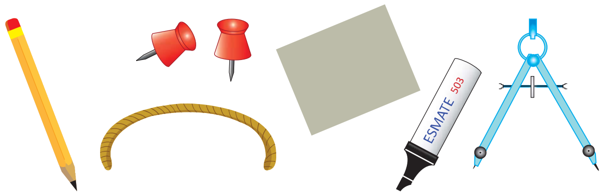
Lección 3 La elipse

3.1 Actividad introductoria

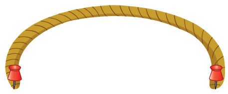
Materiales

- 2 tachuelas
- Trozo de cuerda
- Lapicero
- Hoja de papel vegetal
- Compás
- Plumón

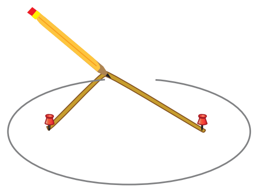


Actividad 1

1. Asegura los extremos de la cuerda con las tachuelas sobre una superficie adecuada.

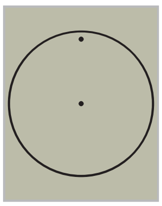


2. Toma la cuerda con la punta del lapicero hasta tensarla, desliza el lapicero manteniendo la cuerda tensada hasta llegar al punto donde iniciaste.

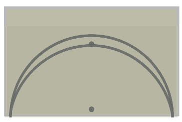


Actividad 2

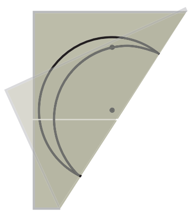
1. Dibuja una circunferencia lo más grande posible sobre el papel vegetal. Y coloca un punto adentro de dicha circunferencia.

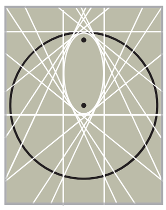


2. Dobla el papel de modo que el punto dibujado quede exactamente sobre un punto de la circunferencia.



3. Realiza el mismo proceso con puntos cercanos en la circunferencia hasta llegar al punto donde se inició. Analiza la figura formada.





Definición

La figura que queda marcada en ambas actividades es una **elipse**. Observa que cada punto de ella cumple la condición de que la suma de la distancia de un punto a dos puntos fijos se mantiene constante.

Preguntas

1. ¿Cuánto mide la suma de las distancias de un punto de la figura dibujada a cada tachuela?
2. ¿Cómo es la suma de la distancia de un punto a las dos tachuelas respecto de la longitud de la cuerda?
3. ¿Qué sucede si en la Actividad 2 el punto está sobre la circunferencia?
4. ¿Qué sucede si en la Actividad 2 el punto es el centro de la circunferencia?

Indicador de logro

3.1 Identifica el lugar geométrico de una elipse.

Secuencia

La figura geométrica asociada con la elipse no es algo con lo que los estudiantes estén familiarizados (al menos matemáticamente) hasta la fecha, y por eso es necesario que logren identificar la figura que determina una elipse.

Propósito

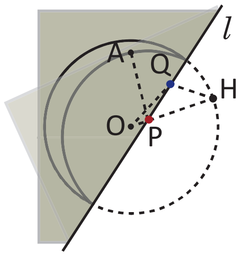
En la Actividad se espera que logren asociar la definición geométrica con la figura que se forma de la elipse, para luego, al deducir su ecuación canónica, quede claro que esta ecuación define el lugar geométrico de una elipse en la siguiente clase, para ello se proponen dos formas.

Materiales

En la clase se utilizarán tachuelas (2 por estudiantes), trozo de cuerda, lapicero, regla, hojas de papel vegetal, compás y plumón (uno de cada uno por estudiante).

Solución de problemas:

La figura que se forma en la actividad 2 también es una elipse, considerando la construcción se tiene que:



Si H es el punto de la circunferencia que se hace coincidir con el punto A, y P es la intersección del radio OH con la recta l del doblez, entonces se cumple que d(P, A) = d(P, H), entonces d(P, O) + d(P, A) = d(P, O) + d(P, H) = d(O, H).

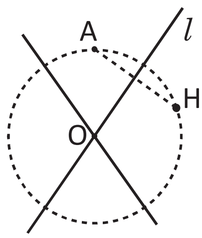
Si Q es otro punto del doblez (recta l) entonces d(Q, A) = d(Q, H), luego d(Q, A) + d(Q, O) = d(Q, H) + d(Q, O) > d(O, H) (por la desigualdad triangular).

Por lo tanto, la recta l y la curva solamente tienen en común el punto P (l es tangente a la curva en el punto P).

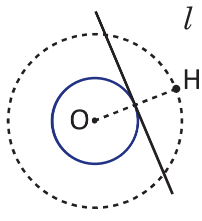
1. Los estudiantes deben medir las distancias de un punto de la figura a cada tachuela y sumarlas, este valor dependerá de la longitud del trozo de cuerda.

2. Las distancias son iguales, en esta parte se espera que los estudiantes midan con la regla.

3. Este caso se puede analizar a partir de la explicación de la actividad 2, cuando A está sobre la circunferencia, y al hacer coincidir con los puntos H, el doblez (recta l) será la mediatriz del segmento AH, y por propiedad esta recta pasa por el centro de la circunferencia, luego el único punto que está en todas las rectas es el centro de la circunferencia, y no puede haber otro, por lo tanto, en este caso la figura que queda determinada es un punto.



4. De manera similar, si el punto coincide con el centro de la circunferencia, entonces para cada punto H de la circunferencia, el doblez (recta l) será mediatriz del radio OH, y las mediatrices de todos los radios son tangentes a la circunferencia de la mitad del radio de la circunferencia dibujada, por lo tanto, la figura que se forma es una circunferencia de la mitad del radio de la original.

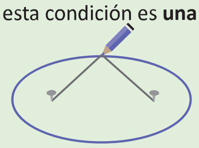


3.2 La elipse*

Problema inicial

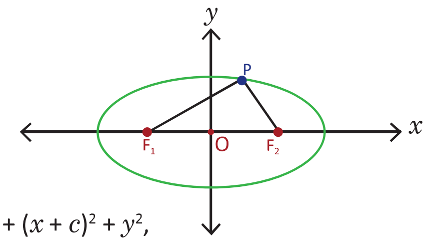
Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que cumplen que su distancia a un punto fijo $F_1(-c, 0)$ sumada con la distancia a otro punto fijo $F_2(c, 0)$ es siempre igual a $2a$, donde $0 < c < a$.

Recuerda que el lugar geométrico que cumple esta condición es **una elipse**.



Solución

Tomando en general los puntos $P(x, y)$ que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.



$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado: $(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$,

simplificando: $a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$,

elevando al cuadrado: $a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$,

simplificando: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Dado que $0 < c < a$, se cumple que $a^2 - c^2 > 0$, y por ello es posible definir el número b tal que $b^2 = a^2 - c^2$, donde $b > 0$. Sustituyendo en la última igualdad:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo por a^2b^2 ambos miembros de la igualdad se puede expresar como: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Definición

La ecuación que determina el lugar geométrico de **una elipse** está dada por: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Los puntos fijos F_1 y F_2 se conocen como **focos** de la elipse, y tienen coordenadas:

$$F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \text{ y } F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0).$$

Y la suma de las distancias de un punto de la elipse a cada uno de los focos es $2a$.

En la ecuación de la elipse, si $a = b$, el resultado es una circunferencia. Por lo tanto la circunferencia es un caso particular de la elipse.

Ejemplo

Deduce la ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1(-3, 0)$ y $F_2(3, 0)$, y cumple que $a = 5$.

De la coordenada en x de los focos se deduce que $c = 3$ y $a = 5$ por hipótesis, para calcular b se tiene que:

$$a^2 - c^2 = b^2, \text{ entonces, } b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Problemas

1. Deduce la ecuación de las elipses de cada literal.

   a) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $a = 5$ b) $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, $a = 3$ c) $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, $a = 2$

2. Determina las coordenadas de los focos de cada elipse.

   a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ c) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$

Indicador de logro

3.2 Deduce la ecuación de una elipse con centro en el origen a partir de los focos y el valor del semieje mayor.

Secuencia

Una vez que los estudiantes reconocen el lugar geométrico que determina una elipse, se puede asociar la ecuación deducida de las condiciones de la definición con dicha figura geométrica. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

En la Solución, la relación $b^2 = a^2 - c^2$ está asociada a las condiciones de los cuadrados, no a la relación de Pitágoras que se cumple en la elipse. En el Ejemplo se presenta la forma de asociar la ecuación de la elipse con su definición.

Solución de problemas:

1a) Se tiene que $c = 4$ y $a = 5$ entonces:

$b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$,

por lo tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

1b) Se tiene que $c = 2$ y $a = 3$ entonces:

$b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$,

por lo tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\sqrt{5}^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

1c) Se tiene que $c = 1$ y $a = 2$ entonces:

$b^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 = \left(\sqrt{3}\right)^2$,

por lo tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

2a) Se tiene que $a^2 = 5^2$ y $b^2 = 3^2$ entonces:

$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2$,

por lo tanto, los focos son:

$F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$.

2b) Se tiene que $a^2 = 4$ y $b^2 = 2$ entonces:

$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 2 = 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$,

por lo tanto, los focos son:

$F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$.

2c) Se tiene que $a^2 = 7$ y $b^2 = 3$ entonces:

$c^2 = a^2 - b^2 = 7 - 3 = 4 = 2^2$,

por lo tanto, los focos son:

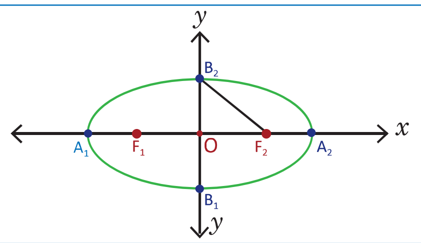
$F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$.

Lección 3

3.3 Elementos y propiedades de la elipse

Problema inicial

En la gráfica de la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, determina las coordenadas de los puntos A_1, A_2, B_1 y B_2.



Solución

Dado que A_1 y A_2 están sobre el eje x, se puede evaluar la ecuación de la elipse en $y = 0$.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$, entonces, $\frac{x^2}{a^2} = 1$ y resolviendo.

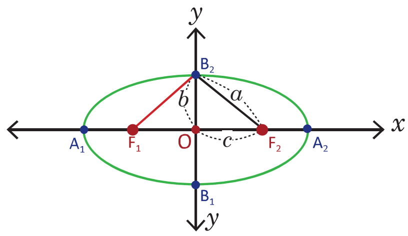
$$x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$

Análogamente, como B_1 y B_2 están sobre el eje y, se puede evaluar la ecuación de la elipse en $x = 0$ y se tiene que:

$$y = \pm b$$

Por lo tanto, las coordenadas de estos puntos son:

$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ y $B_2(0, b)$.

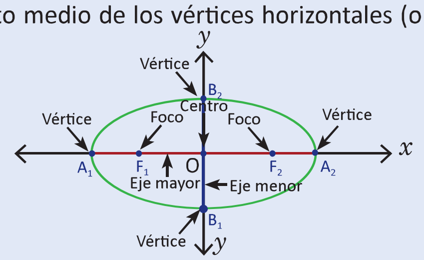


Conclusión

Los puntos extremos de la elipse que se encuentran sobre el eje x y sobre el eje y se llaman **vértices**, y tienen coordenadas $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ y $B_2(0, b)$. El punto medio de los vértices horizontales (o verticales) se llama **centro** de la elipse.

El segmento de recta que pasa por los focos de la elipse y cuyos extremos son vértices de la misma, se llama **eje mayor** de la elipse, y su longitud mide $2a$.

El segmento de recta cuyos extremos son vértices de la misma y es perpendicular al eje mayor se llama **eje menor** de la elipse, y su longitud mide $2b$.



Para graficar la elipse, coloca los vértices A_1, A_2, B_1 y B_2; o bien traza los ejes mayor y menor.

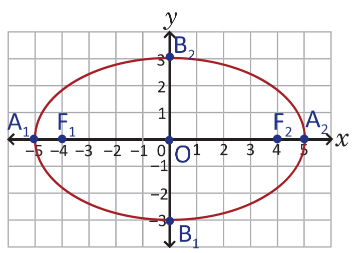
Ejemplo

Determina las coordenadas de los vértices, los focos, longitudes del eje mayor y el eje menor de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano.

Determinando los valores de a, b y c: $a = 5$, $b = 3$ y $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

Vértices $\begin{cases} A_1(-5, 0),\ A_2(5, 0) \\ B_1(0, -3),\ B_2(0, 3) \end{cases}$ Longitud del eje mayor = 2(5) = 10
Longitud del eje menor = 2(3) = 6

Focos $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$



Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y longitudes del eje mayor y el eje menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ d) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Indicador de logro

3.3 Identifica los elementos de una elipse dada su ecuación para graficarla en el plano cartesiano.

Secuencia

Una vez establecida la ecuación canónica de la elipse, se puede trabajar con los estudiantes los diferentes elementos que la conforman, y cómo graficarla en el plano cartesiano a partir de ellos.

Propósito

En la Solución se presentan los diferentes elementos que tiene una elipse en general, y luego se utiliza el Ejemplo para observar la manera de utilizar estos elementos para graficarla en el plano cartesiano.

Solución de problemas:

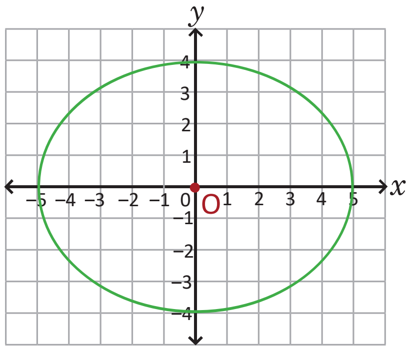
a) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 5$, $b = 4$, $c = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$.

Vértices $\begin{cases} A_1(-5, 0), A_2(5, 0) \\ B_1(0, -4), B_2(0, 4) \end{cases}$

Focos $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$

Longitud del eje mayor = 2(5) = 10

Longitud del eje menor = 2(4) = 8



Para orientar a los estudiantes a graficar elipses, se puede aclarar que es suficiente con graficar los puntos de los vértices y luego hacer un bosquejo a partir de los ejes mayor y menor.

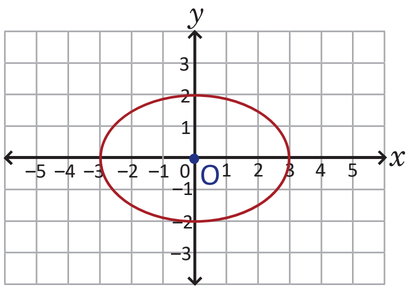
b) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

Vértices $\begin{cases} A_1(-3, 0), A_2(3, 0) \\ B_1(0, -2), B_2(0, 2) \end{cases}$

Focos $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$

Longitud del eje mayor = 2(3) = 6

Longitud del eje menor = 2(2) = 4



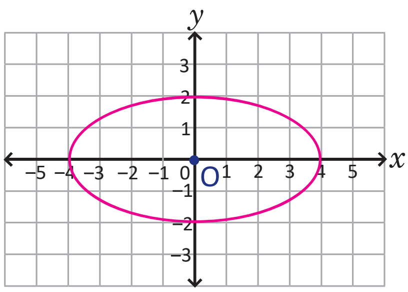
c) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Vértices $\begin{cases} A_1(-4, 0), A_2(4, 0) \\ B_1(0, -2), B_2(0, 2) \end{cases}$

Focos $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$

Longitud del eje mayor = 2(4) = 8

Longitud del eje menor = 2(2) = 4



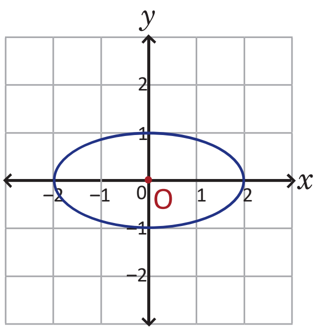
d) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Vértices $\begin{cases} A_1(-2, 0), A_2(2, 0) \\ B_1(0, -1), B_2(0, 1) \end{cases}$

Focos $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$

Longitud del eje mayor = 2(2) = 4

Longitud del eje menor = 2(1) = 2



En d), los estudiantes pueden tener problemas en reconocer que el denominador de y^2 es 1^2, hay que tener cuidado para corregir los errores que puedan surgir, por esta razón es el último problema que resolverán.

3.4 Desplazamientos paralelos de la elipse

Problema inicial

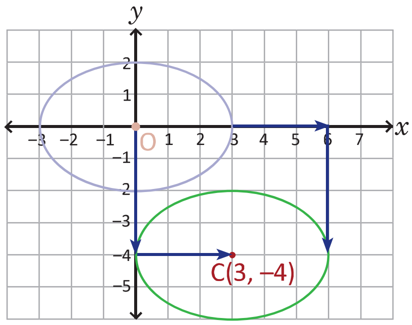
Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$.

Solución

Considerando la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ y desplazándola 3 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia abajo, se obtiene la ecuación:

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4}=1.$$

Por lo tanto, la gráfica es la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ con centro (3, –4).



Conclusión

La ecuación de una elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente está dada por: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

Para graficarla, se puede ubicar el centro y graficarla como si este fuese el origen del plano cartesiano, o bien, graficarla en el origen y desplazarla.

Recuerda que para desplazar una gráfica h unidades horizontalmente, y k unidades verticalmente se cambia la variable x por la expresión $x-h$; y la variable y por la expresión $y-k$.

Ejemplo 1

Determina la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ desplazada –3 unidades horizontalmente y 2 unidades verticalmente.

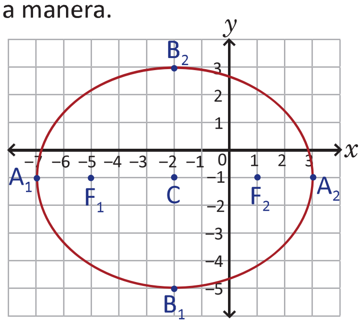
Tomando la ecuación original y reemplazando x por $[x-(-3)]$, y y por $(y-2)$: $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$.

Ejemplo 2

Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y eje menor de la elipse $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$. Luego grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

Esta elipse es equivalente a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ desplazada –2 unidades horizontalmente y –1 unidad verticalmente. Nota que los vértices y los focos se desplazan de la misma manera.

Ecuación	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$
Vértices	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$ $B_1(0, -4)$, $B_2(0, 4)$	$A_1(-7, -1)$, $A_2(3, -1)$ $B_1(-2, -5)$, $B_2(-2, 3)$
Focos	$F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$	$F_1(-5, -1)$, $F_2(1, -1)$
Longitudes del eje mayor y eje menor	$2a = 10$, $2b = 8$	$2a = 10$, $2b = 8$



Problemas

1. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

   a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $h=-1$, $k=2$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, $h=3$, $k=-1$ c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$, $h=-2$, $k=-2$

2. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y longitudes del eje mayor y eje menor. Luego grafica en el plano cartesiano la elipse de cada literal.

   a) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$ b) $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ c) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

Indicador de logro

3.4 Encuentra la ecuación de una elipse desplazada paralelamente respecto a los ejes de coordenadas y traza su gráfica.

Secuencia

Puesto que los estudiantes ya conocen la ecuación de la elipse y cómo encontrar los elementos de ella a partir de dicha ecuación, es un momento adecuado para introducir los desplazamientos paralelos en la elipse.

Propósito

En la Solución se espera que los estudiantes apliquen lo que ya conocen sobre desplazamientos paralelos tanto de una gráfica, como de un punto, que se vio en la lección sobre parábola y se siguió aplicando en circunferencia.

Solución de problemas:

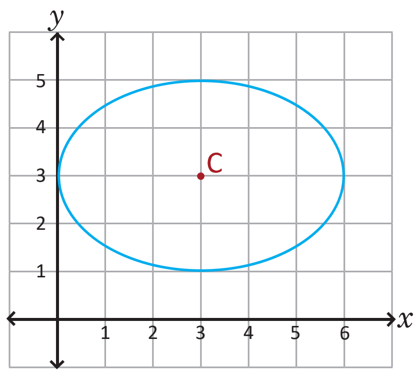
1a) $\frac{[x-(-1)]^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$, o bien, $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$.

1b) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{[y-(-1)]^2}{4}=1$, o bien, $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$.

1c) $\frac{[x-(-2)]^2}{16}+\frac{[y-(-2)]^2}{7}=1$, o bien, $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{7}=1$.

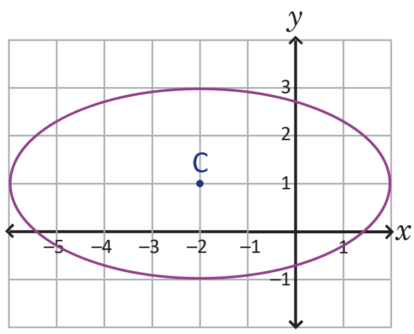
2a)

Ecuación	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$	$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$
Vértices	$A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$ $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$	$A_1(0, 3)$, $A_2(6, 3)$ $B_1(3, 1)$, $B_2(3, 5)$
Focos	$F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$	$F_1(-\sqrt{5}+3, 3)$, $F_2(\sqrt{5}+3, 3)$
Longitudes del eje mayor y eje menor	$2a = 6$, $2b = 4$	$2a = 6$, $2b = 4$



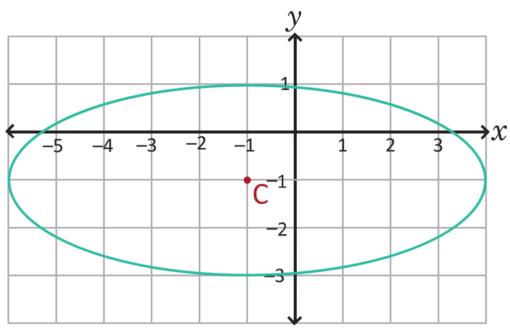
2b)

Ecuación	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$	$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$
Vértices	$A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$ $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$	$A_1(-6, 1)$, $A_2(2, 1)$ $B_1(-2, -1)$, $B_2(-2, 3)$
Focos	$F_1(-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$	$F_1(-2\sqrt{3}-2, 1)$, $F_2(2\sqrt{3}-2, 1)$
Longitudes del eje mayor y eje menor	$2a = 8$, $2b = 4$	$2a = 8$, $2b = 4$



2c)

Ecuación	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$	$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$
Vértices	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$ $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$	$A_1(-6, -1)$, $A_2(4, -1)$ $B_1(-1, -3)$, $B_2(-1, 1)$
Focos	$F_1(-\sqrt{21}, 0)$, $F_2(\sqrt{21}, 0)$	$F_1(-\sqrt{21}-1, -1)$, $F_2(\sqrt{21}-1, -1)$
Longitudes del eje mayor y eje menor	$2a = 10$, $2b = 4$	$2a = 10$, $2b = 4$



3.5 Ecuación general de la elipse

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$.

Expresa la ecuación en la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Solución

Completando cuadrados para x y para y:

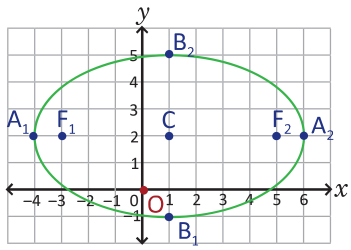
$$9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 4y) - 116 = 0 \quad \text{ordenando y agrupando,}$$

$$9(x-1)^2 + 25(y-2)^2 - 9 - 100 - 116 = 0 \quad \text{completando cuadrados,}$$

$$\frac{9(x-1)^2}{225} + \frac{25(y-2)^2}{225} = 1 \quad \text{sumando e igualando a 1,}$$

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad \text{simplificando.}$$



Por lo tanto, la gráfica es la elipse con centro (1, 2) y vértices $A_1(-4, 2)$, $A_2(6, 2)$, $B_1(1, -1)$ y $B_2(1, 5)$.

Conclusión

Una elipse puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ y dejando la ecuación igualada a 0.

En general para determinar el centro y los vértices (eje mayor y menor) de una elipse cuya ecuación sea de la forma $dx^2 + ey^2 + fx + gy + h = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, para expresarla en la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. A la ecuación de la forma $dx^2 + ey^2 + fx + gy + h = 0$ se le llama **ecuación general de la elipse.**

Ejemplo

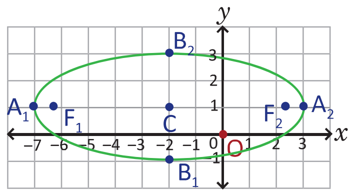
Determina las coordenadas de los vértices, los focos y longitudes del eje mayor y menor de la elipse: $4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$ y grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

$$4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$$

$$4(x+2)^2 + 25(y-1)^2 - 16 - 25 - 59 = 0$$

$$\frac{4(x+2)^2}{100} + \frac{25(y-1)^2}{100} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$



Entonces el centro de la elipse es el punto C(–2, 1).

Esta elipse es equivalente a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ desplazada –2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente.

Ecuación	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
Vértices	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$	$A_1(-7, 1)$, $A_2(3, 1)$, $B_1(-2, -1)$, $B_2(-2, 3)$
Focos	$F_1(-\sqrt{21}, 0)$, $F_2(\sqrt{21}, 0)$	$F_1(-2-\sqrt{21}, 1)$, $F_2(-2+\sqrt{21}, 1)$
Longitudes de los ejes	$2a = 10$, $2b = 4$	$2a = 10$, $2b = 4$

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y longitudes del eje mayor y menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$
b) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 16 = 0$
c) $8x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 55 = 0$
d) $7x^2 + 16y^2 + 14x - 64y - 41 = 0$
e) $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$
f) $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$

Indicador de logro

3.5 Determina los elementos de una elipse a partir de su ecuación general y traza su gráfica en el plano cartesiano.

Secuencia

Ahora que los estudiantes ya han aplicado desplazamientos paralelos en la elipse, se trabaja con la ecuación general utilizando el procedimiento para completar cuadrados perfectos.

Propósito

En la clase anterior y en esta quedan ejemplificados los desplazamientos a los 4 cuadrantes del plano cartesiano, para que los estudiantes tengan claridad de los casos.

Solución de problemas:

a) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$

$$4(x+1)^2 + 9(y+1)^2 = 23 + 4 + 9$$

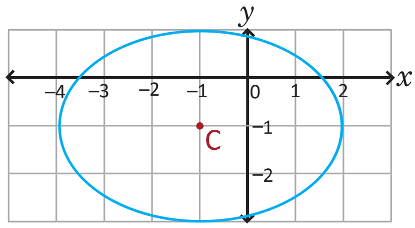
$$\frac{4(x+1)^2}{36} + \frac{9(y+1)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$A_1(-4, -1)$, $A_2(2, -1)$,
$B_1(-1, -3)$, $B_2(-1, 1)$

$F_1(-\sqrt{5} - 1, -1)$,
$F_2(\sqrt{5} - 1, -1)$

$2a = 6$, $2b = 4$



b) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 16 = 0$

$$3(x-2)^2 + 4(y+2)^2 = -16 + 12 + 16$$

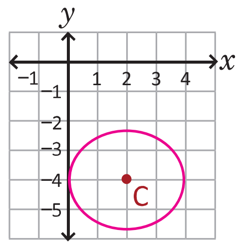
$$\frac{3(x-2)^2}{12} + \frac{4(y+4)^2}{12} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{3} = 1$$

$A_1(0, -4)$, $A_2(4, -4)$,
$B_1(2, -\sqrt{3} - 4)$,
$B_2(2, \sqrt{3} - 4)$

$F_1(1, -4)$, $F_2(3, -4)$

$2a = 4$, $2b = 2\sqrt{3}$



c) $8x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 55 = 0$

$$8(x-1)^2 + 9(y-1)^2 = 55 + 8 + 9$$

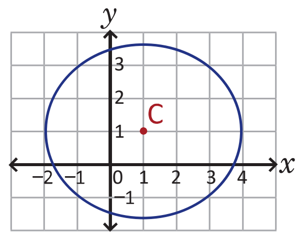
$$\frac{8(x-1)^2}{72} + \frac{9(y-1)^2}{72} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$$

$A_1(-2, 1)$, $A_2(4, 1)$,
$B_1(1, -2\sqrt{2} + 1)$,
$B_2(1, 2\sqrt{2} + 1)$

$F_1(0, 1)$, $F_2(2, 1)$

$2a = 6$, $2b = 4\sqrt{2}$



d) $7x^2 + 16y^2 + 14x - 64y - 41 = 0$

$$7(x+1)^2 + 16(y-2)^2 = 41 + 7 + 64$$

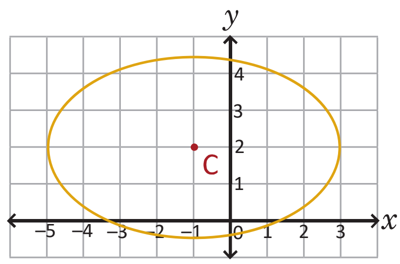
$$\frac{7(x+1)^2}{112} + \frac{16(y-2)^2}{112} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

$A_1(-5, 2)$, $A_2(3, 2)$,
$B_1(-1, -\sqrt{7} + 2)$,
$B_2(-1, \sqrt{7} + 2)$

$F_1(-4, 2)$, $F_2(2, 2)$

$2a = 8$, $2b = 2\sqrt{7}$



e) $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$

$$4x^2 + 9(y-2)^2 = 0 + 36$$

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9(y-2)^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$A_1(-3, 2)$, $A_2(3, 2)$,
$B_1(0, 0)$, $B_2(0, 4)$

$F_1(-\sqrt{5}, 2)$,
$F_2(\sqrt{5}, 2)$

$2a = 6$, $2b = 4$

f) $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$

$$(x+2)^2 + 4y^2 = 4$$

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{4y^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{4} + y^2 = 1$$

$A_1(-4, 0)$, $A_2(0, 0)$,
$B_1(-2, -1)$, $B_2(-2, 1)$

$F_1(-\sqrt{3} - 2, 0)$,
$F_2(\sqrt{3} - 2, 0)$

$2a = 4$, $2b = 2$

3.6 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación de las elipses de cada literal.

a) $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, $a = 3$

b) $F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$, $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$

2. Determina las coordenadas de los focos de cada elipse.

a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

b) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

3. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, las longitudes del eje mayor y el eje menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

4. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $h = -2$, $k = -2$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $h = 3$, $k = -2$

5. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y eje menor. Luego grafica en el plano cartesiano la elipse de cada literal.

a) $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

b) $\frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

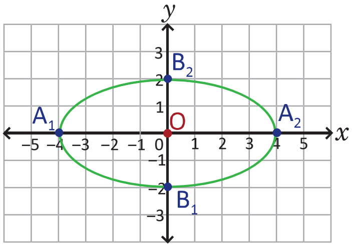
6. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y el eje menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$

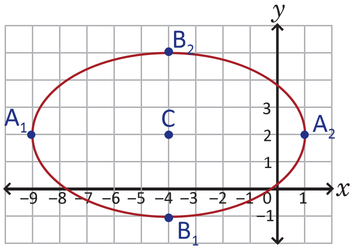
b) $4x^2 + 9y^2 + 24x = 0$

7. Encuentra la ecuación que determina cada una de las siguientes elipses.

a)



b)



Indicador de logro

3.6 Resuelve problemas correspondientes a la elipse.

Solución de problemas:

1a) $b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$, entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

1b) $b^2 = 4^2 - \sqrt{7}^2 = 16 - 7 = 9$, entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

2a) $c^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$, y los focos son: $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$.

2b) $c^2 = 4 - 1 = 3 = \left(\sqrt{3}\right)^2$, y los focos son: $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$.

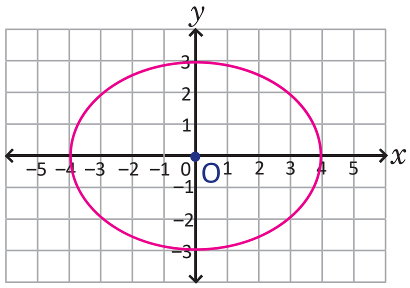
2c) $c^2 = 16 - 12 = 4 = 2^2$, y los focos son: $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$.

3a) Vértices $\begin{cases} A_1(-4, 0), A_2(4, 0) \\ B_1(0, -3), B_2(0, 3) \end{cases}$

Focos $F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$

Longitud del eje mayor = 2(4) = 8

Longitud del eje menor = 2(3) = 6

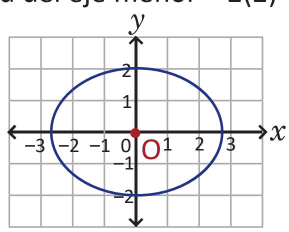


3b) Vértices $\begin{cases} A_1(-2\sqrt{2}, 0), A_2(2\sqrt{2}, 0) \\ B_1(0, -2), B_2(0, 2) \end{cases}$

Focos $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$

Longitud del eje mayor = $2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

Longitud del eje menor = 2(2) = 4



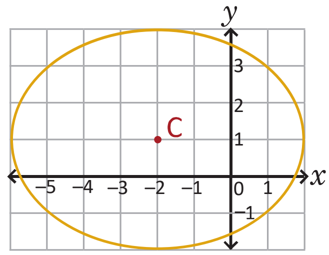
4a) $\frac{[x-(-2)]^2}{25} + \frac{[y-(-2)]^2}{16} = 1$, o bien, $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$.

4b) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{[y-(-2)]^2}{9} = 1$, o bien, $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$.

5a) $A_1(-6, 1)$, $A_2(2, 1)$, $B_1(-2, -2)$, $B_2(-2, 4)$

$F_1(-\sqrt{7} - 2, 1)$, $F_2(\sqrt{7} - 2, 1)$

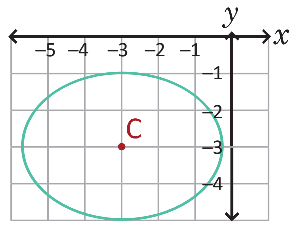
$2a = 8$, $2b = 6$



5b) $A_1(-2\sqrt{2} - 3, -3)$, $A_2(2\sqrt{2} - 3, -3)$, $B_1(-3, -5)$, $B_2(-3, -1)$

$F_1(-5, -3)$, $F_2(-1, -3)$

$2a = 4\sqrt{2}$, $2b = 4$



6a) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$

$$4(x-2)^2 + 9(y+2)^2 = -16 + 36 + 16$$

$$\frac{4(x-2)^2}{36} + \frac{9(y+2)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$A_1(-1, -2)$, $A_2(5, -2)$, $B_1(2, -4)$, $B_2(2, 0)$

$F_1(-\sqrt{5} + 2, -2)$, $F_2(\sqrt{5} + 2, -2)$

$2a = 6$, $2b = 4$

6b) $4x^2 + 9y^2 + 24x = 0$

$$4(x+3)^2 + 9y^2 = 36$$

$$\frac{4(x+3)^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1$$

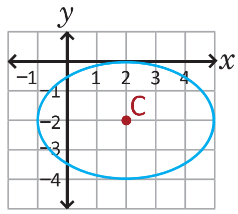
$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$A_1(-6, 0)$, $A_2(0, 0)$, $B_1(-3, -2)$, $B_2(-3, 2)$

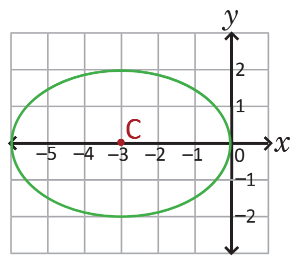
$F_1(-\sqrt{5} - 3, 0)$, $F_2(\sqrt{5} - 3, 0)$

$2a = 6$, $2b = 4$

6a)



6b)



7a) Se identifica que $a = 4$ y $b = 2$, y el centro está en (0, 0), por lo tanto, la ecuación es:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

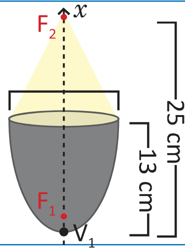
7b) Se identifica que $a = 5$ y $b = 3$, y el centro está en (–4, 2), por lo tanto, la ecuación es:

$$\frac{[x-(-4)]^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

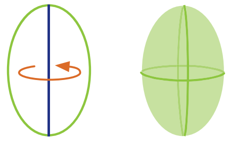
3.7 Aplicaciones de la elipse*

Problema inicial

Se diseña una lámpara con forma semi-elíptica (la mitad de una forma elíptica) de 13 cm de altura de modo que proyecta la luz emanada desde un foco hacia el otro que está a 25 cm de distancia del vértice de la lámpara. Determina de cuánto debería ser el diámetro de la lámpara para que funcione correctamente.



Una forma elíptica es un cuerpo geométrico que resulta de girar una elipse alrededor de su eje mayor.



Solución

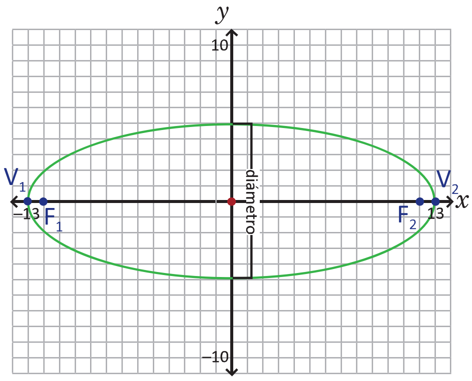
Considerando una elipse con centro en el origen, entonces uno de los vértices tendrá coordenadas (13, 0), y uno de los focos (12, 0), por lo tanto a = 13, c = 12, entonces:

$b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 5^2$

$a^2 = 13^2$

Y la ecuación de dicha elipse será: $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.

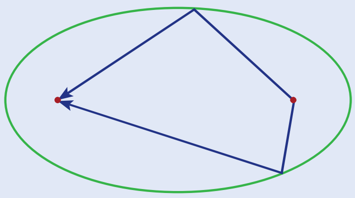
Entonces el diámetro estará dado por la medida del eje menor de la elipse, es decir, $2b = 2(5) = 10$.
Por lo tanto, el diámetro de la lámpara debe ser 10 cm.



Conclusión

En una elipse, los focos cumplen una propiedad reflectora importante: una línea tomada desde un foco de la elipse, será reflejada por esta exactamente sobre el otro foco.

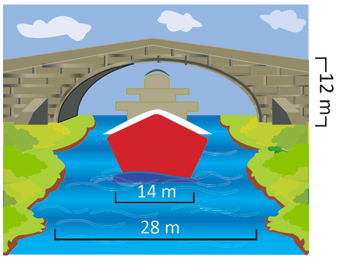
Esta propiedad reflectora parecida a la de la parábola hace que la elipse o las formas elípticas posean gran aplicación en ámbitos científicos, arquitectónicos, acústicos o artísticos.



Problemas

1. Una ingeniera eléctrica diseña un reflector de luz semi-elíptico para un teatro, dicho reflector tiene 13 centímetros de altura y 10 centímetros de diámetro. Determina a qué distancia del vértice del reflector concentrará la luz dicho reflector.

2. Un puente cuya abertura tiene forma semi-elíptica sobre un río tiene 28 metros de largo y una altura de 12 metros sobre el nivel del río. Determina la altura máxima que debe tener un barco de 14 metros de ancho para que pase con total seguridad bajo el puente.



Asume que el barco es simétrico respecto el eje vertical, y que pasa justo en medio del puente. Además piensa que el barco tiene la misma altura en todo punto.

Unidad 3

Indicador de logro

3.7 Utiliza las propiedades de los focos y la ecuación de la elipse para resolver problemas sobre objetos elípticos.

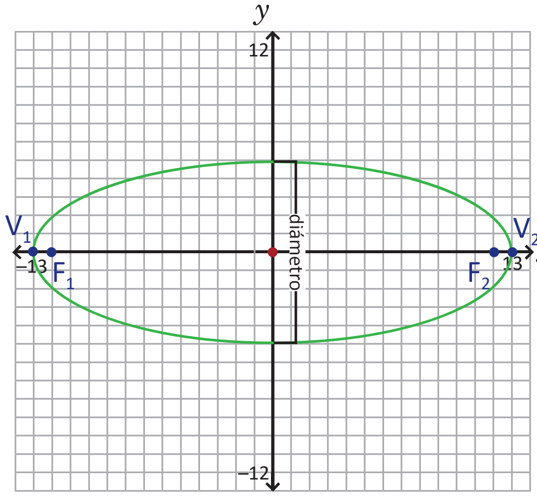
Secuencia

Después de abordar los conceptos básicos sobre la elipse, se pueden analizar y resolver algunos problemas sobre aplicaciones a la vida real, basados fundamentalmente en la propiedad reflectora de la elipse. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

En las soluciones a los Problemas los estudiantes deben modelar una situación a partir de conceptos matemáticos, para resolverlos e interpretar la respuesta obtenida para dar solución al problema original.

Solución de problemas:



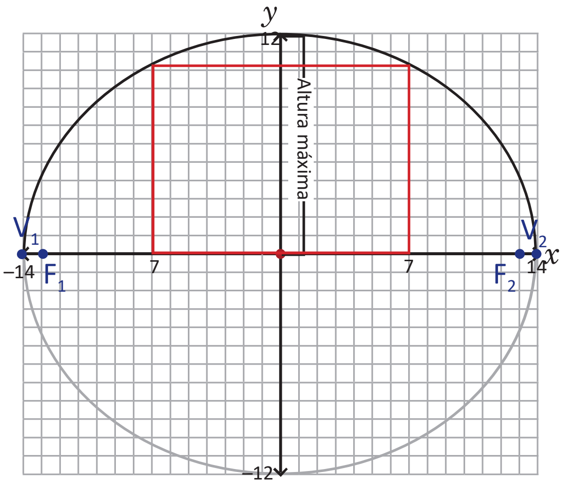
1. Considerando una elipse con centro en el origen, entonces uno de los vértices del eje mayor tendrá coordenadas (13, 0), y uno de los vértices del eje menor (0, 5), por lo tanto a = 13, b = 5, entonces la ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{5^2}=1.$$

Entonces, por la propiedad reflectora de la elipse, se tendrá que la luz se concentra en el foco cuyas coordenadas son:

$$c^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2,\ F_2 = (12, 0).$$

Por lo tanto, el reflector concentrará la luz a 25 (13 + 12) metros del vértice.



2. Para este problema hay que tener cuidado, pues la altura de los puentes elípticos disminuye conforme se aleja del centro de la elipse, entonces para asegurar que el barco pase con toda seguridad es mejor calcular la altura en el punto más lejano del centro por el que puede pasar el barco.

Utilizando la ecuación de la elipse con a = 14 (la mitad de la longitud total) y b = 12 (la altura máxima del puente):

$$\frac{x^2}{14^2}+\frac{y^2}{12^2}=1.$$

Puesto que el barco mide 14 metros de ancho, entonces el punto más lejano del centro por el que pasará el barco es en x = 7, y evaluando en la ecuación para determinar el valor de y:

$$\frac{7^2}{14^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$$
$$\frac{y^2}{12^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{y}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = 6\sqrt{3} \approx 10.39.$$

Por lo tanto, la altura máxima que debe tener el barco para que pase con total seguridad debe ser aproximadamente de 10.39 metros.

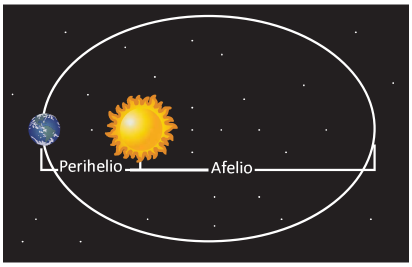
3.8 Aplicaciones de la elipse

Resuelve los siguientes problemas de aplicación de elipse. Modela cada situación en el plano cartesiano.

1. Un paso a desnivel construido en forma semi-elíptica tiene 12 metros de largo y una altura máxima de 3 metros a partir del centro. Determina la altura máxima que debe tener un camión para pasar por debajo del paso a desnivel, si la anchura de este camión es de 3 metros del centro de la calle hacia cada lado.

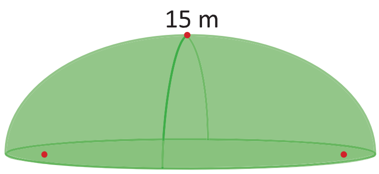
2. Una arquitecta y un ingeniero trabajan en el diseño de un puente con forma semi-elíptica para un río de 30 metros de ancho. El puente debe ser tal que un barco de a lo sumo 20 metros de ancho y 3 metros de alto pueda cruzar debajo de este con total seguridad. Determina la altura que debe tener el puente.

3. La Tierra cumple con recorrer una órbita elíptica en exactamente un año, dicha elipse tiene como uno de sus focos el Sol. El instante en el que la Tierra se ubica más cerca del Sol se conoce como perihelio y son aproximadamente 147 millones de kilómetros de distancia; mientras que el instante en el que está más alejada del Sol se conoce como afelio y se ubica a una distancia aproximada de 153 millones de kilómetros. Determina la ecuación de la órbita de la Tierra.



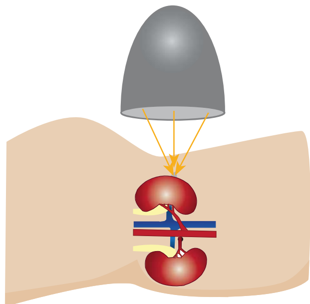
El astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler, estudió y descubrió **las tres leyes del movimiento de los planetas**, la primera de las cuales se enuncia: *"Los planetas tienen movimientos elípticos alrededor del Sol, estando este situado en uno de los dos focos que contiene la elipse"*.

4. Una estructura arquitectónica fue diseñada para poder enviar secretos a otra persona sin que los demás los escuchen. La forma de su diseño es semi-elíptico (aprovechando las propiedades focales de la elipse), la altura de dicha estructura en el punto más alto es de 15 metros y la distancia entre los vértices del salón es de 34 metros. Determina la ubicación que deben tener dos personas para que uno pueda escuchar al otro aunque se hablen por susurros.



Si dos personas están sobre los focos de la elipse, las ondas de sonido que salgan de un foco serán reflejadas directamente hacia el otro foco.

5. Para curar los cálculos renales en una persona, en ocasiones se utiliza un procedimiento conocido como litotripcia. Este procedimiento utiliza una cubierta semi-elíptica, y se fundamenta en la propiedad de los focos de una elipse: se localiza un aparato generador de ondas de choque en el foco de la elipse y estas tendrán efecto sobre el otro foco, lugar donde se encuentra el cálculo renal. Si el aparato tiene 13 cm de altura y 10 cm de diámetro, determina a qué distancia podría estar el cálculo para poder pulverizarlo utilizando este aparato.



Indicador de logro

3.8 Resuelve problemas de aplicación de la elipse.

Solución de problemas:

1. Este problema es muy parecido al problema número 2 resuelto en la clase anterior, basta identificar que para este caso $a = 6$ y $b = 3$, entonces la elipse tendrá ecuación: $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.
Y ahora solo falta determinar el valor de y para $x = 3$:

$\frac{3^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, entonces, $\frac{y^2}{3^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, luego, $\frac{y}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo tanto, $y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6$.

Por lo tanto, la altura máxima que debe tener el camión para que pase con total seguridad debe ser aproximadamente de 2.60 metros.

2. Si se modela el problema con la ecuación de la elipse, se puede identificar que $a = 15$ (la mitad de la anchura del río), y el valor de b representa la altura que debe tener el puente, entonces la ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Puesto que un barco de 20 metros de ancho y 3 de alto debe cruzar con total seguridad, entonces el punto (10, 3) debe satisfacer la ecuación de la elipse, entonces sustituyendo y determinando el valor de b:

$\frac{10^2}{15^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$, entonces, $\frac{3^2}{b^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, luego, $\frac{3}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, por lo tanto, $b = \frac{9\sqrt{5}}{5} \approx 4.02$.

Por lo tanto, la altura máxima del puente debe ser aproximadamente 4.02 metros.

3. Utilizando la ilustración del problema, es claro que al sumar las distancias del perihelio y el afelio se tendrá la longitud del eje mayor de la elipse; y al restar al afelio el perihelio se obtendrá la distancia entre los focos:

$$2a = \text{afelio} + \text{perihelio} = 153 + 147 = 300, \text{ entonces } a = 150;$$
$$2c = \text{afelio} - \text{perihelio} = 153 - 147 = 6, \text{ entonces } c = 3.$$

Para determinar la ecuación de la elipse solamente hace falta el valor de b^2:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 150^2 - 3^2 = 22\,491.$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse que determina la órbita es: $\frac{x^2}{22\,500} + \frac{y^2}{22\,491} = 1$.

4. Puesto que el problema menciona que la distancia entre los dos vértices es 34, y la altura provee el valor de b de la elipse, es decir, $b = 15$, entonces se puede determinar que $2a = 34$, y entonces $a = 17$, luego lo que se necesita es el valor de c: $c^2 = a^2 - b^2 = 17^2 - 15^2 = 64 = 8^2$.

Como $a - c = 17 - 8 = 9$, es la distancia del vértice al foco, entonces la personas deben ubicarse a 9 metros de distancia de cada vértice, o bien a 16 metros de distancia entre ellas (a 8 metros del centro cada persona).

5. El objeto semielíptico descrito es igual al del Problema inicial de la clase anterior, por lo tanto, se tendrá que $a = 13$ y $b = 5$, a partir de lo cual se puede determinar que $c^2 = a^2 - b^2 = 13^2 - 5^2 = 144 = 12^2$.

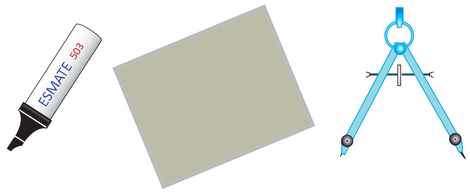
Por lo tanto, para poder pulverizar el cálculo renal, este debe estar a 12 cm de distancia del litotriptor.

Lección 4 La hipérbola

4.1 Actividad introductoria

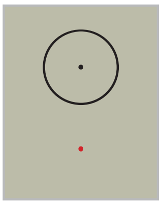
Materiales

- Hoja de papel vegetal
- Compás
- Plumón
- Regla

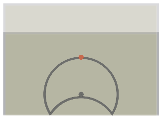


Actividad

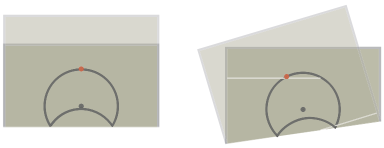
1. Dibuja una circunferencia no demasiado grande sobre el papel vegetal, coloca un punto en su centro y otro afuera un poco lejos de dicha circunferencia y alineados verticalmente.



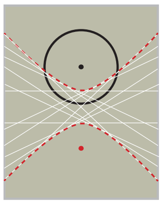
2. Dobla el papel de modo que el punto dibujado quede exactamente sobre un punto de la circunferencia.



3. Realiza el mismo proceso con puntos cercanos en la circunferencia hasta volver al punto con el que se inició. Analiza la figura formada.



4. La figura que se forma tiene dos ramas y el centro de la circunferencia está dentro de una rama y el punto dibujado fuera de la circunferencia está dentro de la otra.



Definición

La figura de las dos ramas que queda marcada en la actividad es una **hipérbola**. Observa que cada punto de ella cumple la condición de que la diferencia de la distancia de un punto a dos puntos fijos se mantiene constante.

Preguntas

1. ¿Qué sucede si el punto dibujado fuera de la circunferencia está más lejos de ella?
2. ¿Qué sucede si el punto dibujado fuera de la circunferencia está muy cerca de la circunferencia?
3. ¿Qué sucede si el punto dibujado fuera de la circunferencia no está alineado verticalmente con su centro?
4. ¿Cuánto es la diferencia de un punto de la hipérbola hacia los dos puntos fijos dibujados?
5. Explica por qué se cumple que la diferencia de un punto de la hipérbola a dos puntos fijos se mantiene constante.

Indicador de logro

4.1 Identifica el lugar geométrico de una hipérbola.

Secuencia

La figura geométrica asociada con la hipérbola no es algo con lo que los estudiantes estén familiarizados hasta la fecha, y por eso es necesario que logren identificar la figura que determina una hipérbola, al igual como lo hicieron con la elipse.

Propósito

En la Actividad se espera que logren asociar la definición geométrica con la figura que se forma de la hipérbola, para que luego, en la siguiente clase, al deducir su ecuación canónica quede claro que esta ecuación define el lugar geométrico de una hipérbola.

Materiales

En la clase se utilizarán hojas de papel vegetal, compás y plumón (uno de cada uno por estudiante).

Solución de problemas:

1. Los estudiantes pueden comparar entre ellos; algunos que dibujaron el punto más lejos observarán que las hipérbolas formadas se abren más o se abren menos, lo importante es que los estudiantes vean que no solamente influye el hecho de estar lejos o cerca de la circunferencia, sino también cuánto es el radio de esta. En particular, si se dibujan circunferencias con el mismo radio, mientras más lejos está el punto, las hipérbolas se abren un poco más.

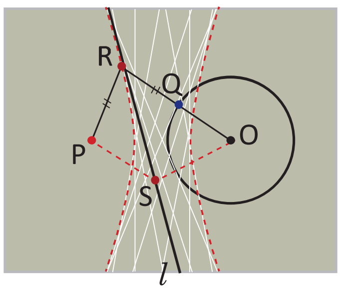
2. Los estudiantes pueden comparar entre ellos, en este caso las hipérbolas se van cerrando cada vez más al punto que los vértices casi coinciden con los focos, en ese caso se forma una línea recta horizontal.

3. Este caso puede ser elaborado con anticipación por el profesor, de modo que los estudiantes observen que también se forma una hipérbola, pero oblicua, o inclinada.

4. Para esta pregunta los estudiantes pueden utilizar regla para medir las distancias y luego restarlas, el profesor puede recomendar compararlas con la longitud del radio de la circunferencia; aunque lo ideal es que los estudiantes comparen las distancias y vean que son iguales.

5. Este es el numeral más difícil, y se puede comenzar tomando un punto Q de la circunferencia y tomar el punto R como la intersección entre el doblez (recta l) y $\overline{OQ}$.

A partir de ello se puede observar que $\overline{RQ}$ coincide con $\overline{RP}$, por lo tanto, la diferencia de las distancias RO – RP será constante e igual al radio. Además, se puede hacer el cálculo para comprobar que si se toma otro punto S, la diferencia de las distancias SO – SP siempre es menor que el radio (desigualdad triangular).

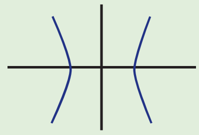


4.2 La hipérbola*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que cumplen que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ es siempre igual a $2a$, donde $0 < a < c$.

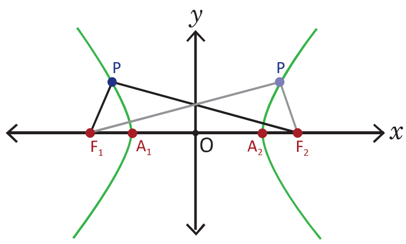
Recuerda que el lugar geométrico que cumple esta condición es **una hipérbola**.



Solución

Si el punto P está en la rama izquierda: $d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$.

Si el punto P está en la rama derecha: $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$.



Tomando en general los puntos $P(x, y)$ que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.

$$d(P, F_2) - d(P, F_1) = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{transponiendo,}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \quad \text{simplificando,}$$

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad \text{simplificando.}$$

Dado que $0 < a < c$, se cumple que $c^2 - a^2 > 0$, y por ello es posible definir el número b tal que $b^2 = c^2 - a^2$, donde $b > 0$. Sustituyendo en la última igualdad: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Esta igualdad se puede expresar como: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, dividiendo por a^2b^2 ambos miembros.

Definición

La ecuación que determina el lugar geométrico de una hipérbola está dada por: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Los puntos fijos F_1 y F_2 se conocen como **focos** de la hipérbola y tienen coordenadas:

$$F_1(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0) \text{ y } F_2(\sqrt{a^2 + b^2}, 0).$$

La diferencia de las distancias de un punto de la hipérbola a cada uno de los focos siempre es $2a$.

Ejemplo

Deduce la ecuación de la hipérbola con focos $F_1(-5, 0)$ y $F_2(5, 0)$ y $a = 3$.

De la coordenada en x de los focos se deduce que $c = 5$ y $a = 3$ por hipótesis, para calcular b se tiene que:

$$c^2 - a^2 = b^2, \text{ entonces, } b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Problemas

1. Deduce la ecuación de la hipérbola de cada literal.
   a) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $a = 4$ b) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, $a = 2$ c) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $a = 3$

2. Determina las coordenadas de los focos de cada hipérbola.
   a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

Indicador de logro

4.2 Deduce la ecuación de una hipérbola centrada en el origen dado los focos y el valor de a.

Secuencia

Una vez que los estudiantes reconocen el lugar geométrico que determina una hipérbola, se puede asociar la ecuación deducida de las condiciones de la definición y asociarla con dicha figura geométrica, esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

En la Solución, la relación $b^2 = c^2 - a^2$ está asociada a las condiciones de los cuadrados. En el Ejemplo se presenta la forma de asociar la ecuación de la hipérbola con su definición.

Solución de problemas:

1a) Se tiene que $c = 5$ y $a = 4$ entonces:

$b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$,

por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es:

$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

1b) Se tiene que $c = 3$ y $a = 2$ entonces:

$b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$,

por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es:

$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

1c) Se tiene que $c = 4$ y $a = 3$ entonces:

$b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 = \left(\sqrt{7}\right)^2$,

por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es:

$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

2a) Se tiene que $a^2 = 4^2$ y $b^2 = 3^2$ entonces:

$c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$,

por lo tanto, los focos son:

$F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$.

2b) Se tiene que $a^2 = 5$ y $b^2 = 4$ entonces:

$c^2 = a^2 + b^2 = 5 + 4 = 9 = 3^2$,

por lo tanto, los focos son:

$F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$.

2c) Se tiene que $a^2 = 8$ y $b^2 = 8$ entonces:

$c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 8 = 16 = 4^2$,

por lo tanto, los focos son:

$F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$.

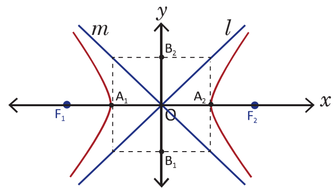
Lección 4

4.3 Elementos y propiedades de la hipérbola

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

a) Determina las coordenadas de los puntos A_1 y A_2.
b) Determina la ecuación de las diagonales del rectángulo que muestra la figura, si $B_1(0, -b)$ y $B_2(0, b)$.



Solución

a) Dado que A_1 y A_2 están sobre el eje x, y pertenecen a la hipérbola, se puede evaluar la ecuación de la hipérbola en $y = 0$. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$ y resolviendo: $\frac{x^2}{a^2} = 1$

$$x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$

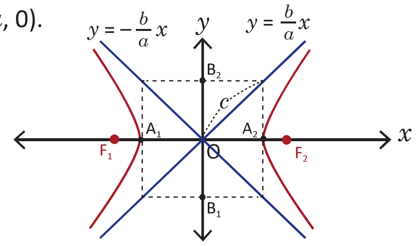
Por lo tanto, las coordenadas de estos puntos son: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$.

b) Para la recta l, dado que pasa por los puntos (a, b) y $(0, 0)$:

Utilizando la ecuación dos puntos: $y = \frac{b}{a}x$.

Para la recta m, dado que pasa por los puntos $(-a, b)$ y $(0, 0)$:

Utilizando la ecuación dos puntos: $y = -\frac{b}{a}x$.

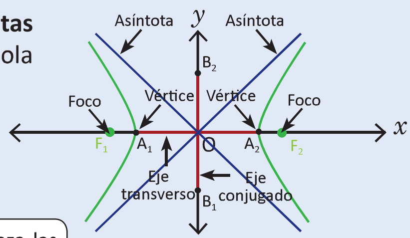


Conclusión

Los puntos A_1 y A_2 de la hipérbola se llaman **vértices**, y tienen coordenadas $A_1(-a, 0)$ y $A_2(a, 0)$. Además, el punto medio del segmento A_1A_2 se conoce como **centro** de la hipérbola.

Las rectas que tienen ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ se llaman **asíntotas** de la hipérbola, y cumplen que sus gráficas se aproximan a la hipérbola pero nunca la tocan.

El segmento de recta cuyos extremos son los vértices de la hipérbola se conoce como **eje transverso**, y el segmento de recta cuyos extremos son los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ se conoce como **eje conjugado**.



Para graficar la hipérbola, primero traza las asíntotas y los vértices.

Ejemplo

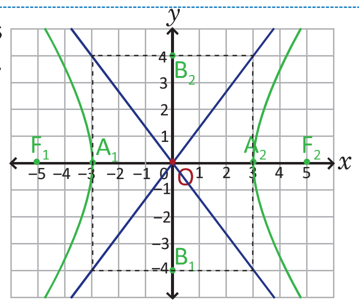
Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano.

Determinando los valores de a, b, c: $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Vértices: $A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$ Focos: $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$

Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$

Al rectángulo formado entre los puntos A_1, A_2, B_1 y B_2 en ocasiones se le llama **rectángulo asintótico**, y puede utilizarse para trazar las asíntotas de la hipérbola a partir de las diagonales de dicho rectángulo.



Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, ecuaciones de las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ d) $x^2 - y^2 = 1$

Indicador de logro

4.3 Identifica los elementos de una hipérbola dada su ecuación para graficarla en el plano cartesiano.

Secuencia

Una vez establecida la ecuación canónica de la hipérbola, se puede trabajar con los estudiantes los diferentes elementos que la conforman incluyendo las asíntotas, y cómo graficarla en el plano cartesiano a partir de ellos.

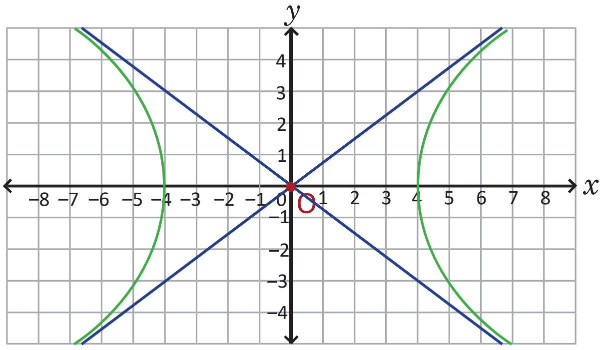
Propósito

En la Solución se presentan los diferentes elementos que tiene una hipérbola en general, y luego se utiliza el Ejemplo para observar la manera de utilizar estos elementos para graficarla en el plano cartesiano.

Solución de problemas:

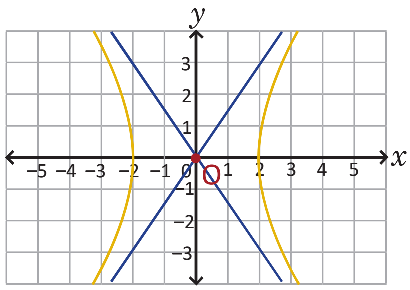
a) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Vértices $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$
Focos $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$
Asíntotas $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4}x$



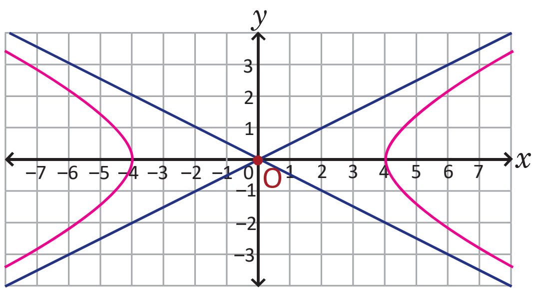
b) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Vértices $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$
Focos $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$
Asíntotas $y = \frac{3}{2}x$, $y = -\frac{3}{2}x$



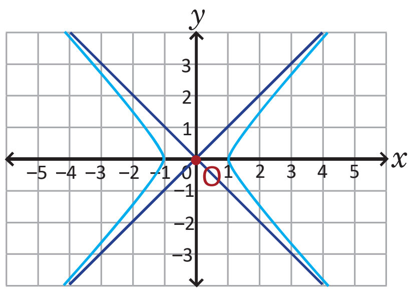
c) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Vértices $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$
Focos $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$, $F_2(2\sqrt{5}, 0)$
Asíntotas $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$



d) Determinando los valores de a, b, c:
$a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Vértices $A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$
Focos $F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$
Asíntotas $y = x$, $y = -x$



Se recomienda no exigir tanta precisión en el bosquejo de la hipérbola, pues para ello sería necesario encontrar otros puntos utilizando su ecuación.

4.4 Desplazamientos paralelos de la hipérbola

Problema inicial

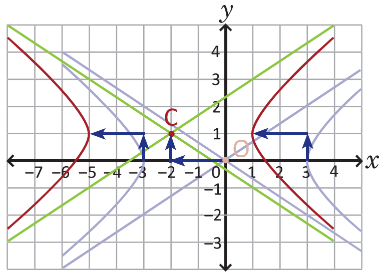
Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

Solución

Considerando la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ y desplazándola 2 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia arriba, se obtiene la ecuación:

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Por lo tanto, la gráfica es la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ con centro (–2, 1).



Conclusión

La ecuación de una hipérbola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente está dada por: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Para graficarla, se puede ubicar el centro y graficarla como si este fuese el origen del plano cartesiano, o bien, graficarla en el origen y desplazarla.

Recuerda que para desplazar una gráfica h unidades horizontalmente, y k unidades verticalmente se cambia la variable x por la expresión $x-h$; y la variable y por la expresión $y-k$.

Ejemplo 1

Determina la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ desplazada –4 unidades horizontalmente y –3 unidades verticalmente.

Tomando la ecuación original y reemplazando x por $[x-(-4)]$, y y por $[y-(-3)]$.

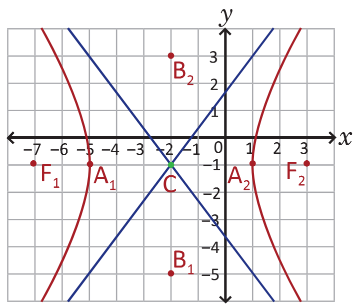
$$\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Ejemplo 2

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

Esta hipérbola es equivalente a $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ desplazada –2 unidades horizontalmente y –1 unidad verticalmente, es decir, tiene centro C(–2, –1).

Ecuación	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$
Vértices	$A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$	$A_1(-5, -1)$, $A_2(1, -1)$
Focos	$F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$	$F_1(-7, -1)$, $F_2(3, -1)$
Asíntotas	$y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$	$y+1 = \frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$, $y+1 = -\frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$



Problemas

1. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

   a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $h = 3$, $k = 1$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, $h = 2$, $k = -4$ c) $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$, $h = -3$, $k = -2$

2. Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de cada hipérbola. Luego grafica en el plano cartesiano.

   a) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ b) $\frac{(x-3)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$ c) $(x+2)^2 - (y+1)^2 = 1$

Indicador de logro

4.4 Encuentra y grafica la ecuación de una hipérbola desplazada paralelamente respecto a los ejes de coordenadas.

Secuencia

Puesto que los estudiantes ya conocen la ecuación de la hipérbola y cómo encontrar los elementos de ella a partir de dicha ecuación, es un momento adecuado para introducir los desplazamientos paralelos en la hipérbola.

Propósito

En la Solución se espera que los estudiantes apliquen lo que ya conocen sobre desplazamientos paralelos tanto de una gráfica, como de un punto, que se vio en la lección sobre parábola y se siguió aplicando en la de circunferencia y elipse.

Solución de problemas:

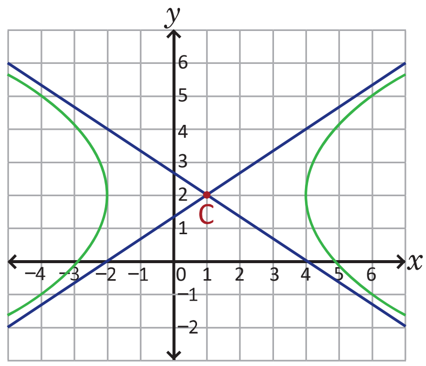
1a) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

1b) $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{[y-(-4)]^2}{5} = 1$, o bien, $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{5} = 1$.

1c) $\frac{[x-(-3)]^2}{21} - \frac{[y-(-2)]^2}{4} = 1$, o bien, $\frac{(x+3)^2}{21} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$.

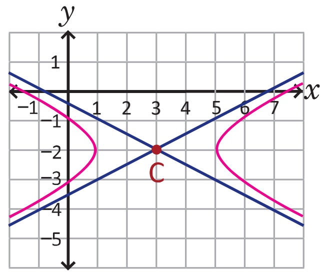
2a)

Ecuación	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
Vértices	$A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$	$A_1(-2, 2)$, $A_2(4, 2)$
Focos	$F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$	$F_1(-\sqrt{13}+1, 2)$, $F_2(\sqrt{13}+1, 2)$
Asíntotas	$y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x$	$y - 2 = \frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$, $y - 2 = -\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$



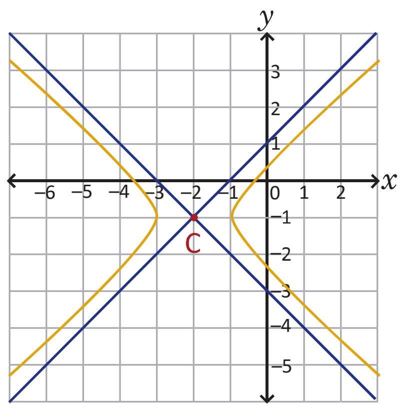
2b)

Ecuación	$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$	$\frac{(x-3)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$
Vértices	$A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$	$A_1(1, -2)$, $A_2(5, -2)$
Focos	$F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$	$F_1(-\sqrt{5}+3, -2)$, $F_2(\sqrt{5}+3, -2)$
Asíntotas	$y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$	$y - 3 = \frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$, $y - 3 = -\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$



2c)

Ecuación	$x^2 - y^2 = 1$	$(x+2)^2 - (y+1)^2 = 1$
Vértices	$A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$	$A_1(-3, -1)$, $A_2(-1, -1)$
Focos	$F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$	$F_1(-\sqrt{2}-2, -1)$, $F_2(\sqrt{2}-2, -1)$
Asíntotas	$y = x$, $y = -x$	$y + 1 = (x+2) \Rightarrow y = x + 1$, $y + 1 = -(x+2) \Rightarrow y = -x - 3$



4.5 Ecuación general de la hipérbola

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$.

Solución

Completando cuadrados para x y para y:

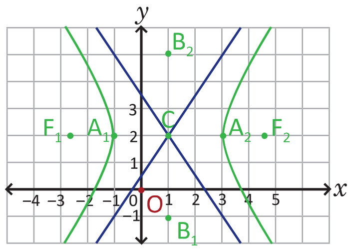
$$9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 4y) - 43 = 0 \quad \text{ordenando y agrupando,}$$

$$9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 - 9 + 16 - 43 = 0 \quad \text{completando cuadrados,}$$

$$\frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y-2)^2}{36} = 1 \quad \text{sumando e igualando a 1,}$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad \text{simplificando.}$$



Por lo tanto, la gráfica es una hipérbola con centro (1, 2), vértices $A_1(-1, 2)$, $A_2(3, 2)$ y asíntotas

$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$, es decir, $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; $y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$, es decir, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Conclusión

Una hipérbola puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ y dejándola igualada a 0.

En general, para determinar el centro, los vértices y asíntotas de una hipérbola cuya ecuación sea de la forma $dx^2 - ey^2 + fx + gy + h = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, para expresar en la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

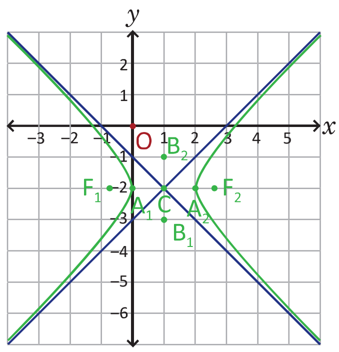
Ejemplo

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$, luego grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 - (y+2)^2 - 1 + 4 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$$



Esta hipérbola es equivalente a $x^2 - y^2 = 1$ desplazada 1 unidad horizontalmente y –2 unidades verticalmente, es decir, tiene centro C(1, –2).

Ecuación	$x^2 - y^2 = 1$	$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$
Vértices	$A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$	$A_1(0, -2)$, $A_2(2, -2)$
Focos	$F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$	$F_1(-\sqrt{2} + 1, -2)$, $F_2(\sqrt{2} + 1, -2)$
Asíntotas	$y = x$, $y = -x$	$y = x - 3$, $y = -x - 1$

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$
b) $25x^2 - 4y^2 - 100x - 16y - 16 = 0$
c) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$
d) $16x^2 - 9y^2 + 32x - 54y - 209 = 0$
e) $x^2 - y^2 - 4y - 8 = 0$
f) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 32 = 0$

Indicador de logro

4.5 Determina los elementos de una hipérbola a partir de su ecuación general y traza su gráfica en el plano cartesiano.

Secuencia

Ahora que los estudiantes ya han aplicado desplazamientos paralelos en la hipérbola, se trabaja con la ecuación general utilizando el procedimiento para completar cuadrados perfectos.

Propósito

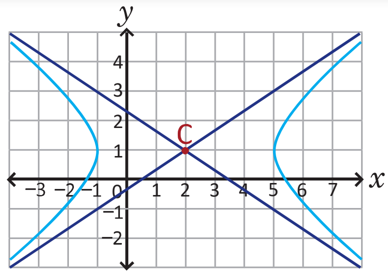
En la clase anterior y en esta quedan ejemplificados los desplazamientos a los 4 cuadrantes del plano cartesiano, para que los estudiantes tengan claridad de los casos.

Solución de problemas:

a) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$

$$4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 = 29 + 16 - 9$$
$$\frac{4(x-2)^2}{36} - \frac{9(y-1)^2}{36} = 1$$
$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

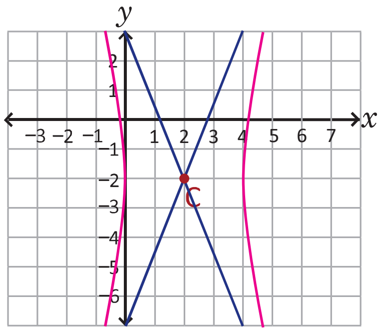
$A_1(-1, 1)$, $A_2(5, 1)$,
$F_1(-\sqrt{13} + 2, 1)$,
$F_2(\sqrt{13} + 2, 1)$
$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$
$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$



b) $25x^2 - 4y^2 - 100x - 16y - 16 = 0$

$$25(x-2)^2 - 4(y+2)^2 = 16 + 100 - 16$$
$$\frac{25(x-2)^2}{100} - \frac{4(y+2)^2}{100} = 1$$
$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

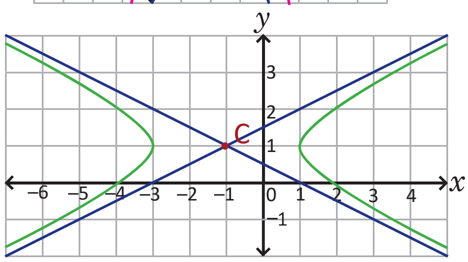
$A_1(0, -2)$, $A_2(4, -2)$,
$F_1(-\sqrt{29} + 2, -2)$,
$F_2(\sqrt{29} + 2, -2)$
$y = \frac{5}{2}x - 7$
$y = -\frac{5}{2}x + 3$



c) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$

$$(x+1)^2 - 4(y-1)^2 = 7 + 1 - 4$$
$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{4(y-1)^2}{4} = 1$$
$$\frac{(x+1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1$$

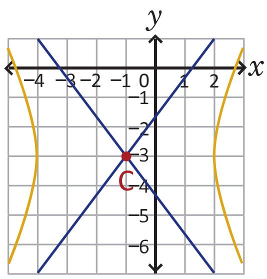
$A_1(-3, 1)$, $A_2(1, 1)$,
$F_1(-\sqrt{5} - 1, 1)$,
$F_2(\sqrt{5} - 1, 1)$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



d) $16x^2 - 9y^2 + 32x - 54y - 209 = 0$

$$16(x+1)^2 - 9(y+3)^2 = 209 + 16 - 81$$
$$\frac{16(x+1)^2}{144} - \frac{9(y+3)^2}{144} = 1$$
$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

$A_1(-4, -3)$, $A_2(2, -3)$,
$F_1(-6, -3)$, $F_2(4, -3)$
$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$
$y = -\frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$



e) $x^2 - y^2 - 4y - 8 = 0$

$$x^2 - (y+2)^2 = 8 - 4$$
$$\frac{x^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$A_1(-2, -2)$, $A_2(2, -2)$,
$F_1(-2\sqrt{2}, -2)$,
$F_2(2\sqrt{2}, -2)$
$y = x - 2$
$y = -x - 2$

f) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 32 = 0$

$$4(x-1)^2 - 9y^2 = 32 + 4$$
$$\frac{4(x-1)^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1$$
$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$A_1(-2, 0)$, $A_2(4, 0)$,
$F_1(-\sqrt{13} + 1, 0)$,
$F_2(\sqrt{13} + 1, 0)$
$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$
$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

4.6 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación de la hipérbola de cada literal.

   a) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $a = 3$ b) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, y vértices $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$.

2. Determina las coordenadas de los focos de cada hipérbola.

   a) $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

3. Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

   a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ b) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

4. Para cada literal determina la ecuación de la hipérbola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

   a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, $h = 2$, $k = 3$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$, $h = -3$, $k = -1$

5. Determina las coordenadas de los vértices, las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano para cada literal.

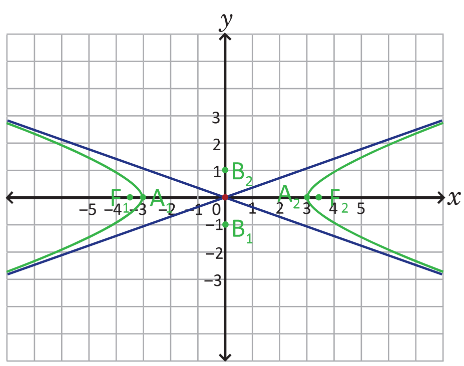
   a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ b) $(x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

6. Determina las coordenadas de los vértices, las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano para cada literal.

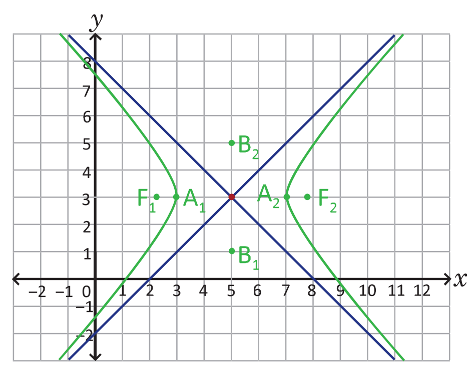
   a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$ b) $9x^2 - y^2 + 6y - 18 = 0$

7. Encuentra la ecuación que determina cada una de las siguientes gráficas.

   a)



   b)



Indicador de logro

4.6 Resuelve problemas correspondientes a la hipérbola.

Solución de problemas:

1a) $b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$, entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

1b) $b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$, entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

2a) $c^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 = \left(\sqrt{13}\right)^2$, y los focos son: $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$.

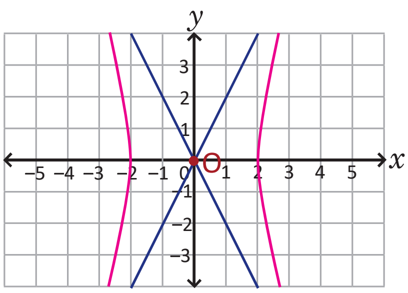
2b) $c^2 = 5 + 4 = 9 = 3^2$, y los focos son: $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$.

2c) $c^2 = 9 + 4 = 13 = \left(\sqrt{13}\right)^2$, y los focos son: $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$.

3a) Vértices $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$

Focos $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$, $F_2(2\sqrt{5}, 0)$

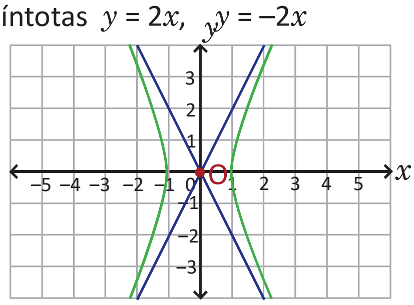
Asíntotas $y = 2x$, $y = -2x$



3b) Vértices $A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$

Focos $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$

Asíntotas $y = 2x$, $y = -2x$



4a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$.

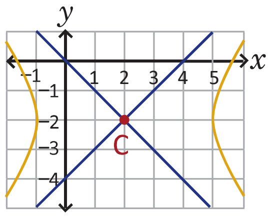
4b) $\frac{[x-(-3)]^2}{9} - \frac{[y-(-1)]^2}{9} = 1$, o bien, $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

5a) $A_1(-1, -2)$, $A_2(5, -2)$,

$F_1(-3\sqrt{2} + 2, -2)$,
$F_2(3\sqrt{2} + 2, -2)$

$y = x - 4$

$y = -x$

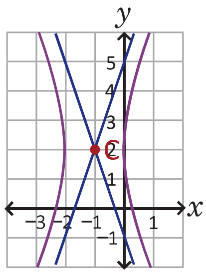


5b) $A_1(-2, 2)$, $A_2(0, 2)$,

$F_1(-\sqrt{10} - 1, 2)$,
$F_2(\sqrt{10} - 1, 2)$

$y = 3x + 5$

$y = -3x - 1$



6a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$

$$(x+1)^2 - 4(y+1)^2 = 19 + 1 - 4$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{4(y+1)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$A_1(-5, -1)$, $A_2(3, -1)$

$F_1(-2\sqrt{5} - 1, -1)$,
$F_2(2\sqrt{5} - 1, -1)$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

6b) $9x^2 - y^2 + 6y - 18 = 0$

$$9x^2 - (y-3)^2 = 18 - 9$$

$$\frac{9x^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$$x^2 - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

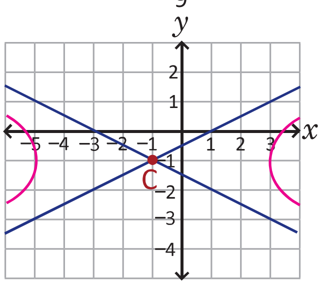
$A_1(-1, 3)$, $A_2(1, 3)$,

$F_1(-\sqrt{10}, 3)$,
$F_2(\sqrt{10}, 3)$

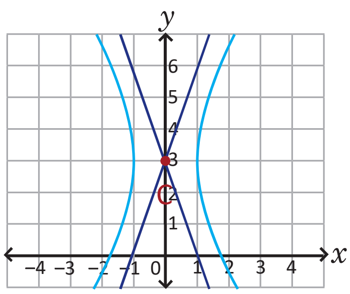
$y = 3x + 3$

$y = -3x + 3$

6a)



6b)



7a) Se identifica que $a = 3$ y $b = 1$, y el centro está en (0, 0), por lo tanto, la ecuación es:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{9} - y^2 = 1.$$

7b) Se identifica que $a = 2$ y $b = 2$, y el centro está en (5, 3), por lo tanto, la ecuación es:

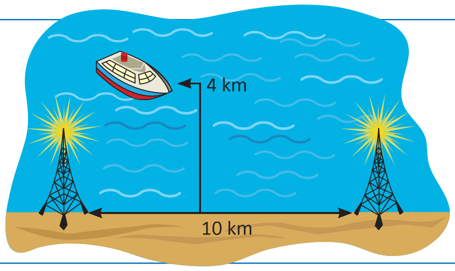
$$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

Lección 4

4.7 Aplicaciones de la hipérbola*

Problema inicial

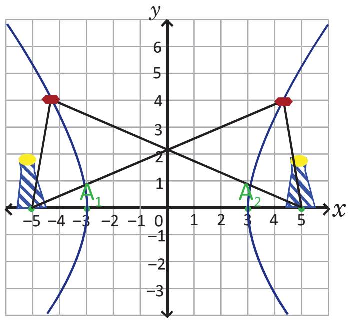
Un barco envía señales hacia dos torres ubicadas sobre la costa a 10 km una de la otra, si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco a una de las torres es 6 km más lejana que la distancia a la otra torre. Determina la posible posición del barco si este navega a 4 km de distancia de la costa.



Solución

Considerando la situación como una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ cuyos focos son las torres, entonces dado que la diferencia de las distancias a las dos torres en ese instante es 6 km, se puede determinar el valor de a, y como también se conoce la distancia entre las dos torres (focos), es posible conocer el valor de c, así:

$$|d_2 - d_1| = 2a = 6, \text{ entonces } a = 3,$$
$$2c = 10, \text{ entonces } c = 5,$$
$$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2.$$



Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola que modela la situación es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$.

Para localizar el barco bastará encontrar la coordenada en x cuando $y = 4$:

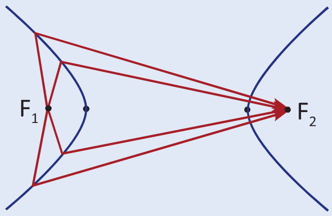
$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{4^2}{4^2} = 1 \quad \text{despejando } x^2:$$
$$x^2 = 2(3^2)$$
$$x = \pm 3\sqrt{2}.$$

El sistema de navegación ruso CHAYKA y el sistema LORAN utilizan este principio para la localización de navíos, sin embargo poco a poco este tipo de sistemas está siendo reemplazado por la localización GPS.

Conclusión

En una hipérbola los focos cumplen una propiedad reflectora importante: si se toma una línea desde un foco esta, será reflejada por la hipérbola exactamente sobre el otro foco.

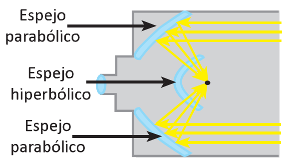
Esta propiedad reflectora parecida a la de la elipse y la parábola; hace de las formas hiperbólicas herramientas de aplicación en diversos ámbitos científicos.



Problemas

1. Las señales de un barco recibidas por un sistema CHAYKA cuyas torres están ubicadas sobre la costa a 26 km una de la otra, si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco a una de las torres es 10 km más lejana que la distancia a la otra torre. Determina la posible posición del barco si este navega a 12 km de distancia de la costa.

2. Un telescopio Maksutov-Cassegrain funciona de modo que recibe las señales de luz, y son reflejadas por un espejo parabólico (cortado) hacia el foco, el cual es foco de otro espejo, pero este es hiperbólico como lo muestra la figura. Determina la función del espejo hiperbólico y explica el funcionamiento del telescopio Maksutov-Cassegrain.



Indicador de logro

4.7 Utiliza las propiedades de los focos y la ecuación de la hipérbola para resolver problemas sobre objetos hiperbólicos.

Secuencia

Después de abordar los conceptos básicos sobre la hipérbola, se pueden analizar y resolver algunos problemas sobre aplicaciones a la vida real, basados fundamentalmente en la propiedad reflectora de la hipérbola. Esta clase tiene asterisco, lo que indica que el docente debe dar mayor apoyo a sus estudiantes.

Propósito

En las soluciones a los Problemas los estudiantes deben modelar una situación a partir de conceptos matemáticos, para luego resolverlos e interpretar la respuesta obtenida para dar solución al problema original.

Solución de problemas:

1. Resolviendo como el Problema inicial, se considera la situación como una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ cuyos focos son las torres, entonces dado que la diferencia de las distancias a las dos torres en ese instante es 10 km, se puede determinar el valor de a, y como también se conoce que la distancia entre las dos torres es 26 km (focos), es posible conocer el valor de c, así:

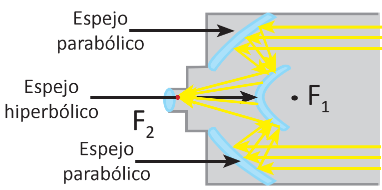
$$|d_2 - d_1| = 2a = 10, \text{ entonces } a = 5,$$
$$2c = 26, \text{ entonces } c = 13,$$
$$b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola que modela la situación es: $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1$.

Para localizar el barco bastará con encontrar la coordenada en x cuando $y = 12$:

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{12^2}{12^2} = 1 \quad \text{despejando } x^2.$$
$$x^2 = 2(5^2)$$
$$x = \pm 5\sqrt{2}$$

2. Para este problema es suficiente con que los estudiantes comprendan que por la propiedad reflectora del foco de la parábola, los rayos de luz captados son reflejados hacia el foco F_1 el cual es compartido por el espejo hiperbólico, cuya propiedad hace reflejar los rayos desde dicho foco F_1 hacia el otro foco F_2 de la hipérbola, el cual en este caso coincide con el ocular del telescopio, en donde se observa lo que capta el telescopio.



Lección 4

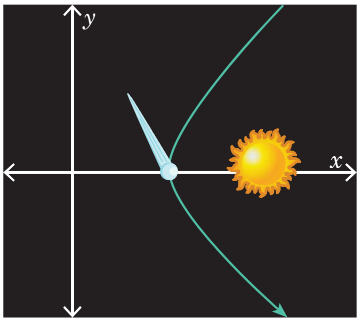
4.8 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas de aplicación de hipérbola. Modela cada situación en el plano cartesiano.

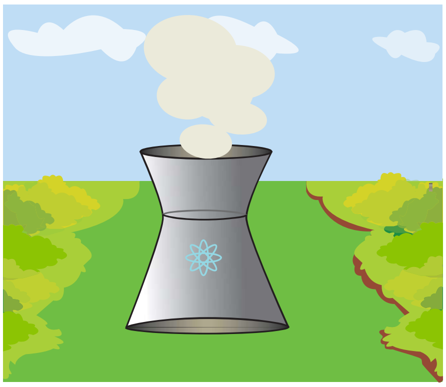
1. En el universo las trayectorias de un cometa pueden tener diversas formas, como elípticas, parabólicas o hiperbólicas, siempre teniendo al Sol como foco de dichas figuras. Tomando un cometa cuya trayectoria es hiperbólica (solo será visto una vez en la historia), cuya ecuación está dada por:

$$\frac{x^2}{20^2} - \frac{y^2}{21^2} = 1$$

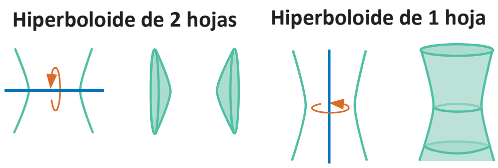
Donde los números 20 y 21 representan cuatrillones de metros. Determina la distancia mínima en que pasará el cometa con dicha trayectoria del sol.



2. Las torres de enfriamiento de las plantas nucleares de energía se diseñan con forma de hiperboloide de una hoja, si el diámetro de la parte más alta es 3.75 m y se ubica a 9 m de altura, y el diámetro más pequeño es de 3 m y se ubica a 6 m de altura, determina aproximadamente el diámetro de la base de la torre.



Una forma de hiperboloide es un cuerpo geométrico que resulta de girar una hipérbola alrededor de alguno de sus ejes. Si se gira alrededor del **eje transverso** se conoce como **hiperboloide de 2 hojas** y si se gira alrededor del **eje conjugado** se conoce como **hiperboloide de 1 hoja**.

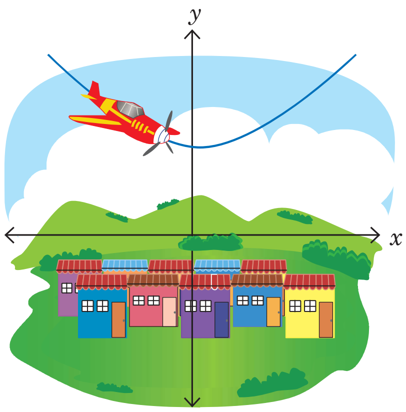


3. La torre de Polibino fue la primera estructura diseñada con forma de hiperboloide. Si el diámetro de la parte más alta de una torre hiperboloide es $4\sqrt{5}$ m y se ubica a 32 m de altura, y el diámetro más pequeño es de 4 m y se ubica a 16 m de altura, determina el diámetro de la base de la torre.

La torre de Polibino fue construida por el ingeniero ruso Vladimir Shújov, y la construcción de torres hiperboloides fue patentada por el mismo Shújov en el año 1896.

4. Una avioneta vuela sobre la ciudad de San Vicente y describe una trayectoria hiperbólica dada por la ecuación $4y^2 - x^2 = 2\,500$.

Determina cuál es la menor distancia sobre el nivel del suelo a la que estará dicha avioneta.



Indicador de logro

4.8 Resuelve problemas de aplicación de la hipérbola.

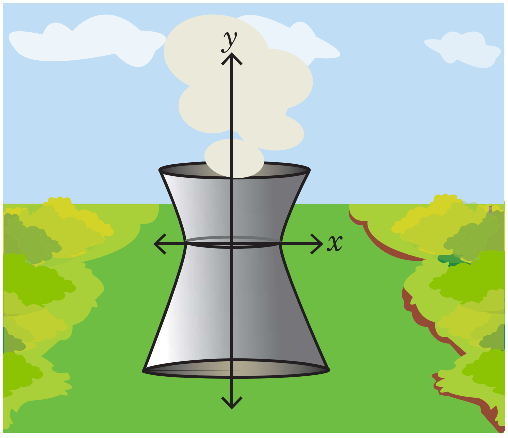
Solución de problemas:

1. Puesto que el sol es el foco, la menor distancia se dará en uno de los vértices de la hipérbola, calculando los valores a, b y c de la ecuación de la hipérbola se tiene que:

$$a = 20,\ b = 21 \text{ y } c = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29.$$

Entonces el sol está en el punto $(c, 0)$ y el vértice de la trayectoria hiperbólica por la que pasa el cometa pasa por el punto $(a, 0)$, es decir, que la distancia mínima entre el sol y la trayectoria del cometa es $c - a$; entonces, la distancia mínima es 29 – 20 = 9 cuatrillones de metros.

2. Localizando el centro del plano cartesiano justo en el centro de la circunferencia de radio más pequeño de la torre, puesto que el diámetro en esta parte es de 3 m, entonces $a = 1.5$, y además se cumple que la distancia del eje conjugado a un punto en la circunferencia más alta es 1.875 y está a una altura respecto del eje transversal de 9 – 6 = 3 metros, por lo tanto, la hipérbola pasa por el punto (1.875, 3). Luego, utilizando la ecuación de la hipérbola:



$$\frac{x^2}{1.5^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Evaluando el punto (1.875, 3) en la hipérbola:

$$\frac{1.875^2}{1.5^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1.$$

Expresando los decimales como fracciones y encontrando el valor de b^2:

$$\frac{\frac{\cancel{15^2}\,1}{\cancel{8^2}\,4}}{\frac{\cancel{15^2}\,1}{\cancel{10^2}\,5}} - \frac{3^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{5^2}{4^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{b^2} \Rightarrow \frac{9}{16} = \frac{9}{b^2} \Rightarrow b^2 = 16.$$

Por lo tanto, la hipérbola tiene ecuación $\frac{x^2}{1.5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, y evaluando en el punto que corresponde al nivel del suelo, es decir, $y = -6$, y encontrando x:

$$\frac{x^2}{1.5^2} - \frac{(-6)^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1.5^2} = 1 + \frac{\cancel{36}\,9}{\cancel{16}\,4} \Rightarrow x^2 = 1.5^2\left(1 + \frac{9}{4}\right) \Rightarrow x^2 = 1.5^2\left(\frac{13}{4}\right) \Rightarrow x = \pm\frac{3\sqrt{13}}{4}.$$

Por lo tanto, el diámetro de la parte más baja (considerando el valor positivo de x) es $2 \times \frac{3\sqrt{13}}{4} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$.

3. De manera muy similar al problema anterior, se calcula el valor de b^2: $\frac{(2\sqrt{5})^2}{2^2} - \frac{16^2}{b^2} = 1 \Rightarrow 5 - 1 = \frac{16^2}{b^2}$
$\Rightarrow b^2 = \frac{16^2}{4} = 4(16) = 64.$

Por lo tanto, la hipérbola tiene ecuación $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$, y evaluando en el punto que corresponde al nivel del suelo, es decir, $y = -16$, y encontrando x:

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{(-16)^2}{8^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 + 4 \Rightarrow x^2 = 5(4) \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{5}.$$

Por lo tanto, el diámetro de la parte más baja es $2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

4. Se expresa la hipérbola en forma canónica, dividiendo por 2 500: $\frac{4y^2}{2\,500} - \frac{x^2}{2\,500} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25^2} - \frac{x^2}{50^2} = 1.$

Luego se asocia la ecuación a una hipérbola vertical (analizar de manera análoga intercambiando x y y) por lo tanto, el vértice sería el punto más cerca a la ciudad, el cual está en el punto (0, 25), por lo tanto, la menor distancia a la que pasará la avioneta del suelo es de 25 metros.

4.9 Problemas de la unidad

Piensa cómo sería la ecuación de una parábola horizontal.

1. Grafica la parábola determinada por cada ecuación en el plano cartesiano.

a) $x = 2y^2$ b) $x = -3y^2$ c) $x + 1 = (y - 2)^2$ d) $x + 2 = -(y + 1)^2$

Piensa cómo sería la ecuación de una elipse vertical.

2. Grafica la elipse determinada por cada ecuación en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ c) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ d) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

Piensa cómo sería la ecuación de una hipérbola vertical.

3. Grafica la hipérbola determinada por cada ecuación en el plano cartesiano.

a) $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ c) $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$ d) $\frac{(y-2)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$

4. Clasifica las siguientes ecuaciones según el tipo de figura que determinan en el plano cartesiano, parábola, circunferencia, elipse o hipérbola.

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \neq b$ b) $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ c) $x^2 + y^2 = r^2$ d) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

e) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ f) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ g) $y = \frac{1}{4p}x^2$ h) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, a \neq b$

5. Determina qué tipo de figura (parábola, circunferencia, elipse o hipérbola) corresponde a cada ecuación.

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ c) $y^2 + x + 4y + 4 = 0$

d) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 7 = 0$ e) $2x^2 - 4x - y + 4 = 0$ f) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

g) $9x^2 + 4y^2 - 16y - 20 = 0$ h) $9x^2 - 9y^2 - 18x + 54 = 0$ i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

j) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$ k) $y^2 + x + 2y + 3 = 0$ l) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$

En resumen

Las cuatro figuras estudiadas (parábola, circunferencia, elipse e hipérbola) reciben el nombre de **cónicas**, y están dadas por los siguientes tipos de ecuaciones:

$y = \frac{1}{4p}x^2$	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parábola	**Circunferencia**	**Elipse**	**Hipérbola**

Estas figuras pueden tener variantes, como estar en posición horizontal o vertical, desplazadas o expresadas con todas las operaciones desarrolladas e igualadas a cero. En general, las ecuaciones presentadas arriba se conocen como: **ecuaciones canónicas** de dichas figuras.

Indicador de logro

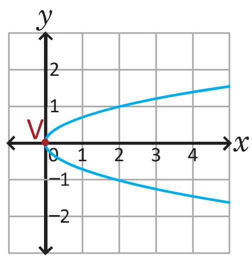
4.9 Resuelve problemas correspondientes a las secciones cónicas.

Propósito

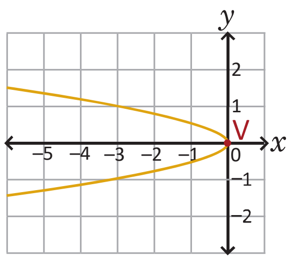
En estos problemas hay que orientar a los estudiantes a que los piensen como si se intercambiaran los ejes de coordenadas, es decir, como si el eje y fuera el eje x, e identificar que todas las graficas son parábolas, elipses o hipérbolas rotadas 90°.

Solución de problemas:

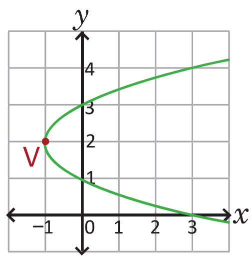
1a) $x = 2y^2$



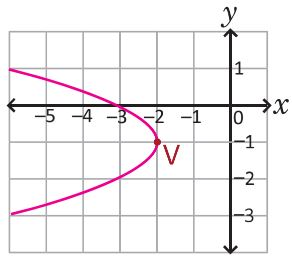
1b) $x = -3y^2$



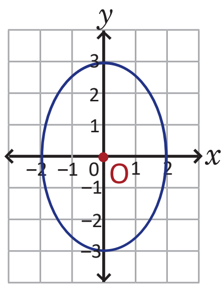
1c) $x + 1 = (y - 2)^2$



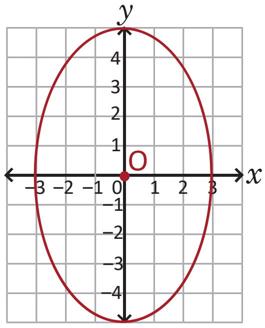
1d) $x + 2 = -(y + 1)^2$



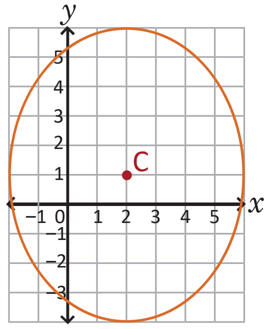
2a) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$



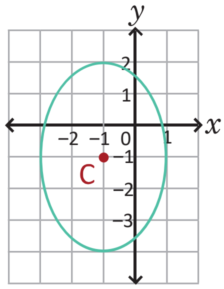
2b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$



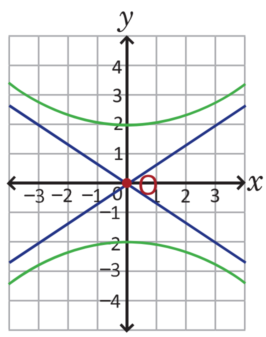
2c) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$



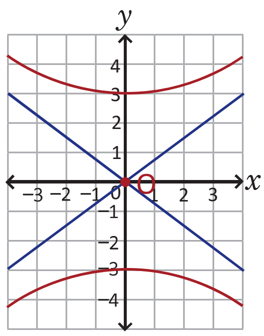
2d) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$



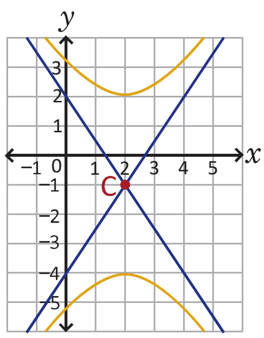
3a) $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$



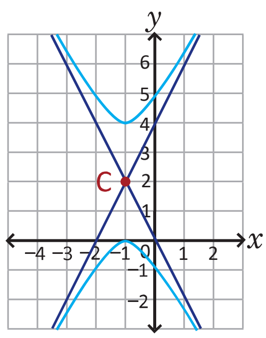
3b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$



3c) $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$



3d) $\frac{(y-2)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$



4.

Parábolas	Circunferencias	Elipses	Hipérbolas
b) $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$	c) $x^2 + y^2 = r^2$	a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	d) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
g) $y = \frac{1}{4p}x^2$	e) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	h) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	f) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

5. En este problema se puede inducir a los estudiantes para que analicen e identifiquen las características de la ecuación general de las secciones cónicas. Primero se observa que no hay término xy, luego, si alguno de los coeficientes de x^2 o y^2 es cero, entonces es una parábola; si son iguales y positivos, entonces hay que completar cuadrados perfectos para determinar si es una circunferencia, un punto o no determina una figura en el plano cartesiano; si son diferentes y positivos, entonces hay que completar cuadrados perfectos para determinar si es una elipse o si no determina una figura en el plano cartesiano; y si son diferentes y alternados (uno positivo y el otro negativo), entonces es una hipérbola.

5a) Es elipse porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero y positivos, y al completar cuadrados perfectos se llega a la ecuación: $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

5b) Es circunferencia porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero e iguales, y al completar cuadrados perfectos se llega a la ecuación: $x^2 + (y + 2)^2 = 1$.

5c) Es parábola porque el coeficiente de x^2 es cero.

5d) Es hipérbola porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero y alternados.

5e) Es parábola porque el coeficiente de y^2 es cero.

5f) Es circunferencia porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero e iguales, y al completar cuadrados perfectos se llega a la ecuación: $(x + 1)^2 + y^2 = 9$.

5g) Es elipse porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero y positivos, y al completar cuadrados perfectos se llega a la ecuación: $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

5h) Es hipérbola porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero y alternados.

5i) Es circunferencia porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero e iguales, y al completar cuadrados perfectos se llega a la ecuación: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

5j) Es hipérbola porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero y alternados.

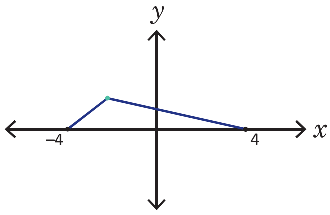
5k) Es parábola porque el coeficiente de x^2 es cero.

5l) Es elipse porque los coeficientes de x^2 y y^2 son diferentes de cero y positivos, y al completar cuadrados perfectos se llega a la ecuación: $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$.

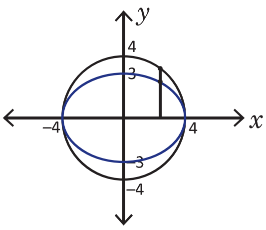
No se recomienda que en este problema se completen cuadrados perfectos para cada caso, porque se volvería un problema muy largo, es mejor hacer énfasis en el análisis de la ecuación general de las secciones cónicas, solamente es necesario completar cuadrados para el caso de la circunferencia y la elipse. Además, este problema será retomado en la práctica de GeoGebra para que posteriormente corroboren las respuestas.

4.10 Problemas de la unidad

1. La base de un triángulo tiene longitud fija y sus vértices se ubican en los puntos (–4, 0) y (4, 0), determina el lugar geométrico que describe el otro vértice si se cumple que el producto de las pendientes de los lados variables siempre es igual a 4.

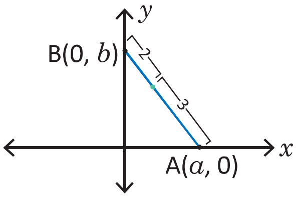


2. Determina el lugar geométrico que resulta de tomar una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y reducir las coordenadas en y de cada punto de ella a $\frac{3}{4}$.



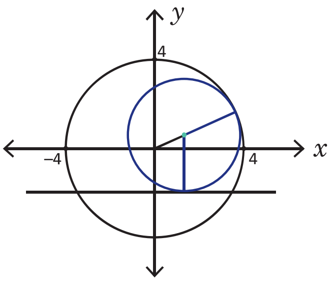
En este ejercicio se puede observar cómo una elipse puede ser vista como una circunferencia reducida respecto a una dirección a una razón constante.

3. Tomando un segmento AB de longitud 5 sobre el plano cartesiano, que cumple que el punto A se mueve sobre el eje x y el punto B sobre el eje y. Determina el lugar geométrico de los puntos del segmento AB que cumplen estar a una proporción 3:2.



Puedes asumir las coordenadas de A(a, 0) y las de B(0, b), utiliza el Teorema de Pitágoras para establecer una ecuación. Luego puedes calcular las coordenadas de un punto sobre un segmento dividido a una razón dada.

4. Identifica el lugar geométrico que determina el centro de una circunferencia cuyo radio varía de modo que siempre sea tangente a la recta $y + 2 = 0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Asumiendo que dicha circunferencia siempre se mueve por encima de la recta y adentro de la circunferencia.

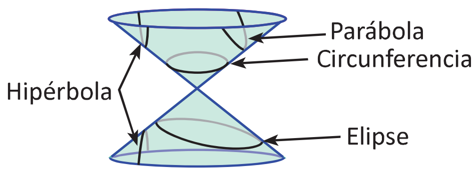


Determina la relación que existe entre las distancias del centro de la circunferencia variable a la recta y al centro de la circunferencia fija.

En resumen

Todas las figuras cónicas son llamadas de esta manera porque todas se pueden obtener de realizar cortes por un plano sobre un cono de doble hoja como lo muestra la figura.

Puedes encontrar información acerca de las cónicas en el video oficial del Ministerio de Educación de El Salvador (MINED) titulado "Cónicas", en la dirección https://goo.gl/Lq3dGW.



Indicador de logro

4.10 Resuelve problemas correspondientes a las secciones cónicas.

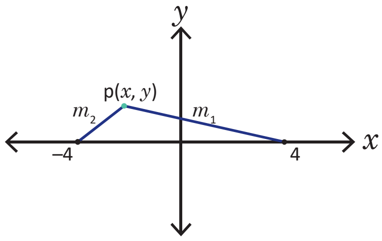
Propósito

Analizar los problemas e interpretar la información de cada uno para expresarlo de forma matemática a partir de conceptos ya conocidos.

Solución de problemas:

1. Se puede considerar el otro vértice como el punto P(x, y), entonces encontrando las pendientes:

$$m_1 = \frac{y-0}{x-4} = \frac{y}{x-4} \qquad m_2 = \frac{y-0}{x-(-4)} = \frac{y}{x+4}$$



entonces se debe cumplir que el producto de las pendientes debe ser 4, es decir $m_1 m_2 = 4$, entonces:

$$\frac{y}{x-4} \times \frac{y}{x+4} = 4 \Rightarrow \frac{y^2}{x^2-16} = 4 \Rightarrow y^2 = 4(x^2-16) \Rightarrow y^2 - 4x^2 + 64 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

Por lo tanto, el lugar geométrico que describen los puntos que cumplen las condiciones del problema es la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$.

2. Se puede considerar el punto P(x', y') de la figura que redujo cada coordenada en y de la circunferencia en $\frac{3}{4}$, entonces el punto correspondiente en la circunferencia tendrá coordenadas $(x, y) = (x', \frac{4}{3}y')$, entonces satisface la ecuación de la circunferencia:

$$x'^2 + \left(\frac{4}{3}y'\right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{x'^2}{16} + \frac{\cancel{16}y'^2}{9(\cancel{16})} = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{4^2} + \frac{y'^2}{3^2} = 1.$$

Por lo tanto, el lugar geométrico que resulta de tomar una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y reducir las coordenadas en y de cada punto de ella a $\frac{3}{4}$ es la elipse $\frac{x'^2}{4^2} + \frac{y'^2}{3^2} = 1$.

En este problema hay que tener cuidado e interpretar bien la información al momento de sustituir en la ecuación de la circunferencia.

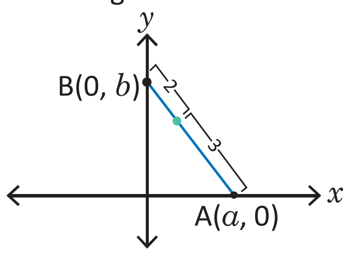
3. Se pueden considerar los puntos P(x, y) que están en proporción 3:2 en el segmento AB, entonces por Pitágoras se sabe que $AO^2 + OB^2 = AB^2$, luego $a^2 + b^2 = 5^2$, además utilizando la fórmula de proporcionalidad vista en la Unidad 2 de línea recta:

$$(x, y) = \left(\frac{2(a)+3(0)}{3+2}, \frac{2(0)+3(b)}{3+2}\right) \Rightarrow \frac{2a}{5} = x \text{ y } \frac{3b}{5} = y \Rightarrow a = \frac{5x}{2} \text{ y } b = \frac{5y}{3}.$$

Ahora se sustituye en la ecuación planteada a partir de la relación del Teorema de Pitágoras:

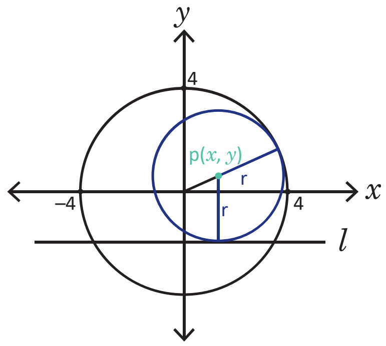
$$\left(\frac{5x}{2}\right)^2 + \left(\frac{5y}{3}\right)^2 = 25 \Rightarrow \frac{\cancel{25}x^2}{4(\cancel{25})} + \frac{\cancel{25}y^2}{9(\cancel{25})} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Por lo tanto, el lugar geométrico que resulta de los puntos del segmento AB que cumplen estar a una proporción 3:2 es la elipse $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.



4. Considerando el centro de la circunferencia interior como P(x, y), entonces, la distancia a la recta y = –2 sería d(P, l) = y + 2; además la distancia entre los centros de las circunferencias es:

$$d(\text{P, O}) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Dicha distancia también se puede calcular como la diferencia entre el radio de la circunferencia grande (4) menos el radio de la pequeña (y + 2), entonces:

$$d(\text{P, O}) = 4 - (y + 2).$$

Entonces, $\sqrt{x^2 + y^2} = 4 - (y + 2) \Rightarrow x^2 + y^2 = (2 - y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 - 4y + y^2 \Rightarrow x^2 + 4y - 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$.

Por lo tanto, el lugar geométrico que determina el centro de la circunferencia es la parte de $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ donde $-2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}$.

Lección 5 Práctica en GeoGebra

5.1 Práctica en GeoGebra: construcción de secciones cónicas

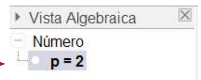
En esta práctica se construirán gráficas de secciones cónicas a partir del uso de variables, de modo que, al dar valores diferentes del centro, parámetro, longitudes de los ejes, etc., se puedan construir secciones cónicas de la misma familia (parábolas, circunferencias, elipses o hipérbolas). Sigue los pasos indicados en la parte de "Práctica" para construir la cónica. Luego trabaja en GeoGebra la parte "Actividades" que está al final de esta práctica.

Práctica

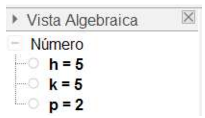
Construcción de una parábola de parámetro p y vértice (h, k).

1. Ingresa en la barra de entrada la variable p con valor de 2 digitando p = 2.

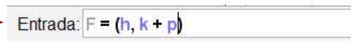
2. Presiona "enter" para obtener en la Vista Algebraica (panel izquierdo) la expresión de la derecha.



3. De la misma manera introduce las variables h y k, con valor de 5 para ambas variables, en la Vista Algebraica se tendrá un resultado como el que muestra la imagen de la derecha.

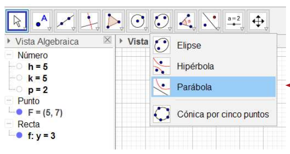


4. Grafica el foco, digitando en la barra de entrada F = (h, k + p), el punto F (foco) aparecerá en la vista gráfica.

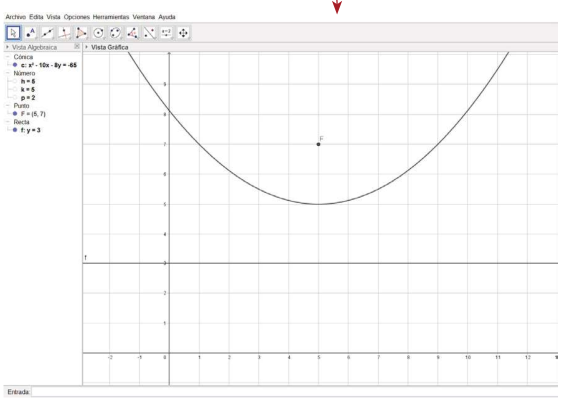


5. Grafica la directriz, digitando en la barra de entrada y = k – p, la recta directriz aparecerá en la vista gráfica.

6. En el botón de cónicas, selecciona la opción Parábola.



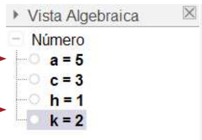
7. A continuación selecciona el punto F (ya sea en la Vista Gráfica o en la Algebraica) y luego selecciona la recta directriz. Se obtendrá la gráfica que se muestra abajo.



8. Puedes cambiar los valores de las variables p, h, k dando doble clic sobre ellas en la Vista Algebraica para corroborar las respuestas de los problemas de la lección 1. También puedes ver las formas de la ecuación de la parábola dando clic derecho sobre la ecuación de la cónica en la Vista Algebraica para expandir todas las opciones.

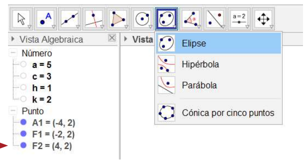
Construcción de una elipse conocidos los valores de a, c y centro (h, k).

1. Ingresa las variables a, c, h y k desde la barra de entrada con valores de 5, 3, 1 y 2 respectivamente. En la Vista Algebraica se obtendrá un resultado como el que muestra la figura de la derecha.

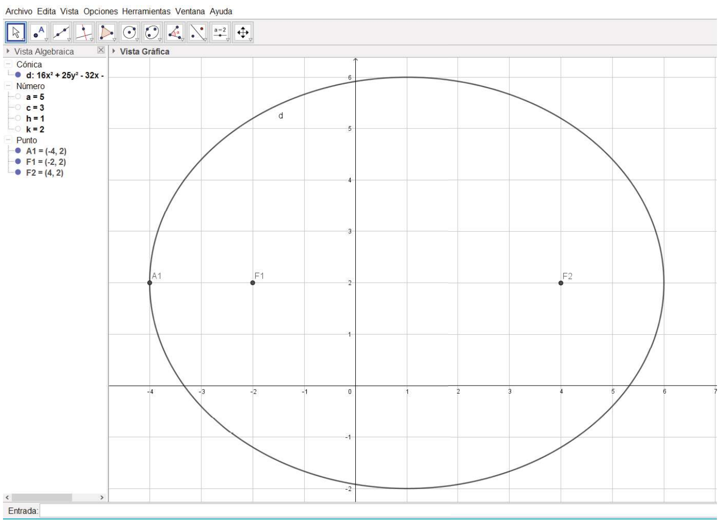


2. Grafica los focos y un vértice, digitando las coordenadas de los puntos F_1, F_2 y A_1 de la forma F1 = (h - c, k), F2 = (h + c, k) y A1 = (h - a, k). Los puntos aparecerán en la vista gráfica.

3. En el botón de cónicas, selecciona la opción Elipse.



4. A continuación selecciona el punto F1 luego selecciona el punto F2 y finalmente el punto A1 (vértice). Se obtendrá la gráfica que se muestra abajo.



5. Puedes cambiar los valores de las variables a, c, h y k dando doble clic sobre ellas en la Vista Algebraica para corroborar las respuestas de los problemas de la lección 3. También puedes ver las formas de la ecuación de la elipse dando clic derecho sobre la ecuación de la cónica en la Vista Algebraica para expandir todas las opciones.

Actividades

1. Construye una circunferencia con los valores del centro (h, k) y el radio r.
2. Construye una hipérbola con valores de a, c y centro (h, k).
3. Verifica las respuestas de los problemas que resolviste durante las clases de toda la unidad y corrobora que están correctos.
4. Contruye una parábola horizontal.
5. Contruye una elipse vertical.
6. Contruye una hipérbola vertical.

Indicador de logro

5.1 Utiliza un software matemático para graficar y localizar los elementos de las cónicas a partir de su forma canónica.

Secuencia

Ahora que los estudiantes ya conocen los contenidos teóricos sobre las secciones cónicas, se enriquecerá introduciendo la herramienta de GeoGebra para realizar y comprobar los procedimientos teóricos y conocer más sobre este software matemático.

Propósito

Esta práctica está enfocada en que los estudiantes construyan las diferentes cónicas en GeoGebra de manera general y luego puedan cambiar los valores variables para cada ejercicio resuelto y comprobar el trabajo realizado de forma teórica a partir de este software.

Solución de problemas:

1. Para construir la circunferencia es suficiente crear las variables r, h, k de manera análoga a como se hizo en la práctica y luego utilizar la opción circunferencia (centro, radio) del botón circunferencia.

2. Para construir la hipérbola es muy parecido a la construcción de la elipse, ya que es suficiente crear las variables a, b, h, k de manera análoga a como se hizo en la práctica y luego graficar los focos y un vértice al igual que en la elipse, haciendo F1 = (h - c, k), F2 = (h + c, k) y A1 = (h - a, k), para luego utilizar la opción hipérbola del botón cónicas y seleccionar primero los focos y luego el vértice.

3. Este apartado es únicamente para comprobar los problemas que tenían que ver con graficar alguna cónica, y pueden ser tomados de las clases: 1.4, 1.5, 1.10, 2.1, 2.2, 2.6, 3.3, 3.4, 3.6, 4.3, 4.4 y 4.6; y algún resultado sobre rectas, aplicando las prácticas de la unidad 2.

4. Este problema es muy similar a la parábola vertical, pues se deben crear las variables p, h, k; solamente hay que cambiar la fórmula para el foco, que ahora será F = (h + p, k) y también hay que cambiar la ecuación de la directriz que ahora será x = h – p, luego de manera similar se selecciona la opción parábola del botón cónicas y luego seleccionar el foco y la directriz.

5. Este problema es muy parecido a la construcción de la elipse horizontal, es suficiente crear las variables a, c, h, k de manera análoga a como se hizo en la práctica y solamente cambiar cómo se definen los focos y el vértice, haciendo F1 = (h, k - c), F2 = (h, k + c) y A1 = (h, k - a), para luego utilizar la opción elipse del botón cónicas y seleccionar primero los focos y luego el vértice.

6. Este problema es muy parecido a la construcción de la hipérbola horizontal, es suficiente crear las variables a, c, h, k de manera análoga a como se hizo en la práctica y solamente cambiar cómo se definen los focos y el vértice, haciendo F1 = (h, k - c), F2 = (h, k + c) y A1 = (h, k - a), para luego utilizar la opción hipérbola del botón cónicas y seleccionar primero los focos y luego el vértice.

Se recomienda que los estudiantes guarden cada actividad en archivos separados, desde el inicio de la práctica, pues pueden retomarlos para la realización de las demás actividades; además, se recomienda que estos archivos estén guardados en algún espacio determinado (ya sea de una computadora o de una memoria USB) para las clases posteriores, en especial para la clase 5.3.

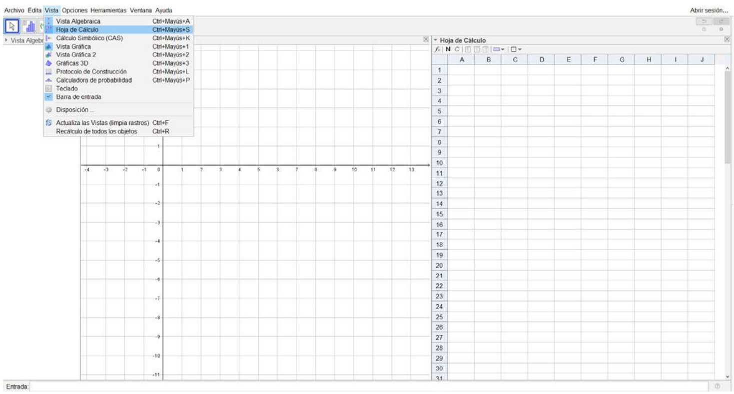
5.2 Práctica en GeoGebra: gráfica de la ecuación general de cónicas

En esta práctica se utilizará la Hoja de Cálculo de GeoGebra para graficar cónicas dada una ecuación en forma general, así será más sencillo identificar el tipo de cónica que está expresada, e incluso se puede utilizar la Vista Algebraica para obtener la ecuación en forma canónica. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de "Práctica" y construye la ecuación general para graficar la cónica correspondiente. Luego trabaja en GeoGebra la parte "Actividades" que está al final de esta práctica.

Práctica

Gráfica de la cónica dada por su ecuación general.

1. Abre el menú Vista y selecciona la opción Hoja de Cálculo.



2. Ubícate en la fila 1 y digita los valores 4, –1, 8, –2, 7, uno en cada columna, como lo muestra la figura de la derecha.

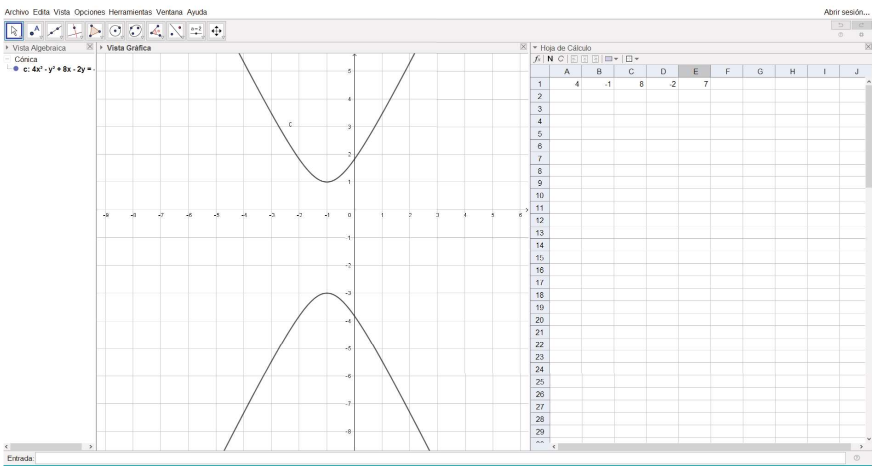
Hoja de Cálculo

	A	B	C	D	E	F
1	4	-1	8	-2	7	
2						

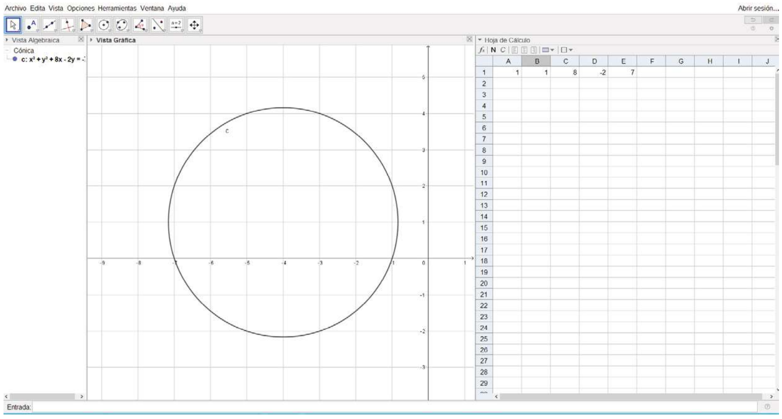
3. Ahora digita en la barra de entrada la ecuación general, tomando como coeficiente de x^2, y^2, x, y y la constante, los valores de la celda A1, B1, C1, D1 y E1 respectivamente, de la siguiente manera: A1*x^2 + B1*y^2 + C1*x + D1*y + E1 = 0.

Entrada: A1*x^2 + B1*y^2 + C1*x + D1*y + E1 = 0

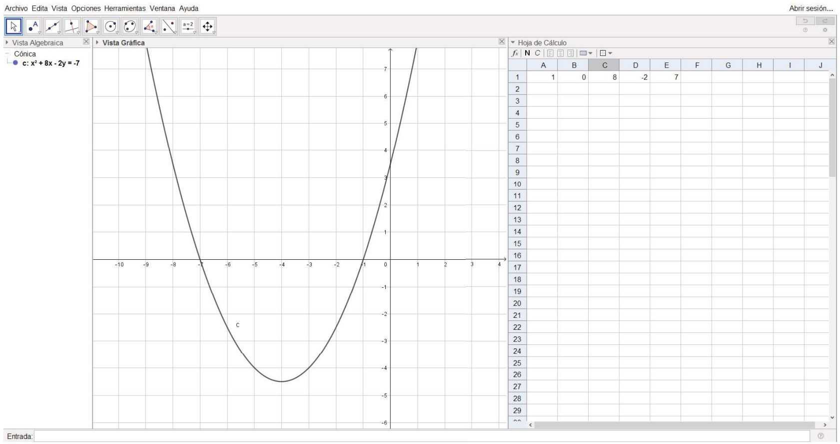
4. Al introducir la ecuación se muestra la gráfica de una hipérbola en la Vista Gráfica, como lo muestra la imagen de abajo.



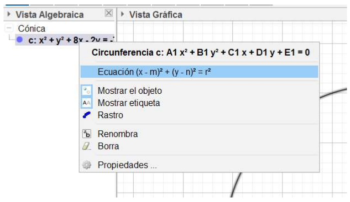
5. Cambiando el valor de las celdas A1 y B1 a 1, se obtiene la gráfica de una circunferencia.



6. Cambiando el valor de la celda B1 a 0, se obtiene una parábola.



7. Cambia la ecuación a la forma canónica, dando clic derecho sobre la ecuación y seleccionándola. Como muestra la figura.



Actividades

Identifica qué tipo de cónica es cada una de las siguientes ecuaciones, verifica si tu respuesta del problema 5 de la clase 4.9 es correcta, si no, determina cuál fue el error.

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$
c) $y^2 + x + 4y + 4 = 0$
d) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 7 = 0$
e) $2x^2 - 4x - y + 4 = 0$
f) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$
g) $9x^2 + 4y^2 - 16y - 20 = 0$
h) $9x^2 - 9y^2 - 18x + 54 = 0$
i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$
j) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$
k) $y^2 + x + 2y + 3 = 0$
l) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$

Indicador de logro

5.2 Grafica la cónica determinada por una ecuación general utilizando un software matemático adecuado.

Secuencia

Después de abordar las formas canónicas de las secciones cónicas, se puede avanzar a analizar la ecuación general de las secciones cónicas.

Propósito

En la práctica se utilizará el entorno de la Hoja de Cálculo, así como se utilizó en Primer año de Bachillerato en la práctica en GeoGebra de la unidad de estadística descriptiva.

Solución de problemas:

En esta actividad se espera que los estudiantes corroboren a partir de la gráfica, la respuesta que dieron en los problemas de la unidad.

a) La gráfica es una elipse.

b) La gráfica es una circunferencia.

c) La gráfica es una parábola

d) La gráfica es una hipérbola.

e) La gráfica es una parábola.

f) La gráfica es una circunferencia.

g) La gráfica es una elipse.

h) La gráfica es una hipérbola.

i) La gráfica es una circunferencia.

j) La gráfica es una hipérbola.

k) La gráfica es una parábola.

l) La gráfica es una elipse.

Si los estudiantes terminan rápidamente la práctica y las actividades propuestas, entonces se puede indicar que los estudiantes corroboren las gráficas de los problemas de las clases 1.7, 2.3, 3.5, 4.5.

5.3 Práctica en GeoGebra: propiedades de las secciones cónicas

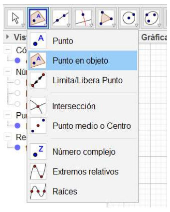
En esta práctica se utilizarán los recursos de GeoGebra para **verificar** las propiedades de los focos de las secciones cónicas (parábola, elipse e hipérbola) que se utilizaron en las aplicaciones de estos contenidos. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de "Práctica" y construye la propiedad. Luego trabaja en GeoGebra la parte "Actividades" que está al final de esta práctica.

Práctica

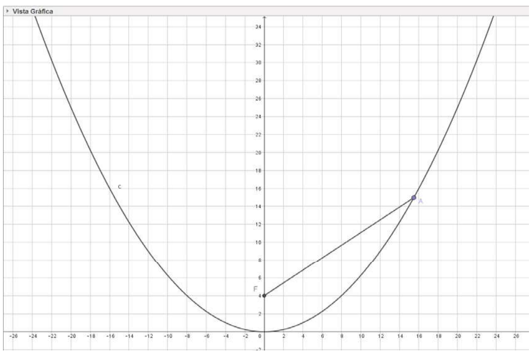
Verificación de la propiedad del foco de una parábola.

Cualquier línea desde el foco será reflejada en una misma dirección paralela al eje, y también al recibir una línea paralela al eje, esta será reflejada hacia el foco.

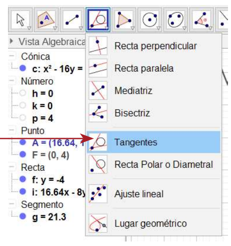
1. Utilizando el archivo creado en la práctica 5.1, grafica una parábola con vértice (0, 0) y parámetro $p = 4$.
2. En el botón Punto, selecciona la opción Punto sobre objeto y localiza un punto en la parábola, de tal modo que pueda moverse alrededor de toda la parábola.



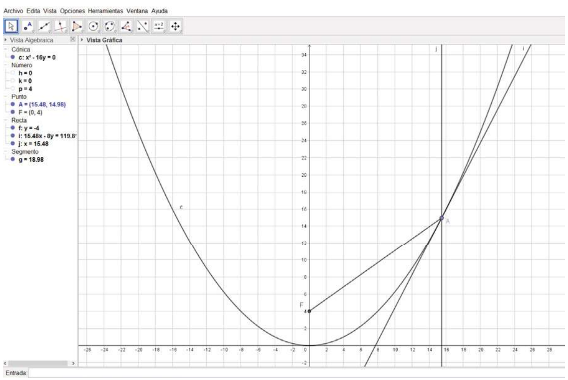
3. Dibuja un segmento de recta que vaya desde el foco (F) hasta el punto localizado en la parábola, tal como lo muestra la figura de abajo.



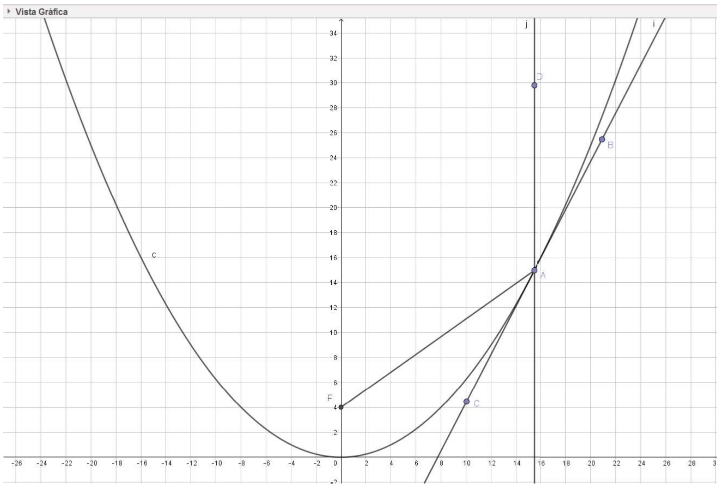
4. Grafica una recta tangente a la parábola en el punto dibujado en el numeral 2, utilizando el botón de Rectas, opción Tangentes, y seleccionando el punto y luego la parábola.



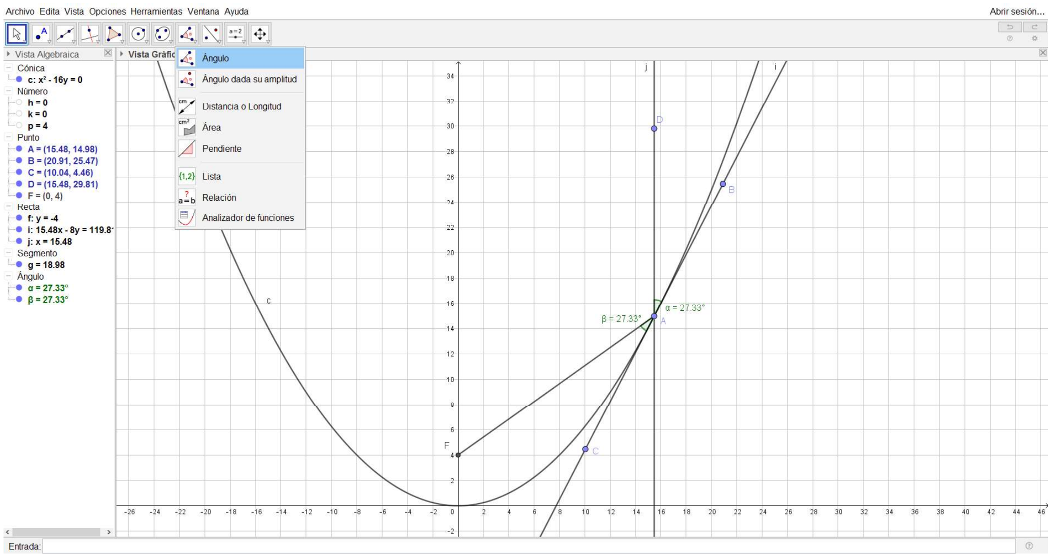
5. Dibuja una recta paralela al eje y que pasa por el punto dibujado en el numeral 2, utilizando el botón Rectas, opción Recta paralela, seleccionando el punto y el eje y. Se obtiene la siguiente figura:



6. Coloca los puntos B y C sobre la recta tangente, y el punto D sobre la recta paralela al eje y, tal como lo muestra la figura.



7. Mide los ángulos DAB y FAC, utilizando el botón de ángulos, opción Ángulo, tal como lo muestra la figura.



8. Con el cursor puedes mover el punto sobre la parábola y verificar que el ángulo con que se refleja la recta emitida por el foco se mantiene constante respecto de la recta paralela al eje de la parábola. También puedes dar clic derecho sobre el punto y marcar la opción animación para recorrer todos los puntos de la parábola de manera automática.

Actividades

1. Realiza una contrucción para verificar la propiedad de los focos de una elipse que se utilizó en las aplicaciones sobre la elipse.

2. Realiza una construcción para verificar la propiedad de los focos de una hipérbola que se utilizó en las aplicaciones sobre la hipérbola.

Indicador de logro

5.3 Comprueba las propiedades de los focos de las diferentes cónicas realizando construcciones en un software matemático adecuado.

Secuencia

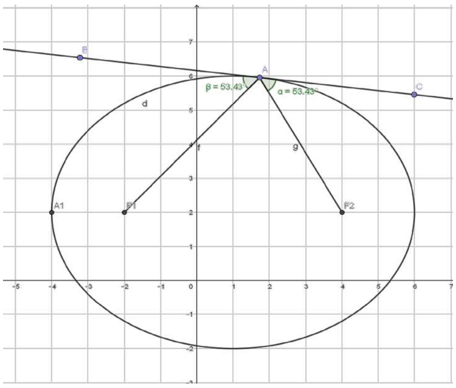
Después de realizar el análisis de las ecuaciones de las secciones cónicas, se puede verificar las propiedades reflectoras de los focos de las secciones cónicas.

Propósito

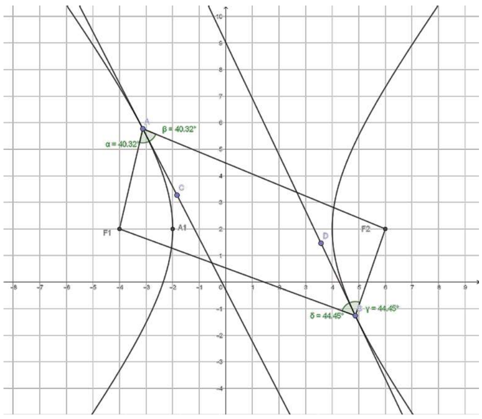
Tener al menos la verificación del resultado sobre las propiedades reflectoras de las secciones cónicas, utilizando construcciones en GeoGebra.

Solución de problemas:

1. Se utiliza el archivo creado en la clase 5.1 para elipses, se dibuja un punto sobre la elipse, y luego se trazan dos segmentos de recta, que vayan de cada foco al punto sobre la elipse, y de manera parecida a lo que se hizo en la parábola, ahora se traza la tangente a la elipse en el punto dibujado, y finalmente se verifica la propiedad realizando la medición de los ángulos formados por los segmentos y la recta tangente como lo muestra la figura de abajo.



2. Se utiliza el archivo creado en las actividades de la clase 5.1 para hipérbolas, se dibuja un punto sobre la hipérbola, y luego se trazan dos segmentos de recta, que vayan de cada foco al punto sobre la hipérbola, y de manera parecida a lo que se hizo en la elipse, ahora se traza la tangente a la hipérbola en el punto dibujado, y finalmente se verifica la propiedad realizando la medición de los ángulos formados por los segmentos y la recta tangente como lo muestra la figura de abajo.



5.4 Práctica en GeoGebra: problemas sobre el lugar geométrico de las cónicas

En esta práctica se utilizarán los recursos de GeoGebra para **verificar** las respuestas de los problemas sobre lugar geométrico de secciones cónicas que se resolvieron en la clase 4.10. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de “Práctica” y construye los lugares geométricos correspondientes. Luego trabaja en GeoGebra la parte “Actividades” que está al final de esta práctica.

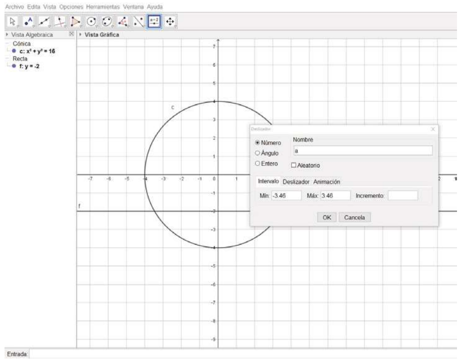
Práctica

Retomando el problema 4 de la clase 4.10:

> Identifica el lugar geométrico que determina el centro de una circunferencia cuyo radio varía de modo que siempre sea tangente a la recta $y + 2 = 0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Asumiendo que dicha circunferencia siempre se mueve por encima de la recta y adentro de la circunferencia.

1. Utiliza la barra de entrada para graficar la recta $y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

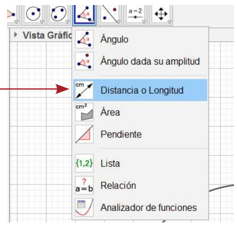
2. Inserta un deslizador con la variable a, seleccionando el botón deslizador y dando un clic sobre la Vista Gráfica en el lugar que se quiere colocar, usar el valor mínimo de –3.46 y máximo de 3.46 y presionar “enter”.



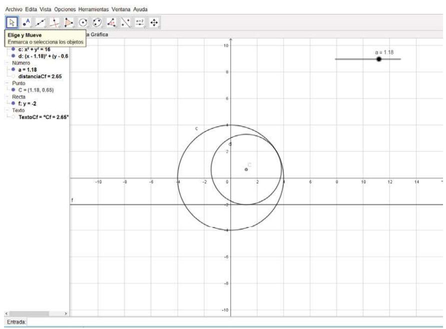
3. Para comprobar la respuesta del problema, la cual es “$y = -\frac{x^2}{4} + 1$”, ingresa en la barra de Entrada el punto C = $\left(x, -\frac{x^2}{4} + 1\right)$, escribiendo:

   C = (a, (–a^2 / 4) + 1)

4. En el botón de Ángulo selecciona la opción Distancia o Longitud, selecciona el punto C graficado en el paso 3, y la recta $y + 2 = 0$. Después de ello aparecerá en la Vista Gráfica una etiqueta que muestra la distancia del punto C a la recta, y en la Vista Algebraica aparecerá una variable con nombre “distanciaCf”, la cual almacena el valor numérico de la distancia medida.

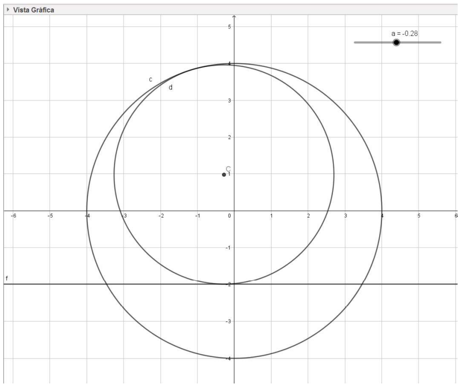


5. Ahora construye una circunferencia, utilizando la opción de centro y radio, luego selecciona como centro el punto C, construido en el paso 3, y en la entrada del radio escribe la variable que almacena la distancia, es decir, “distanciaCf”. Se puede observar el resultado obtenido, en la figura de abajo.

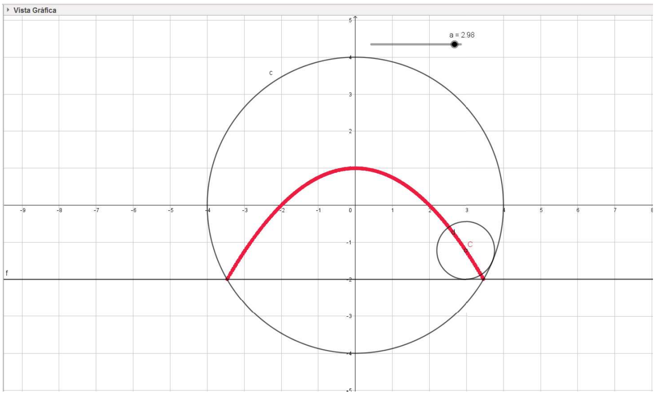


Unidad 3

6. Observa que la circunferencia graficada en el paso 5 es tangente tanto a la recta $y + 2 = 0$ como a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Puedes mover el deslizador horizontalmente y ver cómo se mueve dicha circunferencia.



7. Haz clic derecho sobre el punto C y selecciona la opción rastro (se puede cambiar el color del punto, si se desea), ahora mueve el deslizador de nuevo y observa cómo se marca el lugar geométrico con el rastro.



8. Finalmente puedes dar clic derecho sobre el deslizador y seleccionar la opción animación para correr automáticamente el lugar geométrico y comprobar que la respuesta es correcta.

Actividades

1. Cambia el rango entre el valor mínimo y el máximo del deslizador, observa el resultado y escribe la conclusión de este resultado, enfocándote en la tangencia de la circunferencia con la recta $y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

2. Realiza una construcción para verificar la respuesta al problema 2 y 3 de los problemas de la unidad de la clase 4.10:
   a) Determina el lugar geométrico que resulta de tomar una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y reducir las coordenadas en y de cada punto de ella a $\frac{3}{4}$.

   b) Tomando un segmento AB de longitud 5 sobre el plano cartesiano, que cumple que el punto A se mueve sobre el eje x y el punto B sobre el eje y. Determina el lugar geométrico de los puntos del segmento AB que cumplen estar a una proporción 3:2.

Indicador de logro

5.4 Utiliza un software matemático para resolver problemas sobre secciones cónicas.

Secuencia

Por último, las prácticas en GeoGebra de secciones cónicas finalizan con las soluciones de los problemas de la unidad, para corroborar las soluciones planteadas.

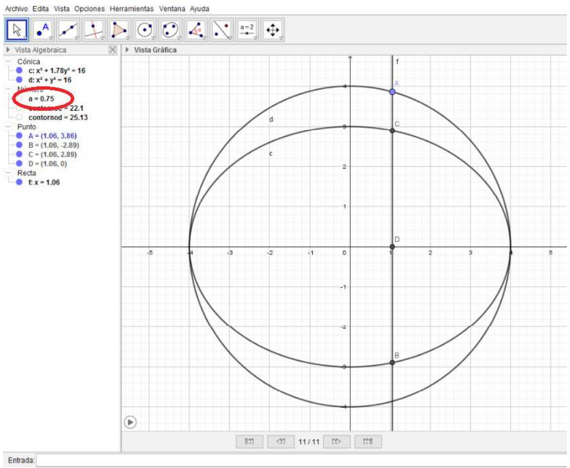
Propósito

Utilizar las herramientas de rastro y animación para comprobar la solución de los problemas de la unidad.

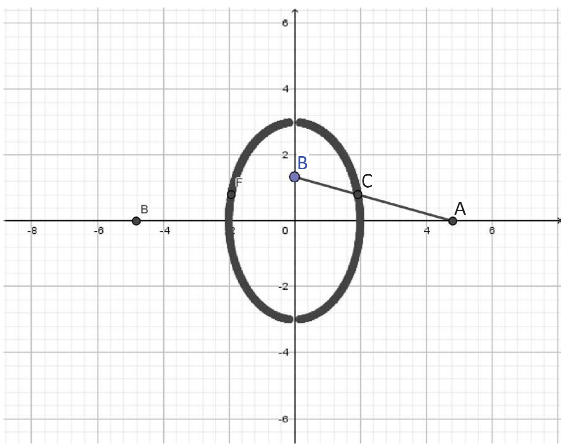
Solución de problemas:

1. Cuando se cambia el rango del deslizador, la circunferencia sigue manteniéndose tangente tanto a la recta como a la circunferencia, sin embargo, pasa de la parte de arriba a la parte de abajo de la recta.

2a) Se puede dibujar la solución encontrada dada la ecuación $x^2 + (\frac{4}{3}y)^2 = 16$, teniendo cuidado en introducirla digitando x^2 + (4 /3y)^2 = 16, y luego graficar la circunferencia dada en el problema. Para comprobar que se cumple la proporción dada, se puede colocar un punto sobre la circunferencia, luego trazar una recta paralela al eje y que pasa por el punto dibujado y luego colocar los puntos de intersección de la recta con la elipse, y de la recta con el eje x, finalmente se puede generar una variable que guarde el valor de la razón digitando por ejemplo a = Distancia(C, D)/Distancia(A, D); y se dará el resultado tal como lo muestra la imagen.



2b) Se dibuja un punto sobre el eje y, luego puede trazarse una circunferencia de radio 5, para localizar los puntos de intersección entre la circunferencia y el eje x, y trazar los segmentos hacia ambos puntos (este es el segmento de longitud 5); luego para determinar el punto que está sobre el segmento a una proporción 3:2, se puede trazar una circunferencia de radio 2 y centro el punto que está sobre el eje y; después encontrar los puntos de intersección con los segmentos de longitud 5 y la circunferencia de radio 2; finalmente se pueden invisibilizar las circunferencias, poner rastro a los puntos que cumplen la proporción 3:2, y utilizar la animación del punto en el eje y para verificar que en efecto se grafica una elipse, como lo muestra la imagen.



Este último problema puede realizarse de otra forma, localizando el punto que está sobre la recta en razón 3:2, y dejando los puntos sobre los eje moviéndose libremente.