, y en medio de la página.



3. Tomando el inicio de la recta, dobla la página hasta hacer coincidir el inicio de esta con el punto dibujado.



4. Realiza el mismo proceso con puntos cercanos en la línea recta hasta llegar al final de esta. Analiza la figura formada.



Definición

La figura que queda marcada por los cortes de los dobleces es una **parábola**. Observa que cada punto de ella cumple la condición de estar a igual distancia del punto dibujado como de la recta dibujada.

Preguntas

1. ¿Qué pasaría con la parábola si el punto se separa más de la recta dibujada?
2. ¿Qué pasaría si el punto se dibujara por debajo de la línea?
3. ¿Qué pasaría si la recta se dibujara vertical y con el punto a la derecha o izquierda de ella?
4. Analiza por qué se cumple que los puntos que determinan la parábola están a igual distancia del punto como de la recta.

Indicador de logro

1.3 Identifica el lugar geométrico de una parábola.

Secuencia

Ahora que los estudiantes ya han deducido ecuaciones para lugares geométricos específicos, se construirá la forma que tiene una parábola, basado en su definición.

Propósito

En la Actividad se espera que logren asociar la definición geométrica con la figura que conocen de la parábola, para que luego al deducir su ecuación canónica quede claro que esta ecuación define el lugar geométrico de una parábola.

Materiales

En la clase se utilizarán hojas de papel vegetal, plumón y regla (uno de cada uno por estudiante).

Solución de problemas:

1. Los dobleces tendrían una menor inclinación y tenderían a ser menos verticales conforme se aleje más el punto de la línea, entonces se formaría una parábola cada vez más abierta.

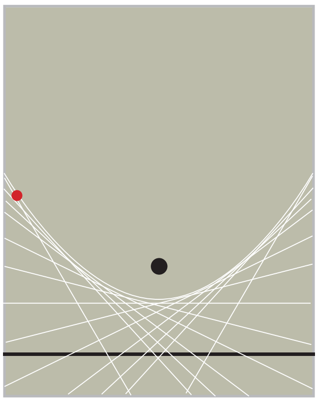
2. También se formaría una parábola pero abierta hacia abajo, porque ahora los dobleces quedarían al revés.

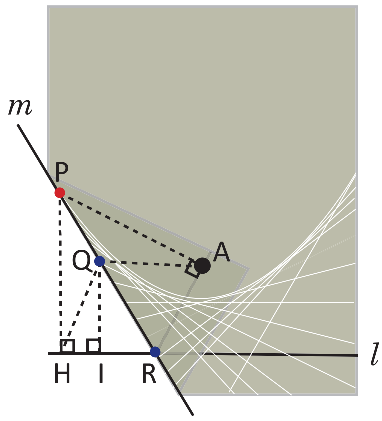
3. Los dobleces se inclinarían, partirían de una posición vertical e irían tendiendo a ser horizontales, entonces se formaría una parábola ya sea abierta hacia la derecha, o bien, abierta hacia la izquierda.

4. Considerando el doblez m, y sea R la intersección de dicho doblez con la recta dibujada l, sea H el punto que corresponde al punto A, se cumple que RA = RH, por ser simétricos respecto a m, y sea P el punto de intersección de m y la perpendicular a l que pasa por H, entonces, d(P, A) = d(P, H) = d(P, l), porque las líneas se sobreponen al hacer el doblez.

   Si Q es otro punto del doblez (recta m) entonces d(Q, A) = d(Q, H) $>$ d(Q, I) = d(Q, l).

   Por lo tanto, entre los puntos de la recta m solamente P está en la curva cuyos puntos equidistan al punto A y la recta l (m es tangente a la curva en el punto P). Luego, esta curva es la figura marcada por los cortes de los dobleces.





Lección 1

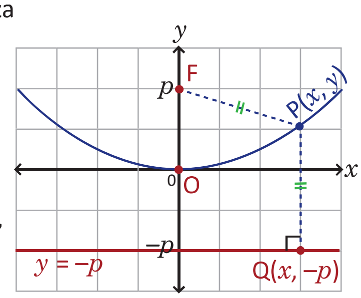
1.4 La parábola*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $y = -p$ es igual a la distancia al punto F(0, p).

Solución

Se toman en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y se utiliza la distancia de un punto a una recta y la distancia de dos puntos.



Como la recta $y = -p$ es horizontal, d(P, Q) = $|y - (-p)|$.

Expresando la igualdad d(P, Q) = d(P, F):

$$|y-(-p)| = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} \quad \text{elevando al cuadrado,}$$
$$|y+p|^2 = x^2+(y-p)^2 \quad \text{desarrollando los cuadrados,}$$
$$y^2+2yp+p^2 = x^2+y^2-2yp+p^2 \quad \text{simplificando,}$$
$$4yp = x^2 \quad \text{despejando } y,$$
$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$

Por lo tanto, el lugar geométrico es una parábola de la forma $y = ax^2$, donde $a = \frac{1}{4p}$.

Definición

La ecuación que determina el espacio geométrico de **una parábola** está dada por: $y = \frac{1}{4p}x^2$.

En esta ecuación, **el vértice** de la parábola siempre estará en el origen (0, 0). El valor de p recibe el nombre de **parámetro**.

El punto F(0, p) es conocido como **el foco** de la parábola, la recta $y = -p$ es conocida como **la directriz** de la parábola. La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco de la parábola se conoce como **eje**.

Si el parámetro p es negativo, la ecuación determina una parábola abierta hacia abajo.

Si la directriz es una recta vertical de la forma $x = -p$, la parábola sería horizontal y su ecuación sería:

$$x = \frac{1}{4p}y^2$$

Ejemplo 1

Determina la ecuación de la parábola con foco F(0, −3) y directriz $y = 3$.

El valor de $p = -3$, entonces la ecuación de la parábola es $y = \frac{1}{4(-3)}x^2$, simplificando queda: $y = -\frac{1}{12}x^2$.

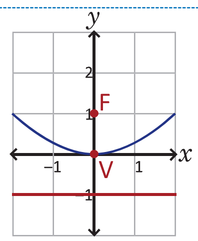
Por lo tanto, la ecuación es $y = -\frac{1}{12}x^2$, y es una parábola abierta hacia abajo.

Ejemplo 2

Determina el foco, la directriz y el vértice de la parábola $y = \frac{1}{4}x^2$, luego localiza cada uno en el plano cartesiano y grafica la parábola.

Se tiene que $\frac{1}{4} = \frac{1}{4p}$, es decir, $p = 1$.

Foco: F(0, 1) Directriz: $y = -1$ Vértice: V(0, 0)



Problemas

1. Deduce la ecuación y grafica la parábola con el foco y la directriz indicada en cada literal.
   a) F(0, 2), $y = -2$ b) F(0, −1), $y = 1$ c) F$\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $y = -\frac{1}{8}$ d) F$\left(0, -\frac{1}{16}\right)$, $y = \frac{1}{16}$ e) F(2, 0), $x = -2$

2. Determina las coordenadas del foco, el vértice y la ecuación de la directriz, luego localízalos en el plano cartesiano y grafica la parábola.
   a) $y = 2x^2$ b) $y = -x^2$ c) $y = \frac{1}{8}x^2$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2$ e) $x = 2y^2$

Indicador de logro

1.4 Deduce y grafica la ecuación de una parábola con vértice en el origen dados el foco y la directriz.

Secuencia

Una vez asociada la definición de parábola con su gráfica, se deduce su ecuación a partir de las condiciones dadas en la definición. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

El Problema inicial plantea las condiciones de la definición de la parábola para poder deducir la ecuación que define su lugar geométrico.

Solución de problemas:

1a) El valor $p = 2$, entonces la ecuación de la parábola es: $y = \frac{1}{4(2)}x^2 = \frac{1}{8}x^2$.

1b) El valor $p = -1$, entonces $y = \frac{1}{4(-1)}x^2 = -\frac{1}{4}x^2$.

1c) El valor $p = \frac{1}{8}$, entonces $y = \frac{1}{4\left(\frac{1}{8}\right)}x^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}x^2 = 2x^2$.

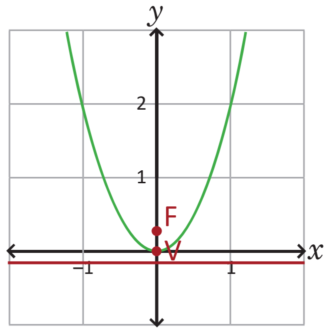
1d) El valor $p = -\frac{1}{16}$, entonces

$$y = \frac{1}{4\left(-\frac{1}{16}\right)}x^2 = -\frac{1}{\frac{1}{4}}x^2 = -4x^2.$$

1e) El valor $p = 2$, pero la recta es vertical y el punto está a la derecha de dicha recta, entonces intercambiando x y y en $y = \frac{1}{4p}x^2$ la ecuación de la parábola es $x = \frac{1}{4(2)}y^2 = \frac{1}{8}y^2$.

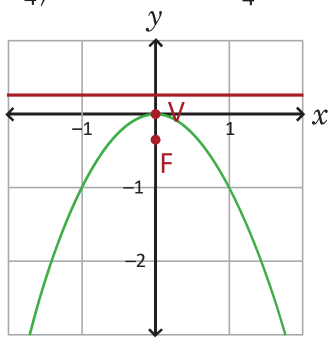
2a) Se calcula el valor de p: $2 = \frac{1}{4p}$, es decir, $p = \frac{1}{8}$.

Foco: F$\left(0, \frac{1}{8}\right)$ Directriz: $y = -\frac{1}{8}$ Vértice: V(0, 0)



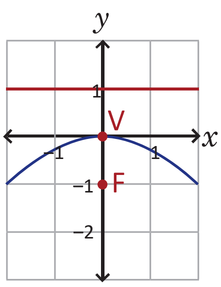
2b) Se calcula el valor de p: $-1 = \frac{1}{4p}$, es decir, $p = -\frac{1}{4}$.

Foco: F$\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ Directriz: $y = \frac{1}{4}$ Vértice: V(0, 0)



2d) Se calcula el valor de p: $-\frac{1}{4} = \frac{1}{4p}$, es decir, $p = -1$.

Foco: F (0, –1) Directriz: $y = 1$ Vértice: V(0, 0)

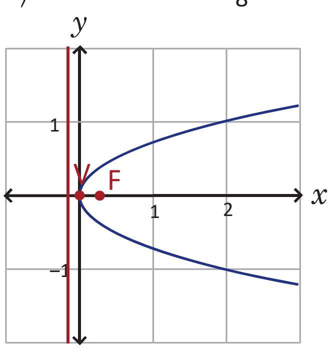


El literal c se puede resolver de manera muy parecida al literal d, siendo un poco más sencillo porque el coeficiente es positivo, y los elementos son:

F (0, 2), $y = -2$, V(0, 0).

2e) Se calcula el valor de p: $2 = \frac{1}{4p}$, es decir, $p = \frac{1}{8}$.

Foco: F$\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ Directriz: $x = -\frac{1}{8}$ Vértice: V(0, 0)



Lección 1

1.5 Desplazamientos paralelos

Problema inicial

Aplica desplazamientos verticales y horizontales para graficar el lugar geométrico que determina la ecuación $y = (x - 2)^2 + 1$ en el plano cartesiano. Determina las coordenadas del foco, el vértice y la ecuación de la directriz.

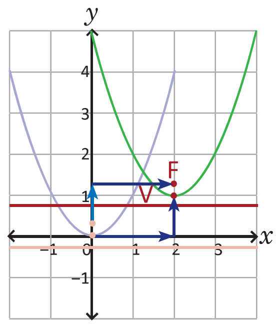
La gráfica de la función $f(x - h) + k$, es la gráfica de la función $f(x)$ desplazada h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba.

Solución

La gráfica de la función $y = (x - 2)^2 + 1$, es la gráfica de la función $y = x^2$ desplazada 2 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba.

Determinando p de $y = x^2$: $1 = \frac{1}{4p}$, solucionando, $p = \frac{1}{4}$.

Además las coordenadas del vértice, el foco y la ecuación de la directriz se desplazan de igual manera.



Ecuación	$y = x^2$	$y = (x - 2)^2 + 1$
Foco	$F\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$F\left(0 + 2, \frac{1}{4} + 1\right) = F\left(2, \frac{5}{4}\right)$
Vértice	$V(0, 0)$	$V(0 + 2, 0 + 1) = V(2, 1)$
Directriz	$y = -\frac{1}{4}$	$y = \frac{3}{4}$

En general

Para desplazar una gráfica horizontalmente h unidades, se cambia la variable x por la expresión $x - h$; y para desplazar una gráfica verticalmente k unidades se cambia la variable y por la expresión $y - k$.

Entonces la ecuación de una parábola de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente es: $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$.

En una parábola desplazada con ecuación $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$, se cumple que: $V(h, k)$ $F(h, p + k)$ Directriz: $y = -p + k$

Ejemplo

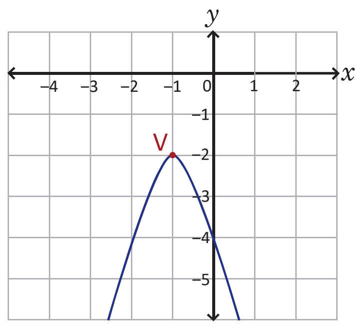
a) Determina la ecuación que resulta al desplazar la parábola $y = 2x^2$, -3 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente.

Sustituyendo x por la expresión $x - (-3)$, y por la expresión $y - 1$:

$$y - 1 = 2(x + 3)^2, \text{ o bien } y = 2(x + 3)^2 + 1$$

b) Grafica la parábola determinada por la ecuación $y + 2 = -2(x + 1)^2$.

Es la ecuación de la parábola $y = -2x^2$ desplazada -1 unidad horizontalmente y -2 unidades verticalmente, como muestra la figura.



Problemas

1. Determina la ecuación de la parábola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, en cada literal.

a) $y = x^2$, $h = 3$, $k = 2$　　b) $y = 3x^2$, $h = -1$, $k = 3$　　c) $y = -x^2$, $h = 1$, $k = -1$

d) $y = -2x^2$, $h = -2$, $k = -1$　　e) $y = 2x^2$, $h = 0$, $k = 3$　　f) $y = -3x^2$, $h = -2$, $k = 0$

2. Grafica en el plano cartesiano la parábola determinada por las siguientes ecuaciones. Luego determina las coordenadas del foco, el vértice y la ecuación de la directriz de cada una.

a) $y - 1 = (x - 4)^2$　　b) $y + 2 = 2(x - 3)^2$　　c) $y - 3 = -(x + 1)^2$　　d) $y + 1 = -2(x + 1)^2$

Indicador de logro

1.5 Encuentra y grafica la ecuación de una parábola desplazada paralelamente respecto a los ejes de coordenadas.

Secuencia

De la unidad de funciones reales vista en Primer año de bachillerato, se tiene un resultado para los desplazamientos paralelos de la gráfica de una función; a partir de ella se deduce la generalización de los desplazamientos paralelos para una ecuación cualquiera (no necesariamente función).

Propósito

En el Problema inicial y el Ejemplo, se espera que los estudiantes apliquen los desplazamientos paralelos para dibujar la gráfica de una parábola desplazada, para ubicar puntos específicos como el foco o el vértice y rectas como la directriz; en estos apartados y en los Problemas, no se espera que grafiquen utilizando tablas de valores.

Solución de problemas:

1a) $y - 2 = (x - 3)^2$, o bien $y = (x - 3)^2 + 2$.

1b) $y - 3 = 3(x - (-1))^2$, o bien $y = 3(x + 1)^2 + 3$.

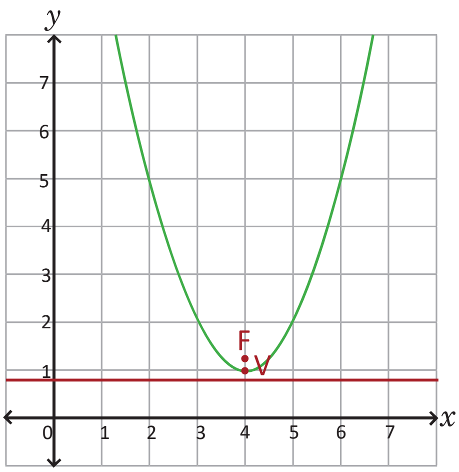
1c) $y - (-1) = -(x - 1)^2$, o bien $y = -(x - 1)^2 - 1$.

1d) $y - (-1) = -2(x - (-2))^2$, o bien $y = -2(x + 2)^2 - 1$.

1e) $y - 3 = 2(x - 0)^2$, o bien $y = 2x^2 + 3$.

1f) $y - 0 = -3(x - (-2))^2$, o bien $y = -3(x + 2)^2$.

2a)



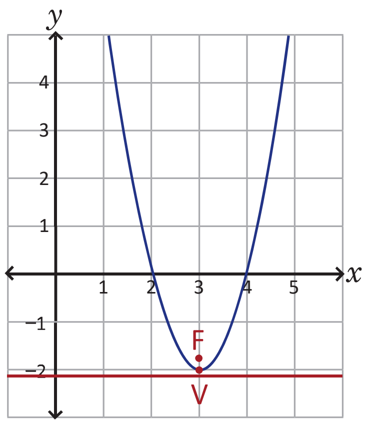
$p = \frac{1}{4}$

F $\left(4, \frac{5}{4}\right)$

V $(4, 1)$

$y = \frac{3}{4}$

2b)



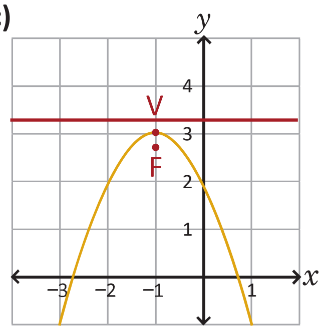
$p = \frac{1}{8}$

F $\left(3, -\frac{15}{8}\right)$

V $(3, -2)$

$y = -\frac{17}{8}$

2c)



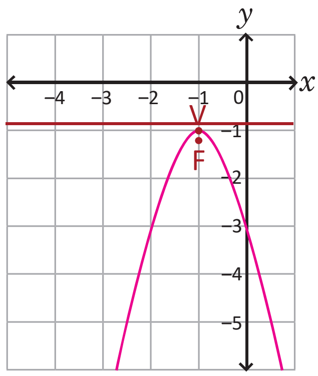
$p = -\frac{1}{4}$

F $\left(-1, \frac{11}{4}\right)$

V $(-1, 3)$

$y = \frac{13}{4}$

2d)



$p = -\frac{1}{8}$

F $\left(-1, -\frac{9}{8}\right)$

V $(-1, -1)$

$y = -\frac{7}{8}$

1.6 Procedimiento para completar cuadrados perfectos

Problema inicial

Escribe el polinomio $x^2 + 4x$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

Solución

Para completar el cuadrado perfecto en la expresión se suma y resta la misma cantidad para no alterar la expresión:

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$= (x^2 + 4x + 2^2) - 4$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

Por lo tanto, $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$.

En el desarrollo del cuadrado de un binomio se cumple que:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

El término a^2 puede obtenerse al dividir el coeficiente que acompaña a "x" entre 2 y elevarlo al cuadrado.

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$$

Conclusión

El método en el cual se suma y resta una cantidad adecuada para que una expresión se convierta en cuadrado perfecto se conoce como **completar cuadrados perfectos**, y es una estrategia muy útil para la resolución de problemas en matemática.

Ejemplo

Completa cuadrados perfectos en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^2 - 8x$ b) $x^2 - 4x + 2$ c) $2x^2 + 12x + 10$ d) $-3x^2 + 12x - 13$

a) $x^2 - 8x = (x^2 - 8x + 4^2) - 4^2$
$= (x - 4)^2 - 16$

b) $x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 2$
$= (x - 2)^2 - 4 + 2$
$= (x - 2)^2 - 2$

c) $2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x) + 10$
$= 2(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2) + 10$
$= 2[(x + 3)^2 - 9] + 10$
$= 2(x + 3)^2 - 18 + 10$
$= 2(x + 3)^2 - 8$

d) $-3x^2 + 12x - 13 = -3(x^2 - 4x) - 13$
$= -3(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 13$
$= -3[(x - 2)^2 - 4] - 13$
$= -3(x - 2)^2 + 12 - 13$
$= -3(x - 2)^2 - 1$

Problemas

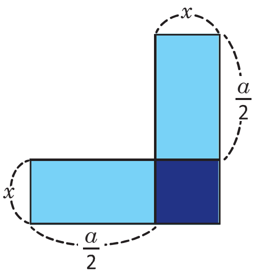
1. Completa cuadrados perfectos en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^2 + 2x$ b) $x^2 + 6x$ c) $x^2 + 8x$ d) $x^2 - 4x$ e) $x^2 + 10x + 15$
f) $x^2 - 2x - 1$ g) $2x^2 + 8x + 6$ h) $3x^2 - 6x - 2$ i) $-x^2 - 4x - 4$ j) $-2x^2 + 8x + 3$

2. Utilizando la figura de la derecha:

a) Determina cuánto es el área de la figura mostrada.

b) Determina el área del rectángulo que debe agregarse para formar un cuadrado.



Unidad 3

55

Indicador de logro

1.6 Completa cuadrados perfectos en una expresión algebraica.

Secuencia

El procedimiento para completar cuadrados se ha venido desarrollando y utilizando durante muchas unidades desde noveno grado, sin embargo, siempre es necesario repasar este procedimiento para realizarlo eficientemente, porque en especial en esta unidad se aplicará con mucha frecuencia.

Propósito

El Problema inicial utiliza la forma general en que se expresa una parábola desplazada, para lograr que en la siguiente clase el estudiante reconozca que tiene que realizar el mismo procedimiento. El numeral 2 de los Problemas es para asociar la parte algebraica y geométrica de un cuadrado.

Solución de problemas:

1a) $x^2 + 2x + (1)^2 - (1)^2 = (x + 1)^2 - 1$

1b) $x^2 + 6x + (3)^2 - (3)^2 = (x + 3)^2 - 9$

1c) $x^2 + 8x + (4)^2 - (4)^2 = (x + 4)^2 - 16$

1d) $x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2 = (x - 2)^2 - 4$

1e) $x^2 + 10x + (5)^2 - (5)^2 + 15 = (x + 5)^2 - 10$

1f) $x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 - 1 = (x - 1)^2 - 2$

1g) $2x^2 + 8x + 6 = 2(x^2 + 4x + (2)^2 - (2)^2) + 6 = 2(x + 2)^2 - 8 + 6 = 2(x + 2)^2 - 2$

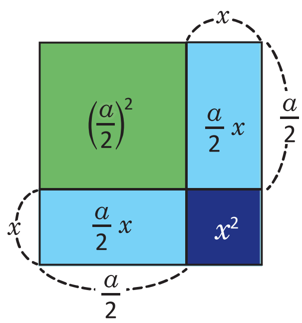
1h) $3x^2 - 6x - 2 = 3(x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2) - 2 = 3(x - 1)^2 - 3 - 2 = 3(x - 1)^2 - 5$

1i) $-x^2 - 4x - 4 = -(x^2 + 4x + (2)^2 - (2)^2) - 4 = -(x + 2)^2 + 4 - 4 = -(x + 2)^2$

1j) $-2x^2 + 8x + 3 = -2(x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2) + 3 = -2(x - 2)^2 + 8 + 3 = -2(x - 2)^2 + 11$

2a) El área del cuadrado azul es x^2, y el área de uno de los rectángulos celestes es $\frac{a}{2}x$, por lo tanto, el área de la figura es:

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a}{2}x = x^2 + ax.$$



2b) Se debe agregar un cuadrado de lado $\frac{a}{2}$, y se puede constatar que el área es por un lado $x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, y por otro lado es el área del cuadrado grande, es decir, $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2$ y por lo tanto, se cumple que:

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2.$$

1.7 Ecuación general de la parábola

Problema inicial

Grafica el lugar geométrico determinado por la ecuación $-x^2 + 4x - 3 + y = 0$.

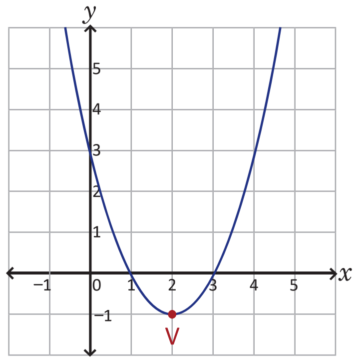
Solución

Despejando y y completando cuadrados perfectos para x.

$$y = x^2 - 4x + 3$$
$$y = (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 3$$
$$y = (x - 2)^2 - 4 + 3$$
$$y = (x - 2)^2 - 1$$

Expresando de otra manera: $y - (-1) = (x - 2)^2$.

Por lo tanto la ecuación $y - x^2 + 4x - 3 = 0$ es la gráfica de la parábola $y = x^2$ desplazada 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo.



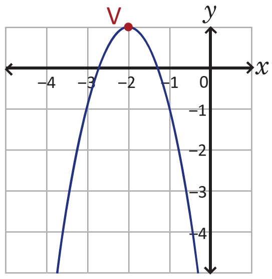
Conclusión

Una parábola puede ser representada desarrollando los cuadrados perfectos de la ecuación $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ y dejando la ecuación igualada a 0.

En general, para determinar los desplazamientos verticales y horizontales en una ecuación de la forma $ax^2 + bx + cy + d = 0$, se completan cuadrados perfectos y se expresa en la forma $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$. A la ecuación de la forma $ax^2 + bx + cy + d = 0$ se le llama **ecuación general de la parábola**.

Ejemplo

Grafica la parábola determinada por la ecuación $2x^2 + 8x + 7 + y = 0$.
Determina las coordenadas del vértice, el foco y la directriz.



Despejando y y completando cuadrados perfectos para x.

$$y = -2x^2 - 8x - 7$$
$$y = -2(x^2 + 4x) - 7$$
$$y = -2(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2) - 7$$
$$y = -2(x + 2)^2 + 8 - 7$$
$$y = -2(x + 2)^2 + 1$$

Por lo tanto, es la parábola $y = -2x^2$ desplazada 2 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia arriba.

Determinando p: $-2 = \frac{1}{4p}$, solucionando, $p = -\frac{1}{8}$.

Entonces:

Ecuación	$y = -2x^2$	$y = -2(x + 2)^2 + 1$
Foco	$F\left(0, -\frac{1}{8}\right)$	$F\left(-2, \frac{7}{8}\right)$
Vértice	V (0, 0)	V (−2, 1)
Directriz	$y = \frac{1}{8}$	$y = \frac{9}{8}$

Problemas

Para cada literal determina el vértice y grafica la parábola correspondiente.

a) $x^2 + 2x + 2 - y = 0$
b) $x^2 - 4x + 3 - y = 0$
c) $x^2 + 4x + 5 + y = 0$
d) $-x^2 + 2x + 1 - y = 0$
e) $-2x^2 - 12x - 20 + y = 0$
f) $2x^2 - 8x + 5 + y = 0$
g) $3x^2 - 6x + 5 + y = 0$
h) $3x^2 + 6x + y + 6 = 0$

Indicador de logro

1.7 Determina las coordenadas del vértice y traza la gráfica de una parábola a partir de su ecuación general.

Secuencia

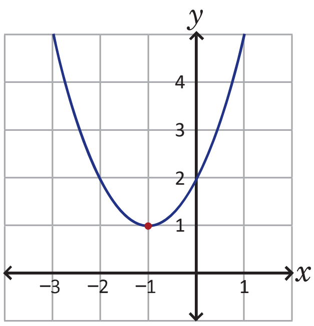
Una vez hecho el repaso sobre el procedimiento para completar cuadrados se puede trabajar con la ecuación general de la parábola, para encontrar su vértice y graficarla en el plano cartesiano.

Propósito

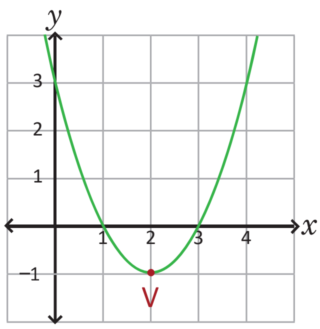
En el Problema inicial y Ejemplo de la clase anterior y la presente, se han tomado parábolas desplazadas a los cuatro cuadrantes del plano, y en los Problemas, algunas desplazadas sobre los ejes coordenados también.

Solución de problemas:

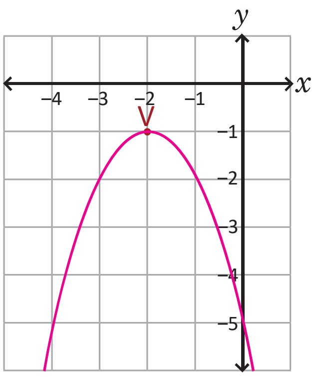
a) $y = x^2 + 2x + (1)^2 - (1)^2 + 2 = (x + 1)^2 + 1$



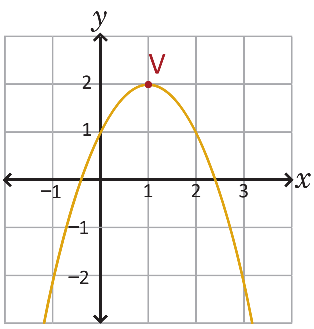
b) $y = x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2 + 3 = (x - 2)^2 - 1$



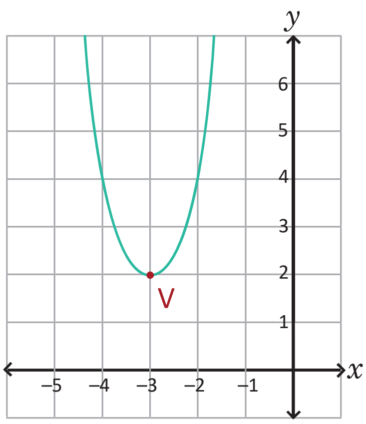
c) $y = -x^2 - 4x - (2)^2 + (2)^2 - 5 = -(x + 2)^2 - 1$



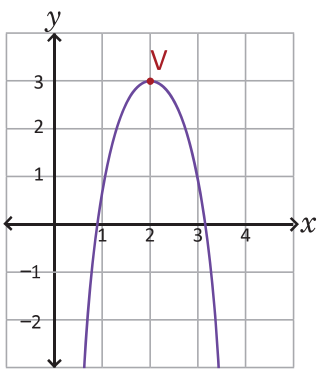
d) $y = -x^2 + 2x - (1)^2 + (1)^2 + 1 = -(x - 1)^2 + 2$



e) $y = 2[x^2 + 6x + (3)^2 - (3)^2] + 20 = 2(x + 3)^2 + 2$



f) $y = -2[x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2] - 5 = -2(x - 2)^2 + 3$



g) $y = -3[x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2] - 5 = -3(x - 1)^2 - 2$

h) $y = -3[x^2 + 2x + (1)^2 - (1)^2] - 6 = -3(x + 1)^2 - 3$

1.8 Líneas rectas y parábolas

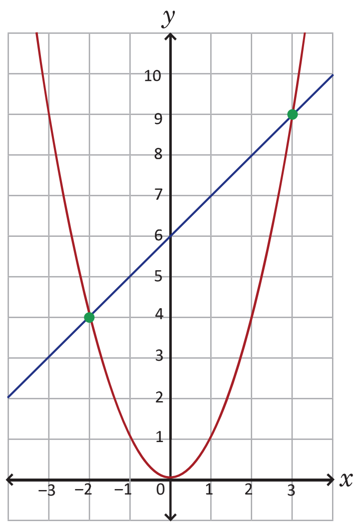
Problema inicial

Determina las coordenadas de los puntos de intersección entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 6$.

Solución

Si un punto está en la intersección de las dos gráficas, dicho punto debe cumplir tanto la ecuación de la recta como la ecuación de la parábola. Así, determinar los puntos de intersección equivale a encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 & \text{---------- (1)} \\ y = x + 6 & \text{---------- (2)} \end{cases}$$



Utilizando el método de sustitución y solucionando:

$$\begin{aligned} x^2 &= x + 6 && \text{igualando a cero,} \\ x^2 - x - 6 &= 0 && \text{factorizando,} \\ (x-3)(x+2) &= 0 && \text{solucionando la ecuación cuadrática,} \\ x = 3 &\text{ o } x = -2. \end{aligned}$$

Determinando el valor de y para cada valor de x:

Si $x = 3$, entonces: $y = 3 + 6 = 9$.

Si $x = -2$, entonces: $y = -2 + 6 = 4$.

Por lo tanto, los puntos de intersección son (3, 9) y (–2, 4).

Conclusión

Las coordenadas de los puntos de intersección entre una parábola y una línea recta, corresponden a las soluciones del sistema formado por sus ecuaciones.

Al resolver el sistema pueden tenerse 3 casos:

1. La recta corta a la parábola en 2 puntos diferentes (es secante).
2. La recta corta a la parábola en 1 punto (es tangente o vertical).
3. La recta no corta a la parábola.

Problemas

Determina los puntos de intersección entre la parábola y la línea recta de cada literal. Realiza la gráfica en el plano cartesiano.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 5x - 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x - 1 \end{cases}$

Indicador de logro

1.8 Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección entre la ecuación de una línea recta y una parábola utilizando sus ecuaciones.

Secuencia

Una vez estudiadas las ecuaciones de la parábola se pueden utilizar para encontrar intersecciones con otras figuras geométricas como las líneas rectas.

Propósito

Aplicar los conocimientos sobre ecuaciones cuadráticas, en especial el análisis del discriminante para determinar la cantidad de intersecciones que hay entre una recta y una parábola.

Solución de problemas:

a) $x^2 = 3x$

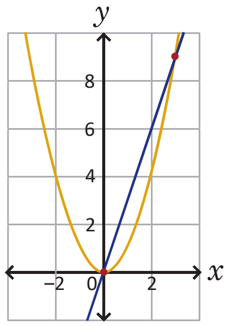
$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x = 0$ o $x = 3$

$y = 3(0) = 0$ o $y = 3(3) = 9$

Los puntos de intersección son (0, 0) y (3, 9).



b) $x^2 = 2x + 3$

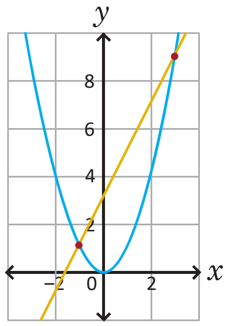
$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1$ o $x = 3$

$y = (-1)^2 = 1$ o $y = 3^2 = 9$

Los puntos de intersección son (–1, 1) y (3, 9).



c) $x^2 - 1 = x + 1$

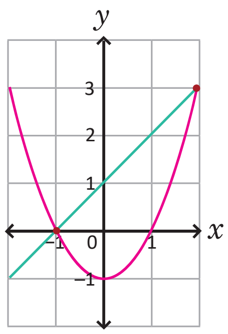
$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2$ o $x = -1$

$y = 2 + 1 = 3$ o $y = -1 + 1 = 0$

Los puntos de intersección son (2, 3) y (–1, 0).



d) $x^2 + 2x = -x - 2$

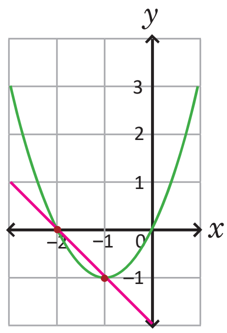
$x^2 + 3x + 2 = 0$

$(x + 2)(x + 1) = 0$

$x = -2$ o $x = -1$

$y = -(-2) - 2 = 0$ o $y = -(-1) - 2 = -1$

Los puntos de intersección son (–2, 0) y (–1, –1).



e) $x^2 + 2 = 5x - 4$

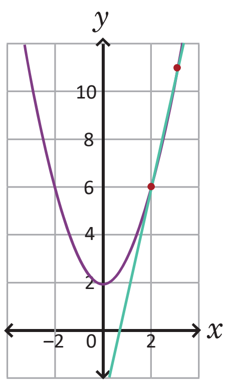
$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 2)(x - 3) = 0$

$x = 2$ o $x = 3$

$y = 5(2) - 4 = 6$ o $y = 5(3) - 4 = 11$

Los puntos de intersección son (2, 6) y (3, 11).



f) $x^2 = 1$

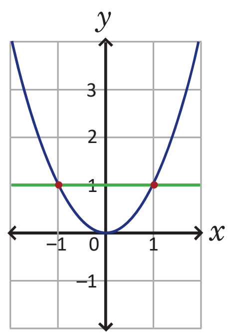
$x^2 - 1 = 0$

$(x - 1)(x + 1) = 0$

$x = 1$ o $x = -1$

$y = 1$

Los puntos de intersección son (1, 1) y (–1, 1).



g) $x^2 = 2x - 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$

$x = 1 \quad y = 1^2 = 1$

El único punto de intersección es (1, 1), la recta es tangente a la parábola.

h) $x^2 = x - 1$

$x^2 - x + 1 = 0$

No tiene solución en los números reales, entonces la recta y la parábola no se cortan en algún punto.

Recomendar a los estudiantes sustituir los valores encontrados para x en la ecuación que resulte más fácil para encontrar el valor de y.

Lección 1

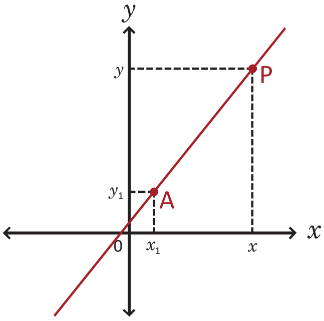
2.2 Ecuación de una recta: forma punto – pendiente*

Problema inicial

Demuestra que la ecuación de la recta l que pasa por un punto A(x_1, y_1) y tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Solución



Sea P(x, y) un punto cualquiera sobre la recta l diferente del punto A(x_1, y_1).
Por definición de línea recta, m es constante; entonces:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Luego,

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta l es: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Definición

La ecuación de una recta l con pendiente conocida m y un punto A(x_1, y_1) perteneciente a la recta es:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

A esta ecuación se le llama **forma punto – pendiente de la ecuación de la recta**; al despejar la variable y en lo anterior se obtiene:

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

donde el coeficiente de la variable x es la pendiente de la recta y el valor de $-mx_1 + y_1$ es constante. Para graficar la recta l conociendo el punto A(x_1, y_1) sobre ella y su ecuación punto – pendiente se hace lo siguiente:

1. Sustituir un valor particular para x y encontrar el correspondiente valor en y.
2. Colocar sobre el plano cartesiano los puntos A(x_1, y_1) y el punto obtenido en el numeral 1; luego trazar la recta que pasa por ambos puntos.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta l cuya pendiente es $m = \frac{1}{2}$ y pasa por el punto A(–3, 2).

Se sustituyen los valores de m y (x_1, y_1) en la forma punto – pendiente:

$$y - 2 = \frac{1}{2}[x - (-3)]$$

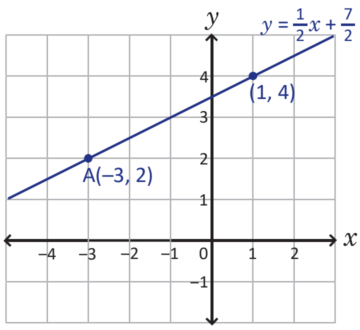
$$y = \frac{1}{2}(x + 3) + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Para graficar la recta, se sustituye un valor particular para x en la ecuación anterior, por ejemplo $x = 1$, y se encuentra su correspondiente valor y:

$$y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

Se colocan los puntos A(–3, 2) y (1, 4) en el plano y se traza la recta que pasa por ambos puntos, como muestra la figura de la derecha.



Problemas

Encuentra la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por A; grafica la recta para cada caso:

a) Pendiente $m = 2$ y A(6, 7)

b) Pendiente $m = 1$ y A(–1, 0)

c) Pendiente $m = -1$ y A(–2, 6)

d) Pendiente $m = \frac{1}{2}$ y A(1, 8)

Indicador de logro

1.9 Determina el valor de un parámetro para que una línea recta sea tangente a una parábola.

Secuencia

Ahora que se conocen las posiciones relativas de una recta y una parábola, se puede estudiar la forma de establecer el valor de un parámetro de modo que se cumpla la condición de tangencia entre una recta y una parábola.

Propósito

En la Solución se espera que los estudiantes apliquen el análisis del discriminante y lo relacionen geométricamente con las posiciones relativas entre una recta y una parábola; también es válido analizar el problema completando cuadrados.

Solución de problemas:

a)
$$x^2 = 6x - p$$
$$x^2 - 6x + p = 0$$

Completando cuadrados.

$$p = \left(\frac{6}{2}\right)^2$$
$$p = 9$$

Discriminante igual a cero.

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-6)^2 - 4(1)(p) = 0$$
$$36 - 4p = 0$$
$$p = 9$$

b)
$$x^2 - 2x + 1 = 2x + p$$
$$x^2 - 4x + 1 - p = 0$$

Completando cuadrados.

$$1 - p = \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$p = 1 - 4$$
$$p = -3$$

Discriminante igual a cero.

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-4)^2 - 4(1)(1 - p) = 0$$
$$12 + 4p = 0$$
$$p = -3$$

c)
$$-x^2 - 3x = -x - p$$
$$x^2 + 2x - p = 0$$

$$-p = \left(\frac{2}{2}\right)^2$$
$$p = -1$$

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(2)^2 - 4(1)(-p) = 0$$
$$4p + 4 = 0$$
$$p = -1$$

d)
$$-x^2 - 3x - 5 = 3x + p$$
$$x^2 + 6x + 5 + p = 0$$

$$5 + p = \left(\frac{6}{2}\right)^2$$
$$p = 9 - 5$$
$$p = 4$$

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(6)^2 - 4(1)(5 + p) = 0$$
$$16 - 4p = 0$$
$$p = 4$$

e)
$$4x^2 = 4x - p$$
$$4x^2 - 4x + p = 0$$

$$\frac{p}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$p = 1$$

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-4)^2 - 4(4)(p) = 0$$
$$16 - 16p = 0$$
$$p = 1$$

f)
$$-3x^2 + 2x - 3 = -10x + p$$
$$3x^2 - 12x + 3 + p = 0$$

$$\frac{p + 3}{3} = \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$p = 12 - 3$$
$$p = 9$$

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-12)^2 - 4(3)(p + 3) = 0$$
$$108 - 12p = 0$$
$$p = 9$$

g)
$$x^2 = px - 4$$
$$x^2 - px + 4 = 0$$

$$4 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$$
$$p^2 = 16$$
$$p = \pm 4$$

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(p)^2 - 4(1)(4) = 0$$
$$p^2 = 16$$
$$p = \pm 4$$

h)
$$-x^2 = px + 16$$
$$x^2 + px + 16 = 0$$

$$16 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$$
$$p^2 = 64$$
$$p = \pm 8$$

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(p)^2 - 4(1)(16) = 0$$
$$p^2 = 64$$
$$p = \pm 8$$

No es necesario que el estudiante resuelva de las dos maneras, se colocan ambos procesos para facilitar la revisión de las respuestas.

1.10 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación y grafica la parábola con el foco y la directriz indicada en cada literal.

   a) F(0, –2), $y = 2$ b) $F\left(0, \frac{1}{12}\right)$, $y = -\frac{1}{12}$

2. Determina la ecuación de la parábola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, en cada literal.

   a) $y = 4x^2$, $h = -2$, $k = 4$ b) $y = -2x^2$, $h = -3$, $k = -3$

3. Completa cuadrados perfectos en las siguientes expresiones algebraicas.

   a) $x^2 - 10x$ b) $x^2 - 4x - 9$ c) $-3x^2 + 6x - 2$

4. Grafica las siguientes parábolas en el plano cartesiano.

   a) $y = -2x^2$ b) $y - 1 = -(x + 2)^2$ c) $2x^2 + 4x - y = 0$

5. Determina las coordenadas del vértice, el foco y la directriz de cada parábola.

   a) $y = \frac{1}{8}x^2$ b) $y + 3 = 2(x + 5)^2$ c) $3x^2 - 12x + 7 - y = 0$

6. Determina los puntos de intersección entre la parábola y la recta de cada literal. Grafica en el plano cartesiano.

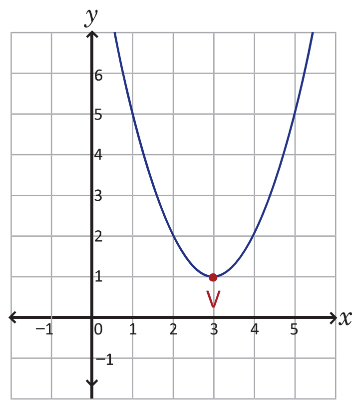
   a) $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \\ y = -3x - 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x^2 \\ x = -2 \end{cases}$

7. Determina el valor (o valores) del parámetro p en cada ecuación, para que la recta sea tangente a la parábola respectiva.

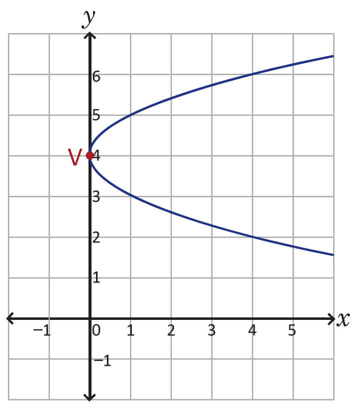
   a) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x + p \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -9x^2 - 6x - 2 \\ y = 6x + p \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = px - 1 \end{cases}$

8. Determina la ecuación que corresponde a la gráfica de cada literal.

   a)



   b)

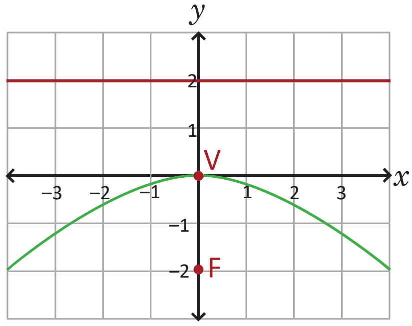


Indicador de logro

1.10 Resuelve problemas correspondientes a la parábola.

Solución de problemas:

1a) El valor $p = -2$, entonces la ecuación de la parábola es: $y = \frac{1}{4(-2)}x^2 = -\frac{1}{8}x^2$.



1b) El valor $p = \frac{1}{12}$, entonces $y = \frac{1}{4\left(\frac{1}{12}\right)}x^2 = \frac{1}{\frac{1}{3}}x^2 = 3x^2$.

2a) $y - 4 = 4(x - (-2))^2$, o bien $y = 4(x + 2)^2 + 4$.

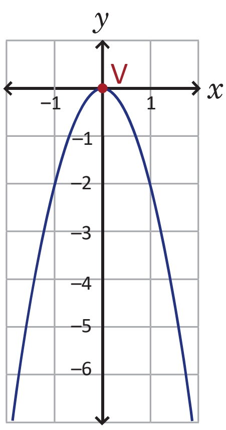
2b) $y - (-3) = -2(x - (-3))^2$, o bien $y = -2(x + 3)^2 - 3$.

3a) $x^2 - 10x + (5)^2 - (5)^2 = (x - 5)^2 - 25$

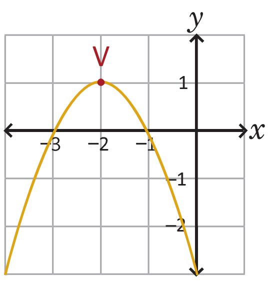
3b) $x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2 - 9 = (x - 2)^2 - 13$

3c) $-3x^2 + 6x - 2 = -3(x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2) - 2$
$= -3(x - 1)^2 + 3 - 2 = -3(x - 1)^2 + 1$

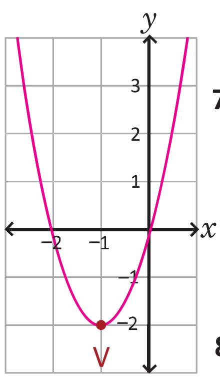
4a) $y = -2x^2$



4b) $y - 1 = -(x + 2)^2$



4c) $y = 2(x + 1)^2 - 2$



5a) $y = \frac{1}{8}x^2$: V (0, 0), $p = 2$, F(0, 2), $y = -2$.

5b) $y + 3 = 2(x + 5)^2$: V (−5, −3), $p = \frac{1}{8}$, F$\left(-5, -\frac{23}{8}\right)$, $y = -\frac{25}{8}$.

5c) $y = 3(x - 2)^2 - 5$: V (2, −5), $p = \frac{1}{12}$, F $\left(2, -\frac{59}{12}\right)$, $y = -\frac{61}{12}$.

6a)
$$-x^2 + 2 = 4x - 3$$
$$x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$(x - 1)(x + 5) = 0$$
$$x = 1 \text{ o } x = -5$$
$$y = 4(1) - 3 = 1 \text{ o } y = 4(-5) - 3 = -23$$

Los puntos de intersección son (1, 1) y (−5, −23).

6b) Los puntos de intersección son (−1, 0) y (−4, 9).

6c) Solamente hay un punto de intersección, el (−2, −4).

7a) $x^2 - 4x + 5 = 2x + p$
$x^2 - 6x + 5 - p = 0$

Completando cuadrados.

$$5 - p = \left(\frac{6}{2}\right)^2$$
$$p = 5 - 9$$
$$p = -4$$

Discriminante igual a cero.

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-6)^2 - 4(1)(5 - p) = 0$$
$$4p = -16$$
$$p = -4$$

7b)
$$-9x^2 - 6x - 2 = 6x + p$$
$$9x^2 + 12x + 2 + p = 0$$
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(12)^2 - 4(9)(2 + p) = 0$$
$$36p = 72$$
$$p = 2$$

7c) $p = \pm 4$

8a) Es la parábola $y = x^2$ desplazada 3 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba, por lo tanto, la ecuación es: $y - 1 = (x - 3)^2$.

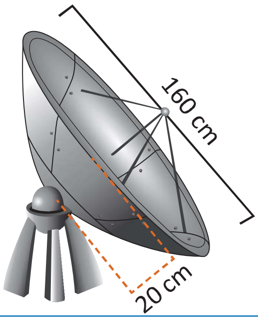
8b) Es la parábola $x = y^2$ desplazada 4 unidades hacia arriba, por lo tanto, la ecuación es: $x = (y - 4)^2$.

Lección 1

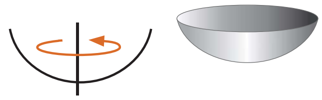
1.11 Aplicaciones de la parábola*

Problema inicial

Una antena parabólica de un canal de televisión de cultura de El Salvador tiene 160 centímetros de diámetro y una altura de 20 centímetros, si se desea reparar el foco de la antena que se dañó con la lluvia, ¿a qué distancia del centro del disco debe colocarse el nuevo foco de la antena parabólica?

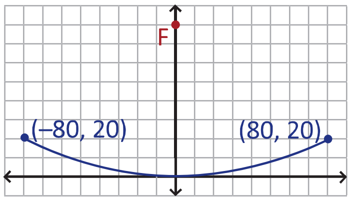


Una forma parabólica es un cuerpo geométrico, y resulta de girar una parábola alrededor de su eje.



Solución

Modelando la situación en el plano cartesiano, por conveniencia se puede utilizar una parábola de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$.



Entonces, como la parábola tiene ancho de 160 cm, se puede considerar la distancia desde el punto –80 hasta el punto 80 sobre el eje x.

Y dado que la altura es 20 cm, se puede considerar la distancia desde el punto 0 hasta el punto 20 sobre el eje y.

Entonces, la ecuación de la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ y pasa por los puntos (–80, 20) y (80, 20).

Para determinar p, se puede sustituir el punto (80, 20) en la ecuación, así:

$$20 = \frac{1}{4p}80^2 \quad \text{Resolviendo la ecuación.}$$

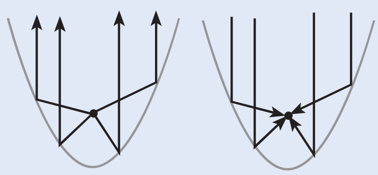
$$p = \frac{80^2}{80} = 80$$

Luego, las coordenadas del foco son F(0, 80).

Por lo tanto, el nuevo foco de la antena parabólica debe estar a 80 cm de distancia del vértice.

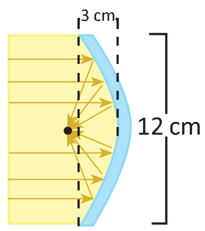
Conclusión

En una parábola, el foco cumple una propiedad reflectora importante: tomando cualquier línea desde el foco, esta será reflejada en una misma dirección, y también al recibir una línea paralela al eje, esta será reflejada hacia el foco. Esto vuelve a la parábola muy útil para su aplicación a objetos de la vida cotidiana, como la antena parabólica.



Problemas

1. Una antena parabólica que emite señal de internet tiene desperfectos, su foco no irradia correctamente la señal, al cambiarlo es necesario saber a qué distancia del centro del disco estaba. Determina dicha distancia si se sabe que el diámetro del disco es de 1 metro y su altura es de 0.5 metros.



2. Un espejo para un telescopio reflector tiene la forma parabólica de 12 cm de diámetro y 3 cm de profundidad, ¿a qué distancia del centro del espejo se concentrará la luz entrante?

Indicador de logro

1.11 Utiliza la propiedad reflectora del foco para resolver problemas de aplicación sobre objetos parabólicos.

Secuencia

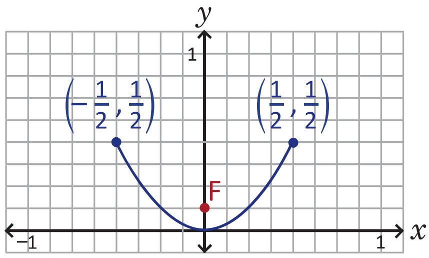
Después de abordar los conceptos básicos sobre la parábola, se pueden analizar y resolver algunos problemas sobre aplicaciones a la vida real, basados fundamentalmente en la propiedad reflectora de la parábola. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

En las soluciones a los Problemas, los estudiantes deben modelar una situación a partir de conceptos matemáticos, para resolverlos matemáticamente y luego interpretar la respuesta obtenida para dar solución al problema original.

Solución de problemas:

1. La parábola tiene ancho de 1 metro, se puede considerar la distancia desde el punto $-\frac{1}{2}$ hasta el punto $\frac{1}{2}$ sobre el eje x.



Y dado que la altura es 0.5 metros, se puede considerar la distancia desde el punto 0 hasta el punto $\frac{1}{2}$ sobre el eje y.

Entonces, la ecuación de la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ y pasa por los puntos $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Para determinar p, se puede sustituir el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en la ecuación, así:

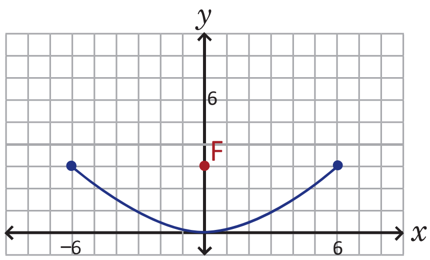
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4p}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{resolviendo la ecuación.}$$

$$p = \frac{2}{4(2^2)} = \frac{1}{8}$$

Luego, las coordenadas del foco son F$\left(0, \frac{1}{8}\right)$.

Por lo tanto, el nuevo foco de la antena parabólica debe estar a 12.5 cm de distancia del vértice.

2. Se puede considerar una parábola que tiene ancho de 12 cm, donde se considera la distancia desde el punto –6 hasta el punto 6 sobre el eje x, y la distancia del punto 0 al punto 3 sobre el eje y.



Entonces, la ecuación de la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ y pasa por los puntos (–6, 3) y (6, 3).

Para determinar p, se puede sustituir el punto (6, 3) en la ecuación, así:

$$3 = \frac{1}{4p}(6)^2 \quad \text{resolviendo la ecuación.}$$

$$p = \frac{36}{12} = 3$$

Luego, las coordenadas del foco son F (0, 3).

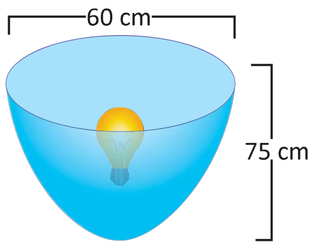
Por lo tanto, la luz se concentrará a 3 cm de distancia del vértice.

No es necesario obtener dos puntos por los que pasa la parábola, de hecho solamente se necesita uno, se colocan dos puntos para efectos de representar gráficamente el problema.

1.12 Practica lo aprendido

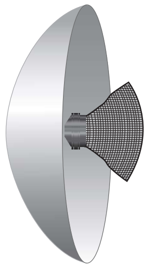
Resuelve los siguientes problemas de aplicación de parábola. Modela cada situación en el plano cartesiano.

1. En la escuela de María hay un problema de iluminación por las noches, y para mejorar la situación, María planea construir una lámpara parabólica móvil para el vigilante. Para ello cuenta con un recipiente parabólico de 60 centímetros de diámetro y 75 centímetros de altura. ¿A qué distancia del centro del disco debe colocar María el foco para que refleje la luz en una sola dirección?

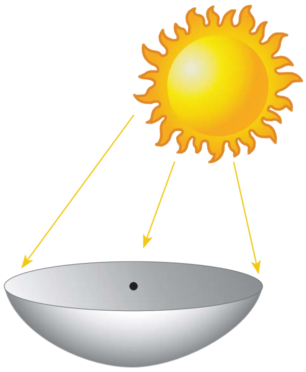


2. El reflector de un proyector tiene forma parabólica, con la fuente de luz en el foco. Si el reflector mide 12 centímetros de diámetro y 8 centímetros de profundidad, ¿a qué distancia del vértice está el foco?

3. En la comunidad de Antonio se quiere instalar un sistema de alarmas, en caso de cualquier emergencia. Antonio debe construir algunos parlantes parabólicos, si el recipiente parabólico tiene 24 cm de diámetro y 9 cm de profundidad, ¿dónde debe ser colocada la bocina para que emita el sonido en la misma dirección?



4. José va de viaje de campo con su familia al Parque Nacional Montecristo, ya que no desea contaminar, evita utilizar leña para cocinar, en cambio, lleva un recipiente parabólico de metal, de modo que refleje los rayos solares en un punto fijo (el foco). Determina a qué distancia del vértice del recipiente debe colocar José la parrilla para cocinar, si este tiene 1 metro de diámetro y 0.25 metros de altura.



5. Un plato receptor de sonido, que se emplea en eventos sobre la equidad de género, está construido en forma parabólica con su foco a 12 cm del vértice, si en uno de estos eventos se dañó el plato y en los repuestos tienen de todas alturas pero de anchura solo hay de 8 cm, ¿de qué altura debe ser el recipiente parabólico para que el plato receptor de sonido funcione idóneamente?

Indicador de logro

1.12 Resuelve problemas de aplicación de la parábola.

Solución de problemas:

1. Este problema es muy parecido a los resueltos en la clase anterior, la ecuación de la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ y pasa por los puntos (–30, 75) y (30, 75).

Para determinar p, se puede sustituir el punto (30, 75) en la ecuación, así:

$$75 = \frac{1}{4p}(30)^2 \text{ resolviendo la ecuación.}$$

$$p = \frac{30^2}{4(75)} = 3$$

Luego, las coordenadas del foco son F (0, 3).

Por lo tanto, el foco debe colocarse a 3 cm de distancia del vértice.

2. Considerando la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ que pasa por los puntos (–6, 8) y (6, 8).

Determinando p: $8 = \frac{1}{4p}(6)^2$, entonces, $p = \frac{6^2}{4(8)} = \frac{9}{8}$.

Por lo tanto, dicho foco debe estar a $\frac{9}{8}$ cm del vértice.

3. Considerando la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ que pasa por los puntos (–12, 9) y (12, 9).

Determinando p: $9 = \frac{1}{4p}(12)^2$; entonces, $p = \frac{12^2}{4(9)} = 4$.

Por lo tanto, dicho foco debe estar a 4 cm del vértice.

4. Considerando la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ que pasa por los puntos $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Determinando p: $\frac{1}{4} = \frac{1}{4p}\left(\frac{1}{2}\right)^2$, entonces, $p = \frac{4}{4(2^2)} = \frac{1}{4}$.

Por lo tanto, la parrilla debe colocarse justo encima del recipiente parabólico, es decir, a 0.25 cm del vértice.

5. Considerando la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$, puesto que este problema brinda la distancia del foco al vértice, se tiene el valor de p = 12, y se tiene el valor de x, el cual sería igual a la mitad de la anchura, es decir x = 4.

Para determinar la altura, basta con encontrar el valor de y:

$$y = \frac{1}{4p}x^2 = \frac{1}{4(12)}4^2 = \frac{4^2}{4(12)} = \frac{1}{3}$$

por lo tanto, la altura para que el plato receptor de sonido funcione idóneamente debe ser de aproximadamente $\frac{1}{3}$ cm.

En esta clase de aplicaciones de la parábola, los problemas se resuelven matemáticamente haciendo un procedimiento muy parecido, el enfoque principal es ver todas las posibles aplicaciones, más que la variación en el procedimiento. Únicamente el problema 5 varía un poco en su resolución, pues no se tienen las coordenadas de un punto, solamente el valor del parámetro y la coordenada en x.

2.1 La circunferencia

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al origen O(0, 0) es igual a 3.

Solución

Se identifican en particular los puntos A(3, 0), B(0, 3) que cumplen la condición.

Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.

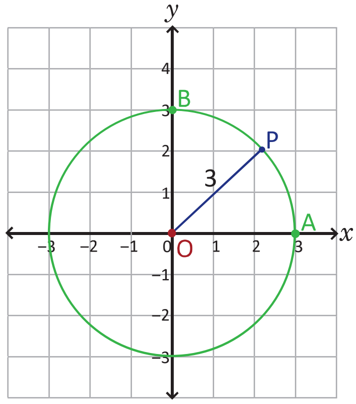
$$d(\text{P, O}) = 3$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Por lo tanto, la ecuación que determina el lugar geométrico es:

$$x^2 + y^2 = 3^2.$$



Definición

El lugar geométrico de los puntos cuya distancia r a un punto fijo llamado **centro** se mantiene constante se conoce como **circunferencia**.

La ecuación que determina la gráfica de una circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano y con radio r está dada por: $x^2 + y^2 = r^2$.

Ejemplo 1

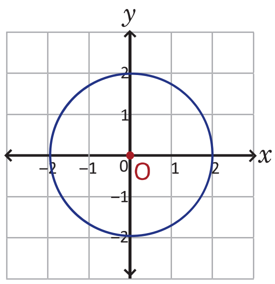
Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y de radio 4.

La ecuación es, $x^2 + y^2 = 4^2$ o bien, expresado de otra manera, $x^2 + y^2 = 16$.

Ejemplo 2

Grafica en el plano cartesiano la figura (o lugar geométrico) determinada por la ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Expresando la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ como $x^2 + y^2 = 2^2$, es una circunferencia con centro en el origen y radio 2.



Problemas

1. Deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el origen con el radio dado en cada literal.

   a) $r = 1$ b) $r = 6$ c) $r = \frac{1}{2}$ d) $r = \frac{1}{3}$ e) $r = \sqrt{5}$

2. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $x^2 + y^2 = 100$ c) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ d) $x^2 + y^2 = 3$

Indicador de logro

2.1 Deduce y grafica la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio dado.

Secuencia

Ahora que se ha visto la parábola, se continúa con la circunferencia; se da inicio con la parábola, pues para trabajar la ecuación general es la única en donde solo se completa cuadrados perfectos una vez, ahora en la circunferencia será necesario completar cuadrados tanto para x como para y.

Propósito

En el Problema inicial se pretende encontrar la ecuación canónica de una circunferencia particular y a partir de ella inducir que la ecuación canónica de la circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$, se prosigue de esta manera pues para la circunferencia es inmediato analizar que el valor constante de la ecuación cambia según el valor del radio.

Solución de problemas:

1a) $x^2 + y^2 = 1^2$ o bien $x^2 + y^2 = 1$.

1b) $x^2 + y^2 = 6^2$ o bien $x^2 + y^2 = 36$.

1c) $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ o bien $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

1d) $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ o bien $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$.

1e) $x^2 + y^2 = \sqrt{5}^2$ o bien $x^2 + y^2 = 5$.

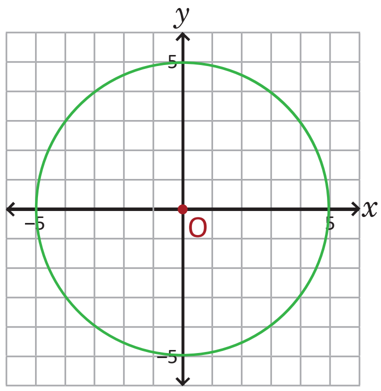
En 1c) y 1d) se pueden considerar válidas las ecuaciones $4x^2 + 4y^2 = 1$ y $9x^2 + 9y^2 = 1$, aunque no es muy habitual expresarlas de esa manera para el caso de la ecuación canónica de la circunferencia.

2a) Se calcula el valor de r:

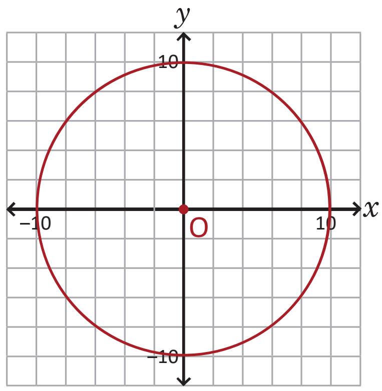
$$r = \sqrt{25} = 5.$$

Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio 5.

2b) $r = \sqrt{100} = 10$, es una circunferencia de centro (0, 0) y radio 10.

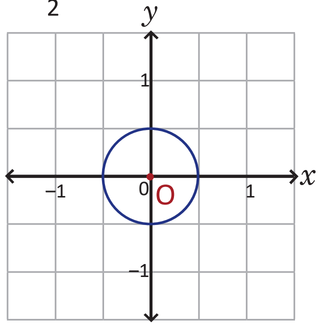


Si el espacio en la pizarra o el cuaderno es demasiado limitado, se puede optar por escalar el plano cartesiano según convenga de 2 en 2, 3 en 3, etc.

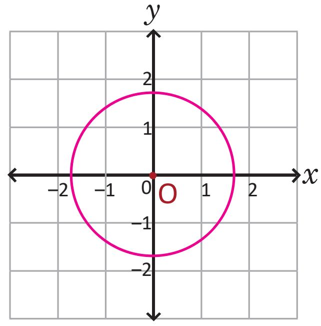


2c) $r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\frac{1}{2}$.

2d) $r = \sqrt{3}$, es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\sqrt{3}$.



La gráfica del problema 2d) es aproximada, por el valor irracional del radio.



2.2. Desplazamientos paralelos de la circunferencia*

Problema inicial

Deduce la ecuación de una circunferencia con centro en el punto C(2, 3) y radio 1.

Solución 1

Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre un punto P y el punto C(2, 3).

$$d(\text{P, C}) = 1$$

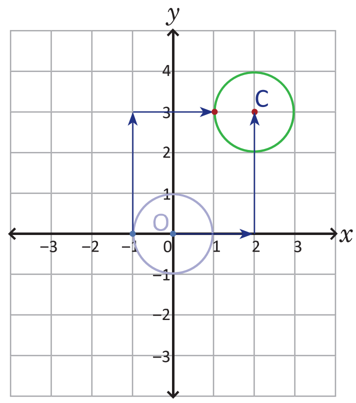
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 1 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1.$$

Solución 2

Tomando la ecuación de la circunferencia de radio 1, con centro en el origen, $x^2 + y^2 = 1$.

Entonces, la circunferencia de radio 1 y centro C(2, 3) resulta de desplazar la circunferencia con centro en el origen, 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba (como lo muestra la figura).



La ecuación de la circunferencia desplazada 2 unidades a la derecha es: $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Ahora, la ecuación de la circunferencia desplazada 3 unidades hacia arriba es: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C(2, 3) y radio 1 es: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Conclusión

La ecuación que determina la gráfica de una circunferencia con centro C(h, k) y radio r está dada por:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ejemplo 1

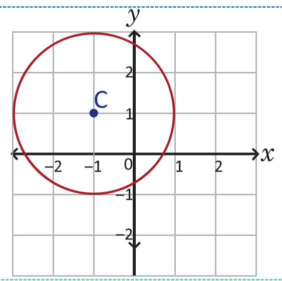
Determina la ecuación de la circunferencia con centro C(2, –1) y radio 2.

La ecuación es, $(x-2)^2 + [y-(-1)]^2 = 2^2$ o bien, expresado de otra manera, $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Ejemplo 2

Grafica en el plano cartesiano la figura (o lugar geométrico) determinado por la ecuación: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

Expresando la ecuación $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ como $[x-(-1)]^2 + (y-1)^2 = 2^2$, es una circunferencia con centro C(–1, 1) y radio 2.



Problemas

1. Para cada literal deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C y radio r.
   a) C(4, 1), $r = 3$ b) C(–2, 5), $r = 2$ c) C(3, –4), $r = \frac{2}{3}$ d) C(–2, –2), $r = \sqrt{6}$

2. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.
   a) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ b) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$ c) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = \frac{25}{4}$ d) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$

63

Unidad 3

Indicador de logro

2.2 Encuentra y grafica la ecuación de una circunferencia cuyo centro es un punto diferente del origen.

Secuencia

En esta clase será necesario aplicar lo aprendido en la lección anterior sobre desplazamientos paralelos, además de la ecuación de la circunferencia, vista en la clase anterior. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

La Solución del Problema inicial presenta dos opciones, puesto que el estudiante puede deducir la ecuación a partir del concepto de distancia, o bien utilizando desplazamientos paralelos, y ambas opciones son igualmente correctas.

Solución de problemas:

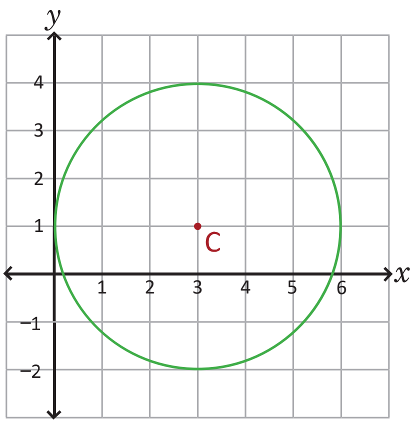
1a) $(x-4)^2+(y-1)^2=3^2$ o bien $(x-4)^2+(y-1)^2=9$.

1b) $(x+2)^2+(y-5)^2=2^2$ o bien $(x+2)^2+(y-5)^2=4$.

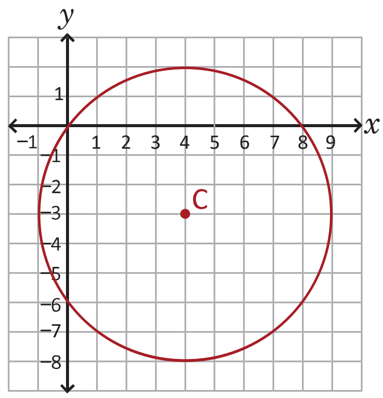
1c) $(x-3)^2+(y+4)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$ o bien $(x-3)^2+(y+4)^2=\frac{4}{9}$.

1d) $(x+2)^2+(y+2)^2=\sqrt{6}^{\,2}$ o bien $(x+2)^2+(y+2)^2=6$.

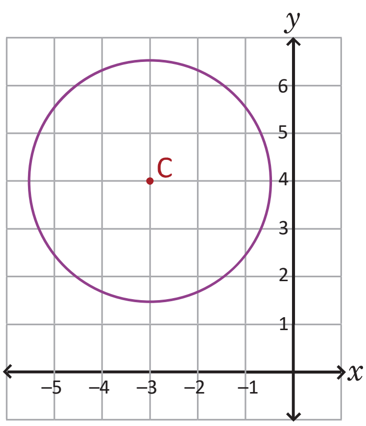
2a) Centro (3, 1) y radio 3.



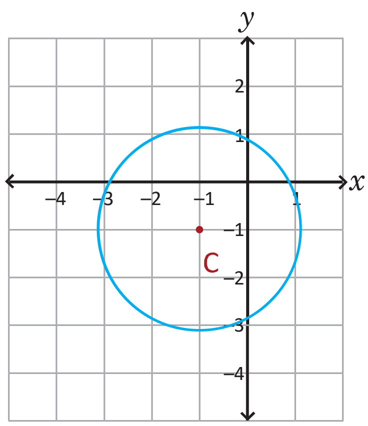
2b) Centro (4, –3) y radio 5.



2c) Centro (–3, 4) y radio $\frac{5}{2}$.



2d) Centro (–1, –1) y radio $\sqrt{5}$.



2.3 Ecuación general de la circunferencia

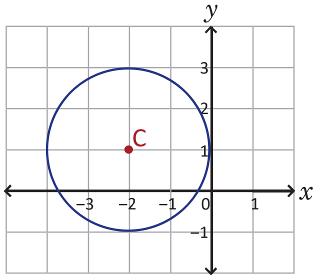
Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

Solución

Completando cuadrados para expresar la ecuación en la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 &= 0 && \text{reordenando y agrupando,} \\ (x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + 1 &= 0 && \text{completando cuadrados,} \\ (x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + 1 &= 0 && \text{simplificando,} \\ (x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 + 1 &= 0 && \text{transponiendo,} \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 &= 4 && \text{expresado de otra manera,} \\ (x - (-2))^2 + (y - 1)^2 &= 2^2. \end{aligned}$$



Por lo tanto la figura determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ es una circunferencia con centro C(–2, 1) y radio 2.

Conclusión

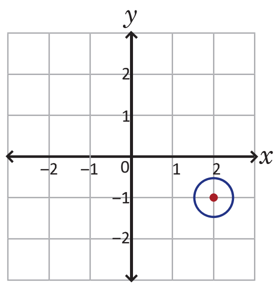
Una circunferencia puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y dejando la ecuación igualada a 0.

En general, para determinar el centro y el radio de una circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, se expresa en la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. A la ecuación de la forma $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$ se le llama **ecuación general de la circunferencia.**

Ejemplo

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 19 = 0$.

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 19 &= 0 && \text{dividiendo por 4 cada miembro,} \\ x^2 - 4x + y^2 + 2y + \frac{19}{4} &= 0 && \text{completando cuadrados,} \\ (x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 + \frac{19}{4} &= 0 && \text{simplificando y transponiendo,} \\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= \frac{1}{4} && \text{expresado de otra manera,} \\ (x - 2)^2 + (y - (-1))^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$



Es una circunferencia con centro C(2, –1) y radio $\frac{1}{2}$.

Problemas

En las siguientes ecuaciones, determina el centro y el radio de las circunferencias. Grafica en el plano cartesiano la figura que corresponde a cada ecuación.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$

f) $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$

g) $4x^2 + 4y^2 - 32x - 16y + 71 = 0$

h) $9x^2 + 9y^2 + 54x + 18y + 74 = 0$

Indicador de logro

2.3 Determina el centro y el radio de una circunferencia a partir de su ecuación general y traza su gráfica en el plano cartesiano.

Secuencia

Utilizando el procedimiento para completar cuadrados perfectos, es posible transformar la ecuación general de la circunferencia a la forma de la clase anterior, para luego graficarla en el plano cartesiano.

Propósito

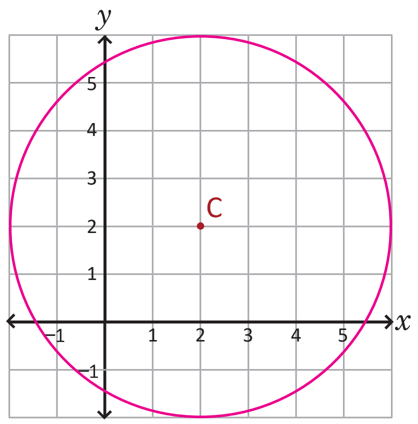
El criterio de dificultad de los Problemas está dado por el conjunto al que pertenece el radio de la circunferencia, si es entero o fracción, como también si el desplazamiento es al primer, segundo, tercer, cuarto cuadrante o un eje coordenado.

Solución de problemas:

a) $(x^2 - 4x + 2^2) + (y^2 - 4y + 2^2) = 8 + 2^2 + 2^2$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

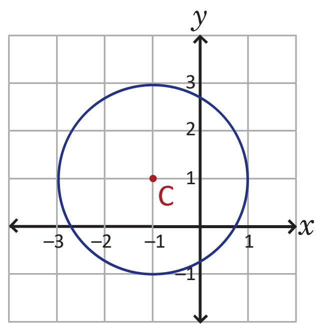
Centro (2, 2) y radio 4.



b) $(x^2 + 2x + 1^2) + (y^2 - 2y + 1^2) = 2 + 1^2 + 1^2$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

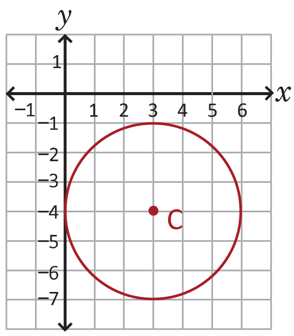
Centro (–1, 1) y radio 2.



c) $(x^2 - 6x + 3^2) + (y^2 + 8y + 4^2) = -16 + 3^2 + 4^2$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$$

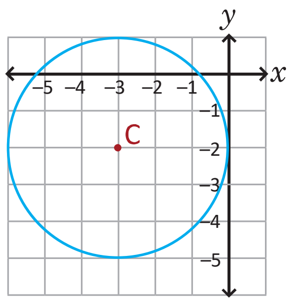
Centro (3, –4) y radio 3.



d) $(x^2 + 6x + 3^2) + (y^2 + 4y + 2^2) = -4 + 3^2 + 2^2$

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

Centro (–3, –2) y radio 3.



No se consideran problemas con desplazamientos fraccionarios, puesto que es muy complicado el proceso para completar cuadrados, y no es el objetivo de la clase. En los últimos problemas es necesario hacer la gráfica, no se muestra en esta página por cuestión de espacio.

e) $x^2 + (y^2 - 10y + 5^2) = -9 + 5^2$

$(x - 0)^2 + (y - 5)^2 = 16$

Centro (0, 5) y radio 4.

f) $(x^2 + 6x + 3^2) + y^2 = -8 + 3^2$

$(x + 3)^2 + (y - 0)^2 = 1$

Centro (–3, 0) y radio 1.

g) $4(x^2 - 8x + 4^2) + 4(y^2 - 4y + 2^2) = -71 + 4(4^2) + 4(2^2)$

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{4}$$

Centro (4, 2) y radio $\frac{3}{2}$.

h) $9(x^2 + 6x + 3^2) + 9(y^2 + 2y + 1^2) = -74 + 9(3^2) + 9(1^2)$

$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = \frac{16}{9}$$

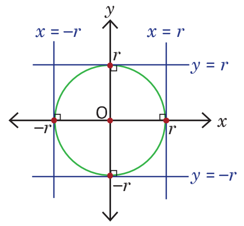
Centro (–3, –1) y radio $\frac{4}{3}$.

2.4 Recta tangente a una circunferencia*

Problema inicial

Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto P(x_1, y_1) está dada por: $x_1 x + y_1 y = r^2$.

Solución

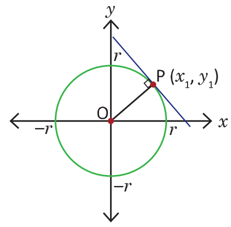


El punto P(x_1 , y_1) satisface la ecuación $x_1{}^2 + y_1{}^2 = r^2$.

Si $x_1 = 0$, entonces $y_1 = r$ o $y_1 = -r$. La recta tangente es: $y = r$ o $y = -r$ y se cumple que: $y_1 y = r^2$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente está dada por: $x_1x + y_1y = r^2$.

Si $y_1 = 0$, se procede análogamente.



Si $x_1 \neq 0$ y $y_1 \neq 0$, el radio $\overline{\text{OP}}$ es perpendicular a la tangente en el punto P, además la pendiente de $\overline{\text{OP}}$ es $\frac{y_1}{x_1}$, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es: $m = -\frac{x_1}{y_1}$.

Aplicando la ecuación punto-pendiente con m y P:

$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$ multiplicando por y_1 y simplificando: $x_1x + y_1y = x_1{}^2 + y_1{}^2 = r^2$.

Por lo tanto, la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto P(x_1, y_1) está dada por la ecuación:

$$x_1x + y_1y = r^2$$

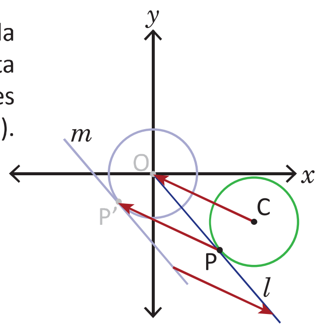
Conclusión

La ecuación de la tangente en el punto (x_1, y_1) de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ es $x_1x + y_1y = r^2$. Por ejemplo, para determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ en el punto P(–1, 1), se puede hacer de la siguiente manera:

$$-1x + 1y = 2, \text{ o bien } x - y + 2 = 0.$$

Ejemplo

Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ en el punto P(2, –4).



La circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ desplazada 4 unidades a la derecha y 3 hacia abajo, entonces se puede calcular la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ pero en el punto P desplazado 4 unidades a la izquierda y 3 hacia arriba, es decir, en el punto P'(2 – 4, –4 + 3) = P'(–2, –1).

Ahora aplicando el resultado del Problema inicial, la recta tangente m será:

$$-2x + (-1)y = 5, \text{ o bien } 2x + y + 5 = 0.$$

Y desplazando la recta 4 unidades a la derecha y 3 hacia abajo:

$$2(x - 4) + (y + 3) + 5 = 0, \text{ o bien } 2x + y = 0.$$

Por lo tanto, la recta tangente l a la circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ en el punto P(2, –4) es: $2x + y = 0$.

Problemas

Para cada literal determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P.

a) $x^2 + y^2 = 25$, P(–3, 4)

b) $x^2 + y^2 = 5$, P(1, 2)

c) $x^2 + y^2 = 13$, P(2, –3)

d) $x^2 + y^2 = 10$, P(3, –1)

e) $x^2 + y^2 = 1$, P(–1, 0)

f) $x^2 + y^2 = 9$, P(0, –3)

g) $x^2 + (y - 4)^2 = 2$, P(–1, 3)

h) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$, P(–1, –1)

i) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$, P(3, 1)

Indicador de logro

2.4 Deduce la ecuación de la línea recta tangente a una circunferencia en un punto dado.

Secuencia

Una vez abarcados los conceptos básicos sobre circunferencia, se puede abordar lo correspondiente a las rectas tangentes a una circunferencia; esta clase es una demostración un poco compleja, y por ello tiene asterisco, por lo cual necesitará mayor apoyo por parte del docente.

Propósito

Esta clase provee un resultado muy práctico (más fácil que el método utilizado para la clase 1.9) para deducir la ecuación de la recta tangente a una circunferencia, lo cual puede resultar muy útil dado que las rectas tangentes a una circunferencia poseen gran interés y son muy importantes.

Posibles dificultades

En la demostración, la idea es considerar dos casos: uno, cuando alguna de las coordenadas del punto de tangencia es cero, en donde se sabe que el radio puede ser vertical u horizontal, y puesto que de séptimo grado se conoce que la recta tangente es perpendicular en el punto de tangencia, las rectas deben ser horizontales o verticales, como se muestra en la primera figura de la página; en el segundo caso se puede aplicar la ecuación de la línea recta y analizar las condiciones de perpendicularidad vistas en la unidad 2 de este grado. Comprender esta temática puede resultar muy difícil para los estudiantes, aunque el indicador de logro está basado únicamente en aplicar el resultado a casos pariculares.

Solución de problemas:

a) Se verifica que el punto pertenece a la circunferencia: $(-3)^2 + 4^2 = 25$.
Entonces la ecuación de la recta tangente en el punto P sería:
$$-3x + 4y = 25 \text{ o bien } 3x - 4y + 25 = 0.$$

b) Se verifica que el punto pertenece a la circunferencia: $1^2 + 2^2 = 5$.
Entonces la ecuación de la recta tangente en el punto P sería:
$$1x + 2y = 5 \text{ o bien } x + 2y - 5 = 0.$$

c) $2x + (-3)y = 13$ o bien $2x - 3y - 13 = 0$.

d) $3x + (-1)y = 10$ o bien $3x - y - 10 = 0$.

e) $(-1)x + (0)y = 1$ o bien $x = -1$.

f) $(0)x + (-3)y = 9$ o bien $y = -3$.

g) Se verifica que el punto pertenece a la circunferencia: $(-1)^2 + (3 - 4)^2 = 2$.

Se traslada la circunferencia al origen y se desplaza el punto P 4 unidades hacia abajo.

$x^2 + y^2 = 2$, P'$(-1, 3 - 4)$ = P'$(-1, -1)$

La recta tangente en P' sería: $(-1)x + (-1)y = 2$.

Y se desplaza a su lugar original (4 unidades hacia arriba): $-x - (y - 4) = 2$ o bien $x + y - 2 = 0$.

En todos los problemas siempre es necesario verificar que el punto pertenece a la circunferencia, también hay que intentar que los estudiantes comprendan cómo se desplaza y cuál debe ser el desplazamiento del punto de tangencia.

h) La circunferencia y punto desplazados son:

$x^2 + y^2 = 4$, P'$(-1 + 3, -1 + 1)$ = P'$(2, 0)$,

la recta tangente sería: $2x + (0)y = 4$, o bien $x = 2$.

La recta tangente en su lugar original es:
$(x + 3) = 2$ o bien $x = -1$.

i) La circunferencia y punto desplazados son:

$x^2 + y^2 = 17$, P'$(3 - 2, 1 + 3)$ = P'$(1, 4)$,

la recta tangente sería: $1x + 4y = 17$.

La recta tangente en su lugar original es:
$(x - 2) + 4(y + 3) = 17$ o bien $x + 4y - 7 = 0$.

Lección 2

2.5 Rectas secantes a una circunferencia

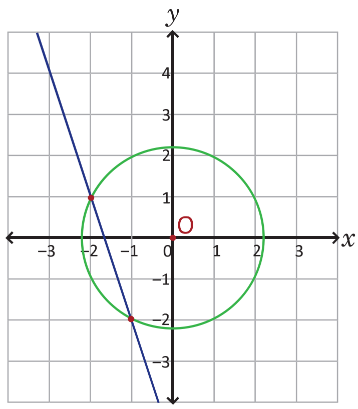
Problema inicial

Determina los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ con la recta $3x + y + 5 = 0$.

Solución

La intersección es un punto que está en la recta y también en la circunferencia, entonces encontrar los puntos de intersección entre una circunferencia y una recta equivale a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \text{----------} \ (1) \\ 3x + y + 5 = 0 & \text{----------} \ (2) \end{cases}$$



Utilizando el método de sustitución, despejando y en la ecuación (2).

$$y = -3x - 5$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y resolviendo:

$$x^2 + (-3x - 5)^2 = 5$$
$$x^2 + 9x^2 + 30x + 25 - 5 = 0$$
$$10x^2 + 30x + 20 = 0$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x + 1)(x + 2) = 0$$
$$x = -1 \ \text{ o } \ x = -2$$

Entonces las coordenadas en x de los puntos donde se intersecan la recta $y + 3x + 5 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ son $x = -1$ y $x = -2$, y la coordenada en y puede determinarse sustituyendo cada valor de x en la ecuación (2):

$$\text{Si } x = -1, \text{ entonces } y = -3(-1) - 5 = 3 - 5 = -2$$
$$\text{Si } x = -2, \text{ entonces } y = -3(-2) - 5 = 6 - 5 = 1$$

Por lo tanto, los puntos de intersección son: $(-1, -2)$ y $(-2, 1)$.

Conclusión

Para determinar los puntos de intersección entre una recta y una circunferencia, se resuelve el sistema de ecuaciones, una lineal y otra cuadrática, utilizando el método de sustitución.

Si el sistema tiene dos soluciones reales, significa que la recta es secante a la circunferencia.
Si el sistema tiene una solución real, la recta es tangente a la circunferencia.
Si el sistema no tiene solución real, significa que la recta no corta a la circunferencia.

El valor de y de los puntos (o punto) de intersección se determinan sustituyendo en alguna ecuación los valores de las soluciones al sistema de ecuaciones que se resuelve.

Problemas

Determina los puntos de intersección de las gráficas determinadas por las ecuaciones de cada literal.

a) $x^2 + y^2 = 1$; $x + y = 0$

b) $x^2 + y^2 = 25$; $x + y - 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 = 5$; $-x + y + 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 = 13$; $x + 5y - 13 = 0$

e) $x^2 + y^2 = 10$; $x - 2y - 5 = 0$

f) $x^2 + y^2 = 17$; $3x + 5y - 17 = 0$

Indicador de logro

2.5 Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de una recta y una circunferencia.

Secuencia

Ahora que ya se ha estudiado la tangencia se puede realizar una interpretación de la resolución de sistemas de una ecuación cuadrática y una lineal, estudiando los puntos de intersección de una recta secante y una circunferencia.

Propósito

El propósito de la sección de Problemas es que el estudiante se enfrente a los tres diferentes casos que se presentan en la Conclusión, intentando ir de lo más fácil a lo más complejo. En el Problema inicial se plantea el problema geométrico a resolver.

Solución de problemas:

a) Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{----- (1)} \\ x + y = 0 & \text{----- (2)} \end{cases}$$

Despejando y de (2) y sustituyendo en (1):

$$x^2 + (-x)^2 = 1$$
$$2x^2 = 1$$
$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sustituyendo x en (2) y encontrando y:

Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, si $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Por lo tanto, los puntos de intersección son:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{y} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

b) Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & \text{----- (1)} \\ x + y - 1 = 0 & \text{----- (2)} \end{cases}$$

Despejando y de (2) y sustituyendo en (1):

$$x^2 + (1 - x)^2 = 25$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$x = 4 \text{ o } x = -3$$

Sustituyendo x de (2) y encontrando y:

Si $x = 4$, $y = -3$, si $x = -3$, $y = 4$.

Por lo tanto, los puntos de intersección son:

(4, –3) y (–3, 4).

c) El sistema es: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \text{----- (1)} \\ -x + y + 1 = 0 & \text{--- (2)} \end{cases}$

La ecuación cuadrática que se resuelve es:

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Los puntos de intersección son: (2, 1) y (–1, –2).

d) El sistema es: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 & \text{----- (1)} \\ x + 5y - 13 = 0 & \text{-- (2)} \end{cases}$

La ecuación cuadrática que se resuelve es:

$$y^2 - 5y + 6 = 0.$$

Los puntos de intersección son: (–2, 3) y (3, 2).

e) El sistema es: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & \text{----- (1)} \\ x - 2y - 5 = 0 & \text{--- (2)} \end{cases}$

La ecuación cuadrática que se resuelve es:

$$y^2 + 4y + 3 = 0.$$

Los puntos de intersección son: (–1, –3) y (3, –1).

f) El sistema es: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 & \text{----- (1)} \\ 3x + 5y - 17 = 0 & \text{----- (2)} \end{cases}$

La ecuación cuadrática que se resuelve es:

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Los puntos de intersección son: (4, 1) y (–1, 4).

En a), b) y c) se puede sustituir cualquier variable, y la dificultad es muy parecida en cualquier caso; en d) y e) se recomienda despejar la variable x, pues se hace más sencillo el cálculo, e intentar que los estudiantes identifiquen eso; y en f) se puede despejar cualquiera de las variables, sin embargo en cualquiera de los casos la resolución es un poco más compleja que en los literales anteriores.

2.6 Practica lo aprendido

1. Para cada literal deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y el radio indicado.

   a) $r = 2$ b) $r = \sqrt{7}$

2. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2 + y^2 = 16$ b) $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

3. Deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C y el radio r de cada literal.

   a) C $(3, -2)$, $r = 10$ b) C $(4, -3)$, $r = \frac{2}{3}$

4. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

   a) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ b) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{4}$

5. En las siguientes ecuaciones, determina el centro y el radio de las circunferencias. Grafica en el plano cartesiano la figura que corresponde a cada ecuación.

   a) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$ b) $4x^2 + 4y^2 + 24x + 16y + 27 = 0$

6. Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P de cada literal.

   a) $x^2 + y^2 = 10$, P$(-3, 1)$ b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$, P$(0, -4)$

7. Determina los puntos de intersección de las gráficas determinadas por las ecuaciones de cada literal.

   a) $x^2 + y^2 = 8$; $x - y = 0$ b) $x^2 + y^2 = 20$; $3x - y - 10 = 0$

8. Determina la ecuación de la recta (o rectas) tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 10$ cuya pendiente es -3.

9. Determina la ecuación de la recta (o rectas) tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ que pasan por el punto P$(2, 0)$.

   Puedes graficar para comprender mejor la situación.

10. Demuestra que la tangente en el punto P(x_1, y_1) de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es: $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$.

Indicador de logro

2.6 Resuelve problemas correspondientes a la circunferencia.

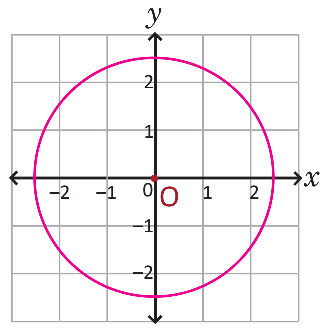
Solución de problemas:

1a) $x^2 + y^2 = 2^2$ o bien $x^2 + y^2 = 4$.

1b) $x^2 + y^2 = \sqrt{7}^2$ o bien $x^2 + y^2 = 7$.

2a) Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio 4.

2b) Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\frac{5}{2}$.



3a) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 100$

3b) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = \frac{4}{9}$

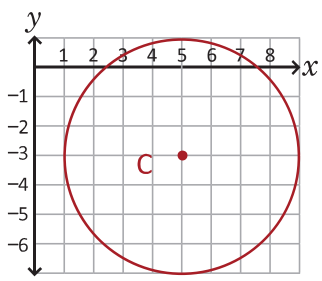
4a) Centro (–2, 3) y radio 3.

4b) Centro (–1, –2) y radio $\frac{3}{2}$.

5a) $(x^2 - 10x + 5^2) + (y^2 + 6y + 3^2) = -18 + 5^2 + 3^2$

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Centro (5, –3) y radio 4.



5b) $4(x^2 + 6x + 3^2) + 4(y^2 + 4y + 2^2) = -27 + 4(3^2) + 4(2^2)$

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{25}{4}$$

Centro (–3, –2) y radio $\frac{5}{2}$.

6a) $(-3)x + 1y = 10$, o bien $-3x + y - 10 = 0$.

6b) La circunferencia y punto desplazados son:

$x^2 + y^2 = 5$, P'(0 – 2, –4 + 3) = P'(–2, –1).

La recta tangente sería: $-2x - y = 5$.

La recta tangente en su lugar original es:
$-2(x - 2) - (y + 3) = 5$ o bien $2x + y + 4 = 0$.

7a) El sistema es: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 & \text{----- (1)} \\ x - y = 0 & \text{----- (2)} \end{cases}$

La ecuación cuadrática que se resuelve es:

$$x^2 = 4.$$

Los puntos de intersección son: (2, 2) y (–2, –2).

7b) El sistema es: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 & \text{----- (1)} \\ 3x - y - 10 = 0 & \text{-----(2)} \end{cases}$

La ecuación cuadrática que se resuelve es:

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Los puntos de intersección son: (4, 2) y (2, –4).

8. Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & \text{----- (1)} \\ y = -3x + b & \text{----- (2)} \end{cases}$$

Igualando el discriminante de la ecuación $10x^2 - 6bx + (b^2 - 10)$ a 0, se obtiene la ecuación: $b^2 = 100$, con soluciones $b = \pm 10$.

Las rectas son $y = -3x + 10$ y $y = -3x - 10$.

9. Se considera la ecuación de una recta $y = mx + b$.

Al pasar por (2, 0) se cumple que $0 = 2m + b$.

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & \text{----- (1)} \\ y = mx - 2m & \text{----- (2)} \end{cases}$$

Igualando el discriminante de

$$(m^2 + 1)x^2 - 4m^2x + (4m^2 - 2)$$

a 0, se obtiene la ecuación: $m^2 = 1$, con soluciones $m = \pm 1$. Las rectas son $y = x - 2$ y $y = -x + 2$.

10. Trasladando el centro de la circunferencia al origen y trasladando el punto P, $-h$ unidades horizontalmente y $-k$ verticalmente, se tendría:

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ P}'(x_1 - h, y_1 - k).$$

Cuya ecuación de la recta tangente en P sería:

$$(x_1 - h)x + (y_1 - k)y = r^2.$$

Y trasladando a la posición original:

$$(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2.$$

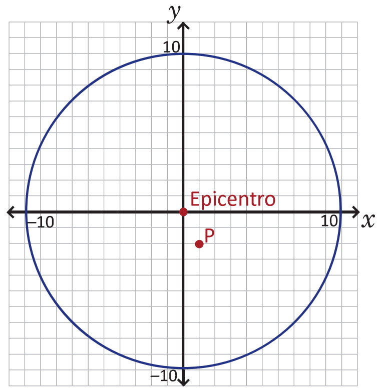
2.7 Aplicaciones de la circunferencia*

Problema inicial

El epicentro de un terremoto en El Salvador fue la ciudad de San Salvador, específicamente el parque Bicentenario de esta ciudad; el terremoto afectó a todos los lugares a 10 km a la redonda. Si la ciudad de Antiguo Cuscatlán se ubica a 1 km hacia el oriente y 2 km hacia el sur del epicentro, entonces ¿fue afectada por dicho terremoto?

Solución

Representando la situación en el plano cartesiano y ubicando el epicentro en el origen del plano cartesiano.



Dado que el terremoto tuvo un alcance de 10 km a la redonda, se puede modelar con la ecuación de la circunferencia con centro en el origen (epicentro) y radio 10, así:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Ubicando Antiguo Cuscatlán en el punto P(1, –2).

Con el gráfico se puede observar que si el punto está dentro de la circunferencia entonces es afectado por el terremoto, y si está fuera no.

Analizando en la ecuación, si se sustituye el valor de x y de y del punto P se tiene:

$$1^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$$

El resultado es menor que 100 ($5 < 100$), si el punto fuera igual a 100 estaría en la circunferencia, y si fuera mayor que 100 entonces estaría fuera de la circunferencia.

Por lo tanto, Antiguo Cuscatlán sí fue afectado por el terremoto con epicentro en el parque Bicentenario.

Conclusión

Es posible resolver algunos problemas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones de circunferencias, para ello es necesario modelar la situación en el plano cartesiano, a partir de ello se puede interpretar la información y dar solución a la situación.

Problemas

1. El epicentro de un terremoto en El Salvador fue la ciudad de San Salvador, específicamente el parque Bicentenario de esta ciudad; el terremoto afectó a todos los lugares a 10 km a la redonda. Si el volcán del Boquerón se ubica a 7 km hacia el poniente y 8 km hacia el norte del epicentro, entonces ¿fue afectado por dicho terremoto?

2. Una avioneta de fumigación vuela en círculos, y alcanza a fumigar hasta 13 m a la redonda, considerando como centro la casa de un campesino. El terreno tiene 30 metros de largo por 20 metros de ancho, y la casa del campesino se encuentra justo al centro del terreno. Determina si las plantaciones de frijol ubicadas a 11 metros al poniente de la casa y 5 metros al sur, llegan a ser fumigadas por la avioneta.

3. En las fiestas patronales de San Salvador se coloca el juego mecánico conocido como "la voladora". Si esta rueda apagada cubre un radio de 2 metros y los asientos cuelgan de cadenas de 1 metro de longitud, determina si al ubicar la caseta de control a un metro al oriente y 3 metros al sur del centro de "la voladora", dicha caseta no será impactada por la máquina al encenderse.

Indicador de logro

2.7 Utiliza las propiedades y la ecuación de la circunferencia para resolver problemas del entorno.

Secuencia

Después de abordar los conceptos básicos sobre la circunferencia, se pueden analizar y resolver algunos problemas sobre aplicaciones a la vida real. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

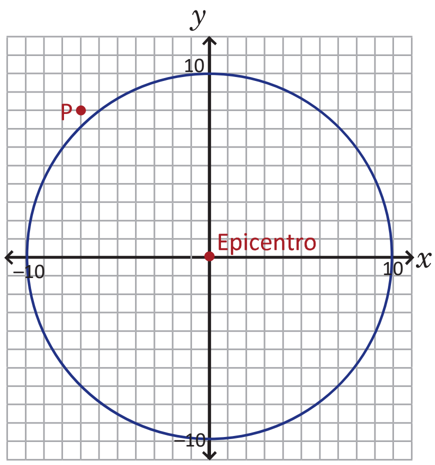
En las soluciones a los Problemas los estudiantes deben modelar una situación a partir de conceptos matemáticos, para resolverlos matemáticamente y luego interpretar la respuesta obtenida para dar solución al problema original.

Solución de problemas:

1. Representando la situación en el plano cartesiano y ubicando el epicentro en el origen del plano cartesiano, se puede modelar con la ecuación de la circunferencia con centro en el origen (epicentro) y radio 10, así:

$$x^2 + y^2 = 100.$$

Ubicando al volcán del Boquerón en el punto P(–7, 8).



Analizando en la ecuación, si se sustituye el valor de x y de y del punto P se tiene: $(-7)^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$.

El resultado es mayor que 100 ($113 > 100$), si el punto fuera igual a 100 estaría en la circunferencia, y si fuera menor que 100 entonces estaría dentro de ella, por lo tanto, el volcán del Boquerón no fue afectado por el terremoto con epicentro en la ciudad de San Salvador.

2. Se modela el alcance de la avioneta por la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 13^2$, y sustituyendo por el punto (–11, –5) en el que se ubican las plantas de frijol respecto de la casa del campesino, se obtiene que: $(-11)^2 + (-5)^2 = 121 + 25 = 146 < 169$, por lo tanto, las plantas de frijol son alcanzadas por la fumigación de la avioneta.

3. Puesto que la máquina tiene 2 metros de radio cuando está apagada, y encendida puede llegar un metro más lejos, es decir, puede llegar a cubrir un radio total de 3 metros, esta situación puede ser modelada por la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3^2$ y sustituyendo por el punto (1, –3) en el que se ubica la caseta de control respecto el centro de la máquina, se obtiene que $1^2 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10 > 9$, por lo tanto, la caseta está en una buena posición para no ser impactada por "la voladora".

Estos problemas también pueden ser resueltos utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos, sin embargo, es mejor intentar que los estudiantes los resuelvan utilizando conceptos sobre circunferencia.