Unidad 4. Funciones trascendentales I

Competencia de la unidad

Realizar operaciones con potencias de números reales, utilizando las propiedades que facilitan su desarrollo, para resolver ecuaciones y describir las características de las funciones exponenciales.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 2: Raíz cuadrada (9°)
- Raíz cuadrada y números reales
- Operaciones con raíces cuadradas

Primer año de bachillerato

Unidad 1: Números reales
- Números reales

Unidad 3: Desigualdades
- Desigualdad
- Desigualdad lineal
- Desigualdad no lineal

Unidad 4: Funciones reales
- Definición de función
- Función cuadrática
- Aplicaciones de la función cuadrática
- Otras funciones
- Práctica en GeoGebra

Segundo año de bachillerato

Unidad 4: Funciones trascendentales I
- Potencia y raíz n-ésima
- Funciones y ecuaciones exponenciales

Unidad 5: Funciones trascendentales II
- Función biyectiva e inversa
- Función logarítmica
- Funciones trigonométricas
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Potencia y raíz n-ésima	1	1. Propiedades de potencias con igual base y exponente natural
	1	2. Propiedades de potencias con igual exponente natural
	1	3. Exponente cero y exponente negativo
	1	4. Raíz n-ésima de un número real
	1	5. Expresión de números sin el símbolo radical
	1	6. Operaciones con raíces n-ésimas
	1	7. Suma, resta y potencia de raíces n-ésimas
	1	8. Exponente racional
	1	9. Propiedades de los exponentes racionales
	1	10. Operaciones con raíces de distinto índice
	1	11. Practica lo aprendido
2. Funciones y ecuaciones exponenciales	1	1. Definición de la función exponencial
	1	2. Funciones exponenciales simétricas
	1	3. Características de las funciones exponenciales
	1	4. Desplazamientos horizontales y verticales de la función exponencial
	1	5. Gráfica de funciones exponenciales con simetría y desplazamientos
	1	6. Ecuaciones exponenciales
	1	7. Ecuaciones exponenciales que se reducen a ecuaciones cuadráticas
	1	8. Practica lo aprendido

Lección	Horas	Clases
	1	9. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la unidad 4
	2	Prueba del segundo periodo

20 horas clase + prueba de la unidad 4 + prueba del segundo periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Potencia y raíz n-ésima
En esta lección se estudian las propiedades de las potencias que constituyen un conjunto de herramientas para efectuar operaciones entre números reales, luego se define la raíz n-ésima y se estudian las operaciones con radicales, estas se facilitan al introducir el exponente racional. La simplificación de una raíz se realiza en primer lugar observando que el índice de la raíz sea menor a algún exponente en la descomposición prima y utilizando la propiedad de la multiplicación. Otro caso es cuando el radicando es una potencia de una sola base y su exponente es menor que el índice pero con factores en común, entonces se utiliza el exponente racional para simplificarla.

Lección 2: Funciones y ecuaciones exponenciales
Ahora que se tiene el conocimiento de las potencias con exponentes enteros, racionales e irracionales se introduce la función exponencial como una función real. Se estudian además aquellas funciones exponenciales que se grafican por medio de simetrías y desplazamientos. Por último se estudian las ecuaciones exponenciales que se resuelven por medio de la definición de potencia y la sustitución de variable.

Lección 1 Potencia y raíz n-ésima

1.1 Propiedades de potencias con igual base y exponente natural

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones expresando tu respuesta como la potencia de un número.

a) $2^2 \times 2^3$ b) $3^6 \div 3^2$ c) $(2^2)^3$

Solución

Si a es un número real y n un entero positivo, entonces $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{- veces}}$

a^n → exponente
a^n → potencia
a^n → base

a) $2^2 \times 2^3$

$$2^2 \times 2^3 = \underbrace{(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)}_{\text{5-veces}}$$
$$= 2^5$$

Se cumple que: $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$.

b) $3^6 \div 3^2$

$$3^6 \div 3^2 = \frac{3^6}{3^2}$$
$$= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}} \quad \text{simplificando,}$$
$$= \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{4- veces}}$$
$$= 3^4$$

Se cumple que: $3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$.

c) $(2^2)^3$

$$(2^2)^3 = (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$$
$$= (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$$
$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{6-veces}}$$
$$= 2^6$$

Se cumple que: $(2^2)^3 = 2^{2\times 3} = 2^6$.

Definición

1. Si a y b son números reales, m y n enteros positivos, las reglas para efectuar operaciones con potencias de igual base son:

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (si $a \neq 0$ y $m > n$) c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

La propiedad del literal b) también se escribe como fracción: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Si a es un número real: $a^1 = a$

2. Si a es un número real positivo, entonces:

a) Si n es par entonces:
$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{cantidad par de números negativos}} = a^n$$

b) Si n es impar entonces
$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{cantidad impar de números negativos}} = -a^n$$

Problemas

Expresa las siguientes operaciones como una sola potencia.

a) $3^6 \times 3^4$ b) $(-3)^2 \times (-3)^4$ c) $(-2)^3 \times (-2)^2$

d) $5^7 \div 5^3$ e) $(-2)^5 \div (-2)^3$ f) $(-3)^8 \div (-3)^5$

g) $(6^5)^2$ h) $(10^4)^3$ i) $[(-3)^3]^5$

Indicador de logro

1.1 Expresa como potencia, productos y cocientes con igual base y exponente positivo.

Secuencia

En séptimo grado se estudiaron las potencias con exponentes dos y tres, ahora se expande esta definición para todo exponente natural; se introducirán paso a paso los valores de los exponentes hasta los números reales. En esta clase se establecen las propiedades utilizadas en las operaciones con potencias que tienen la misma base.

Propósito

En el numeral 2 de la Definición se establece que toda potencia de un número negativo debe expresarse como la potencia de un número positivo de tal manera que el signo quede antes de la potencia, por lo que en la solución de los problemas los estudiantes deben reflejar el uso de esta indicación.

Solución de problemas:

a) $3^6 \times 3^4 = 3^{6+4} = 3^{10}$

b) $(-3)^2 \times (-3)^4 = (-3)^{2+4} = (-3)^6 = 3^6$

c) $(-2)^3 \times (-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5 = -2^5$

d) $5^7 \div 5^3 = 5^{7-3} = 5^4$

e) $(-2)^5 \div (-2)^3 = (-2)^{5-3} = (-2)^2 = 2^2$

f) $(-3)^8 \div (-3)^5 = (-3)^{8-5} = (-3)^3 = -3^3$

g) $(6^5)^2 = 6^{5\times 2} = 6^{10}$

h) $(10^4)^3 = 10^{4\times 3} = 10^{12}$

i) $[(-3)^3]^5 = (-3)^{3\times 5} = (-3)^{15} = -3^{15}$

1.2 Propiedades de potencias con igual exponente natural

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones expresando tu respuesta como la potencia de un número.

a) $2^3 \times 3^3$

b) $\frac{6^3}{2^3}$

Solución

a) $2^3 \times 3^3$

$$\begin{aligned} 2^3 \times 3^3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3); \quad \text{asociando,} \\ &= \underbrace{6 \times 6 \times 6}_{\text{3-veces}} \\ &= 6^3 \end{aligned}$$

Se cumple que: $2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$.

b) $\frac{6^3}{2^3}$

Del problema anterior se tiene: $6^3 = 2^3 \times 3^3$.

Al dividir ambos miembros de la igualdad por 2^3 se tiene:

$$\frac{6^3}{2^3} = \frac{\cancel{2^3} \times 3^3}{\cancel{2^3}} = 3^3$$

Se cumple que: $\frac{6^3}{2^3} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^3$.

Conclusión

- Si a y b son números reales y m es un entero positivo, las reglas para efectuar operaciones de potencias con igual exponente son:

  a) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

  b) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (si $b \neq 0$)

- La propiedad b) se expresa como división así:

$$a^m \div b^m = (a \div b)^m$$

- Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales, entonces:

$$a_1^m \times a_2^m \times \cdots \times a_n^m = (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n)^m$$

Ejemplo

Expresa el producto $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ como una sola potencia.

$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 30^2$

Por lo tanto, $2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 30^2$.

Problemas

Expresa las siguientes operaciones como una sola potencia.

a) $6^{10} \times 4^{10}$

b) $(-3)^7 \times 6^7$

c) $5^5 \times (-8)^5$

d) $(-2)^5 \times (-7)^5$

e) $12^5 \div 6^5$

f) $20^3 \div (-4)^3$

g) $(-24)^4 \div 3^4$

h) $(-15)^6 \div (-5)^6$

i) $(-35)^4 \div (-7)^4$

Unidad 4

Indicador de logro

1.2 Expresa como potencia productos y cocientes con igual exponente positivo.

Secuencia

Se establecen las propiedades cuando al multiplicar o dividir potencias se tienen exponentes iguales. Hasta aquí se han estudiado las propiedades que involucran exponentes positivos; de nuevo, se aplican potencias a cantidades positivas y negativas, como en la clase anterior.

Posibles dificultades

Los estudiantes pueden confundir las propiedades de potencias: el caso cuando tienen igual base con el caso en el que tienen igual exponente, por lo que debe sugerirles que observen qué caso se cumple al trabajar cada problema.

Solución de problemas:

a) $6^{10} \times 4^{10} = (6 \times 4)^{10} = 24^{10}$

b) $(-3)^7 \times 6^7 = (-3 \times 6)^7 = (-18)^7 = -18^7$

c) $(5)^5 \times (-8)^5 = (5 \times (-8))^5 = (-40)^5 = -40^5$

d) $(-2)^5 \times (-7)^5 = ((-2) \times (-7))^5 = 14^5$

e) $12^5 \div 6^5 = (12 \div 6)^5 = 2^5$

f) $20^3 \div (-4)^3 = (20 \div (-4))^3 = (-5)^3 = -5^3$

g) $(-24)^4 \div 3^4 = (-24 \div 3)^4 = (-8)^4 = 8^4$

h) $(-15)^6 \div (-5)^6 = (-15 \div (-5))^6 = 3^6$

i) $(-35)^4 \div (-7)^4 = (-35 \div (-7))^4 = 5^4$

Lección 1

1.3 Exponente cero y exponente negativo*

Problema inicial

Asume que la propiedad $a^m \div a^n = a^{m-n}$ se cumple para todo entero m y n. Efectúa las siguientes divisiones de dos maneras distintas:

a) $6^3 \div 6^3$ b) $3^3 \div 3^7$

Solución

a) $6^3 \div 6^3$

Utilizando las propiedades de la división

$6^3 \div 6^3 = 1.$

Si las propiedades de exponentes se verifican en este caso, entonces:

$$6^3 \div 6^3 = 6^{3-3} = 6^0$$

Por lo tanto, $6^3 \div 6^3 = 6^0$.

Así 6^0 y 1 representan el mismo número.

b) $3^3 \div 3^7$

Utilizando la simplificación:

$$3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7}$$

$$= \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}$$

$$= \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= \frac{1}{3^4}$$

Por lo tanto, $3^3 \div 3^7 = \frac{1}{3^4}$.

Si las propiedades de exponentes se verifican en este caso, entonces:

$$3^3 \div 3^7 = 3^{3-7} = 3^{-4}$$

Por lo tanto, $3^3 \div 3^7 = 3^{-4}$

Entonces 3^{-4} y $\frac{1}{3^4}$ representan el mismo número.

Definición

a) **El exponente cero.**

Si a es un número real con $a \neq 0$ entonces:

$$a^0 = 1.$$

b) **El exponente negativo.**

Si a es un número real con $a \neq 0$ y n un número entero positivo entonces:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Con esta definición las propiedades de exponentes positivos se aplican también a los exponentes negativos y cero. Si a y b son reales, m y n enteros:

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Problemas

1. Escribe las siguientes fracciones como una potencia con exponente negativo:

a) $\frac{1}{2^3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{(-5)^5}$ d) $\frac{1}{10^8}$

2. Escribe las siguientes potencias con exponente negativo como fracciones:

a) 2^{-7} b) 3^{-5} c) 5^{-1} d) 7^{-2}

Indicador de logro

1.3 Expresa potencias con exponentes negativos como fracciones con exponente positivo y viceversa.

Secuencia

Se introduce la potencia con exponente negativo o cero, esto permite llevar las propiedades de los exponentes naturales hacia los exponentes enteros. Si el desarrollo del Problema inicial es muy difícil para los estudiantes debe desarrollarlo el docente.

Propósito

En el Problema inicial se plantea la posibilidad de aplicar la propiedad $a^m \div a^n = a^{m-n}$ donde m y n son enteros, que tiene sentido al ser una asignación única ($a^m \div a^n \longrightarrow a^{m-n}$). Esto permitirá desarrollar en la Solución el cociente de manera habitual y desarrollarlo con exponentes.

Solución de problemas:

1a) $\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$ **1b)** $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ **1c)** $\frac{1}{(-5)^5} = (-5)^{-5}$ **1d)** $\frac{1}{10^8} = 10^{-8}$

2a) $2^{-7} = \frac{1}{2^7}$ **2b)** $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ **2c)** $5^{-1} = \frac{1}{5}$ **2d)** $7^{-2} = \frac{1}{7^2}$

Si los estudiantes terminan rápido, invítelos a desarrollar el problema 1, literales del a) al j) del Practica lo aprendido de esta lección.

1.4 Raíz n-ésima de un número real

Problema inicial

Determina un valor real de x en cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $x^3 = 27$ b) $x^4 = 625$

Solución

a) La descomposición prima de 27 es:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$27 = 3^3$

Por lo tanto $x = 3$, es solución de la ecuación.

Así, a 3 se le denomina la raíz cúbica de 27 y se denota por $3 = \sqrt[3]{27}$.

b) La descomposición prima de 625 es:

$$\begin{array}{r|l} 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$625 = 5^4$

Por lo tanto, $x = 5$ es solución de la ecuación.

A 5 se le denomina la raíz cuarta de 625: $5 = \sqrt[4]{625}$.

También $x = -5$, es solución de la ecuación.

A -5 se le denomina raíz cuarta negativa de 625:
$-5 = -\sqrt[4]{625}$

Definición

Sea n un entero positivo, un número b que cumple la condición $b^n = a$ es llamado **raíz n-ésima** de a.

Al trabajar con raíces n-ésimas de números reales se distinguen dos casos:

1. Si n es impar, a cada número real a le corresponde una única raíz n-ésima y se denota por $\sqrt[n]{a}$.
2. Si n es par, a cada número real positivo a le corresponden dos raíces n-ésima reales, una positiva $\sqrt[n]{a}$ y una negativa $-\sqrt[n]{a}$.

Si se cumple una de las siguientes condiciones: n es impar o n es par y $a > 0$ entonces $\sqrt[n]{a^n} = a$.

índice ← $\sqrt[n]{a}$ → radical

radicando

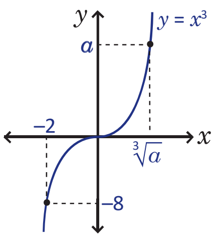
Si $n = 1 \Rightarrow \sqrt[1]{a} = a$.

Si $n = 2 \Rightarrow \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Si n es un entero positivo entonces $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ejemplo

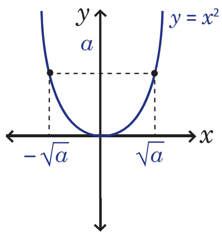
a) El número -8 tiene una única raíz cúbica:



$-8 = (-2)^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{-8} = -2$.

Todo número real a tiene una única raíz cúbica $\sqrt[3]{a}$.

b) El número 16 tiene dos raíces cuadradas:



$\sqrt{16} = 4$ y $-\sqrt{16} = -4$

Todo número real positivo a tiene dos raíces cuadradas $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Problemas

Expresa las siguientes igualdades utilizando la notación de raíz n-ésima.

a) $2^3 = 8$ b) $(-5)^3 = -125$ c) $3^4 = 81$ d) $(-7)^4 = 2401$

e) $6^2 = 36$ f) $(-2)^5 = -32$ g) $(-4)^5 = -1024$ h) $5^5 = 3125$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ j) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$ k) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ l) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

Indicador de logro

1.4 Escribe potencias de números como raíces n-ésimas.

Secuencia

La definición de raíz n-ésima de un número real generaliza la definición de raíz cuadrada, vista en noveno grado, para un entero positivo n. Se utilizan únicamente las raíces n-ésimas reales.

Propósito

En la Definición, la raíz n-ésima de a donde n es par tiene el mismo tratamiento que para el de la raíz cuadrada: las raíces n-ésimas son las soluciones reales de la ecuación $b^n = a$, la raíz n-ésima positiva se denota por $\sqrt[n]{a}$ y la negativa por $-\sqrt[n]{a}$, que es el opuesto aditivo de $\sqrt[n]{a}$.

Solución de problemas:

a) $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

b) $(-5)^3 = -125 \Rightarrow \sqrt[3]{-125} = -5$

c) $3^4 = 81 \Rightarrow \sqrt[4]{81} = 3$

d) $(-7)^4 = 2\,401 \Rightarrow -\sqrt[4]{2\,401} = -7$

e) $6^2 = 36 \Rightarrow \sqrt{36} = 6$

f) $(-2)^5 = -32 \Rightarrow \sqrt[5]{-32} = -2$

g) $(-4)^5 = -1\,024 \Rightarrow \sqrt[5]{-1\,024} = -4$

h) $5^5 = 3\,125 \Rightarrow \sqrt[5]{3\,125} = 5$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

j) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$

k) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow -\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}$

l) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27} \Rightarrow \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$

En los literales d) y k) se debe tener cuidado de escribir el signo negativo antes del radical ya que la base de la potencia hace referencia a la raíz negativa del número.

1.5 Expresión de números sin el símbolo radical

Problema inicial

Expresa los siguientes números sin el símbolo radical.

a) $\sqrt[3]{729}$ b) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por tres.

Solución

a) $\sqrt[3]{729}$

$729 = 3^6$ se descompone 729,

$= 3^3 \times 3^3$ se reescribe como producto de potencias de índice 3,

$= (3 \times 3)^3$ al utilizar propiedades de potencia,

$= 9^3$.

Es decir, al elevar 9 al cubo se obtiene 729.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{729} = 9$.

b) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

$\frac{16}{81} = \frac{2^4}{3^4}$ se descomponen 16 y 81,

$= \left(\frac{2}{3}\right)^4$ al utilizar propiedades de potencia,

entonces al elevar $\frac{2}{3}$ a la cuarta se obtiene $\frac{16}{81}$.

Por lo tanto, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$.

Conclusión

Para escribir sin radical el número real $\sqrt[n]{a}$ realiza lo siguiente: Ejemplo: $\sqrt[3]{1728}$

1. Escribe la descomposición prima de a, si el radicando es una fracción se descompone el numerador y el denominador. → $1728 = 2^6 \times 3^3$
2. Expresa la descomposición como producto de potencias con exponente n. → $1728 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$
3. Utiliza la propiedad de producto o división de potencias con el mismo exponente. → $1728 = (2 \times 2 \times 3)^3 = 12^3$
4. Se obtiene una expresión de la forma $a = b^n$, entonces $\sqrt[n]{a} = b$. → $\sqrt[3]{1728} = 12$

Si n es un entero impar y a un número real entonces $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Si n es par, las raíces n-ésimas de números negativos no son números reales.

Problemas

Expresa los siguientes números sin el símbolo radical.

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[5]{243}$ c) $\sqrt[7]{128}$ d) $\sqrt[5]{100\,000}$

e) $\sqrt[3]{-216}$ f) $\sqrt[4]{256}$ g) $\sqrt[3]{\frac{512}{343}}$ h) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$

Indicador de logro

1.5 Calcula raíces n-ésimas descomponiendo el radicando en factores primos.

Secuencia

En esta clase se expresa la raíz n-ésima exacta de un número real de forma simplificada, es decir, sin el símbolo radical; a partir de aquí se efectúa la simplificación de raíces, sin embargo, no se contempla aún la distribución del radical sobre los factores, si no que se utiliza la propiedad de la distribución del exponente sobre los factores y la definición misma de raíz n-ésima. La distribución del radical se abordará en la siguiente clase.

Propósito

La expresión $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, donde n es impar, que se muestra en la Conclusión será util en aquellos problemas cuando el radicando tiene signo negativo; de esta manera se traslada el problema a calcular la raíz n-ésima de un número positivo.

Solución de problemas:

a) $16 = 2^4$

$\Rightarrow \sqrt[4]{16} = 2$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

b) $243 = 3^5$

$\Rightarrow \sqrt[5]{243} = 3$

$$\begin{array}{r|l} 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

En la solución de cada literal se espera el uso de la descomposición en factores primos y la definición de raíz n-ésima.

c) $128 = 2^7 \Rightarrow \sqrt[7]{128} = 2$

d) $100\,000 = 2^5 \times 5^5$

$\Rightarrow 100\,000 = (2 \times 5)^5$

$\Rightarrow 100\,000 = 10^5$

$\Rightarrow \sqrt[5]{100\,000} = 10$

e) $\sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216}$

$216 = 2^3 \times 3^3$

$\Rightarrow 216 = (2 \times 3)^3$

$\Rightarrow 216 = 6^3$

$\Rightarrow \sqrt[3]{216} = 6$

$\Rightarrow \sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216} = -6$

f) $256 = 2^4 \times 2^4$

$\Rightarrow 256 = (2 \times 2)^4$

$\Rightarrow 256 = 4^4$

$\Rightarrow \sqrt[4]{256} = 4$

g) $512 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \Rightarrow 512 = (2 \times 2 \times 2)^3 \Rightarrow 512 = 8^3$

$343 = 7^3$

$$\Rightarrow \frac{512}{343} = \frac{8^3}{7^3}$$

$$\Rightarrow \frac{512}{343} = \left(\frac{8}{7}\right)^3$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{512}{343}} = \frac{8}{7}$$

h) $64 = 2^6$ y $729 = 3^6$

$$\Rightarrow \frac{64}{729} = \frac{2^6}{3^6}$$

$$\Rightarrow \frac{64}{729} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$\Rightarrow \sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3}$$

1.6 Operaciones con raíces n-ésimas

Problema inicial

Utiliza la definición de raíz n-ésima para expresar con un solo radical las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20}$ b) $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

Solución

a) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20}$

$(\sqrt[3]{6})^3 = 6$ y $(\sqrt[3]{20})^3 = 20$ se utiliza la definición de raíz cúbica,

$(\sqrt[3]{6})^3 \times (\sqrt[3]{20})^3 = 6 \times 20$ se multiplican miembro a miembro las igualdades anteriores,

$(\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20})^3 = 6 \times 20$ al aplicar propiedades de potencia en el miembro izquierdo,

$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{6 \times 20}$ se expresa la potencia como raíz cúbica,

$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{120}$ se efectúa el producto.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{120}$.

b) $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3}$

$(\sqrt[4]{96})^4 = 96$ y $(\sqrt[4]{3})^4 = 3$ se utiliza la definición de raíz cuarta,

$(\sqrt[4]{96})^4 \div (\sqrt[4]{3})^4 = 96 \div 3$ se divide miembro a miembro,

$(\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3})^4 = 96 \div 3$ al aplicar propiedades de potencia en el miembro izquierdo,

$\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{96 \div 3}$ se expresa la potencia como raíz cuarta ($\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} > 0$),

$\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{32}$ se efectúa la división.

Por lo tanto, $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{32}$.

c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^2 = \sqrt[3]{128}$ se utiliza la definición de raíz cuadrada,

$\left[\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^2\right]^3 = (\sqrt[3]{128})^3 = 128$ se utiliza la definición de raíz cúbica,

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^{2 \times 3} = 128$ al aplicar propiedades de potencia,

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^6 = 128$ se efectúa el producto,

$\sqrt{\sqrt[3]{128}} = \sqrt[6]{128}$ se expresa la potencia como raíz sexta $\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}} > 0\right)$.

Por lo tanto, $\sqrt{\sqrt[3]{128}} = \sqrt[6]{128}$.

Conclusión

Para efectuar:		Se tiene que:		Escribiendo como raíz n-ésima:
a) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b})^n = a\times b$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\times b}$
b) $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b})^n = a\div b$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\div b}$
c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	$\Rightarrow$	$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m\times n} = a$	$\Rightarrow$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$

Para simplificar una raíz n-ésima se utiliza la propiedad de la multiplicación:

$$\sqrt[n]{a^n\times b} = \sqrt[n]{a^n}\times\sqrt[n]{b}$$
$$= a\sqrt[n]{b}$$

Si $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son números reales entonces:
$\sqrt[n]{a_1}\times\sqrt[n]{a_2}\times\cdots\times\sqrt[n]{a_m} = \sqrt[n]{a_1\times a_2\times\cdots\times a_m}$

La propiedad b) también se utiliza así:
b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Simplificar una raíz es expresarla con un radicando menor al inicial.

Simplificar a la mínima expresión es simplificar el radicando al menor valor posible.

Después de efectuar una operación con radicales siempre debe simplificarse a la mínima expresión.

Ejemplo

1. Simplifica los resultados del Problema inicial.

a) $\sqrt[3]{120}$

$\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{2^3\times 3\times 5}$

$= 2\sqrt[3]{3\times 5}$

$= 2\sqrt[3]{15}$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{120} = 2\sqrt[3]{15}$.

b) $\sqrt[4]{32}$

$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4\times 2}$

$= 2\sqrt[4]{2}$

Por lo tanto, $\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$.

c) $\sqrt[6]{128}$

$\sqrt[6]{128} = \sqrt[6]{2^6\times 2}$

$= 2\sqrt[6]{2}$

Por lo tanto, $\sqrt[6]{128} = 2\sqrt[6]{2}$.

2. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[8]{4}\times\sqrt[8]{8}\times\sqrt[8]{2}\times\sqrt[8]{4}$

$\sqrt[8]{4}\times\sqrt[8]{8}\times\sqrt[8]{2}\times\sqrt[8]{4} = \sqrt[8]{4\times 8\times 2\times 4}$

$= \sqrt[8]{2^2\times 2^3\times 2\times 2^2}$

$= \sqrt[8]{2^8}$

$= 2$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$

$\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{108}{4}}$

$= \sqrt[3]{27}$

$= \sqrt[3]{3^3}$

$= 3$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones, simplifica a la mínima expresión tu respuesta.

a) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{10}$

b) $-\sqrt[4]{75}\times\sqrt[4]{50}$

c) $-\sqrt[5]{45}\times(-\sqrt[5]{81})$

d) $\sqrt[3]{320}\div\sqrt[3]{10}$

e) $\sqrt[3]{486}\div(-\sqrt[3]{6})$

f) $-\sqrt[4]{192}\div(-\sqrt[4]{6})$

g) $\sqrt{\sqrt{80}}$

h) $-\sqrt{\sqrt[3]{640}}$

i) $\sqrt[3]{-\sqrt{256}}$

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3.

Indicador de logro

1.6 Determina el producto, cociente y raíz de raíces simplificando los resultados a su mínima expresión.

Secuencia

Se estudian las operaciones con raíces n-ésimas a partir de la definición; en este caso la multiplicación y división, así como la raíz de una raíz; además, se deja por sentado el concepto de simplificación a partir de la multiplicación de raíces.

Propósito

En el Problema inicial se dejan indicadas las raíces, pues se simplificarán hasta el Ejemplo, una vez que ya se ha tratado la distribución del radical sobre los factores para simplificar. En la Solución se debe utilizar la definición de raíz n-ésima y las propiedades de potencia. En el Ejemplo, la descomposición en factores se utiliza de tal modo que los exponentes sean igual al índice de la raíz.

Solución de problemas:

a) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{4 \times 10} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} = 2\sqrt[3]{5}$

b) $-\sqrt[4]{75} \times \sqrt[4]{50} = -\sqrt[4]{75 \times 50} = -\sqrt[4]{2 \times 3 \times 5^4} = -5\sqrt[4]{6}$

c) $-\sqrt[5]{45} \times (-\sqrt[5]{81}) = \sqrt[5]{45 \times 81} = \sqrt[5]{3^5 \times 3 \times 5} = 3\sqrt[5]{15}$

d) $\sqrt[3]{320} \div \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{320 \div 10} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

e) $\sqrt[3]{486} \div (-\sqrt[3]{6}\ ) = -\sqrt[3]{486 \div 6} = -\sqrt[3]{81} = -\sqrt[3]{3^3 \times 3} = -3\sqrt[3]{3}$

Las divisiones pueden calcularse utilizando fracciones y simplificándolas, esto para facilitar los cálculos.

f) $-\sqrt[4]{192} \div (-\sqrt[4]{6}\ ) = \sqrt[4]{192 \div 6} = \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2}$

g) $\sqrt{\sqrt{80}} = \sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{2^4 \times 5} = 2\sqrt[4]{5}$

h) $-\sqrt{\sqrt[3]{640}} = -\sqrt[6]{640} = -\sqrt[6]{2^6 \times 2 \times 5} = -2\sqrt[6]{10}$

i) $\sqrt[3]{-\sqrt{256}} = -\sqrt[3]{\sqrt{256}} = -\sqrt[6]{256} = -\sqrt[6]{2^6 \times 2^2} = -2\sqrt[6]{4}$

1.7 Suma, resta y potencia de raíces n-ésimas

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$

b) $(\sqrt[6]{4})^3$

Dos raíces pueden sumarse o restarse si son semejantes es decir, si tienen igual índice e igual radicando.

Solución

a) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$

Simplificando a la mínima expresión:

$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\times 2}=2\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2\times 3^3}=3\sqrt[3]{2}$

Se efectúa la suma de raíces semejantes:

$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{2}$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=5\sqrt[3]{2}$.

b) $(\sqrt[6]{4})^3$

Se descompone la potencia como producto:

$(\sqrt[6]{4})^3=\sqrt[6]{4}\times\sqrt[6]{4}\times\sqrt[6]{4}$

$=\sqrt[6]{4\times 4\times 4}$

$=\sqrt[6]{4^3}$ se expresa como potencia.

Simplificando: $\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{(2^2)^3}=\sqrt[6]{2^6}=2$.

Por lo tanto, $(\sqrt[6]{4})^3=2$.

Conclusión

1. Los pasos para realizar suma o resta de raíces n-ésimas son:
   - Simplificar las raíces a la mínima expresión.
   - Sumar o restar raíces semejantes.

2. La potencia de una raíz real cumple $(\sqrt[n]{a})^m=\underbrace{\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\cdots\times\sqrt[n]{a}}_{m\text{-veces}}$

   Utilizando las propiedades de raíz n-ésima: $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m\text{-veces}}}$

   Reescribiendo como potencia el radicando: $\mathbf{(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}}$

El número $\sqrt[n]{a}$ no es real, si n es par y a negativo.

Por ejemplo:
$\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[6]{-1}$ y $\sqrt[6]{-2}$, no son números reales.

Problemas

1. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}$ b) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{512}$ c) $\sqrt[4]{80}+\sqrt[4]{405}$ d) $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}$

e) $\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}$ f) $\sqrt[3]{576}-\sqrt[3]{72}$ g) $\sqrt[3]{486}-\sqrt[3]{144}$ h) $\sqrt[4]{243}-\sqrt[4]{48}$

i) $(\sqrt[5]{27})^2$ j) $(\sqrt[6]{8})^5$ k) $(\sqrt[3]{25})^2$ l) $(\sqrt[4]{27})^3$

2. Para demostrar que $2=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}-\sqrt[3]{-10+\sqrt{108}}$, realiza los siguientes pasos:
   a) Demuestra que $(1+\sqrt{3})^3=10+6\sqrt{3}$, luego escribe esta igualdad como raíz cúbica.
   b) Demuestra que $(-1+\sqrt{3})^3=-10+6\sqrt{3}$, luego escribe esta igualdad como raíz cúbica.
   c) Efectúa la resta de las raíces cúbicas de los literales anteriores y concluye.

103

Unidad 4

Indicador de logro

1.7 Suma y resta raíces semejantes y simplifica la potencia de una raíz escribiendo los resultados en su mínima expresión.

Secuencia

Ahora se estudia la suma, resta y potencia de raíces n-ésimas. Si el índice es mayor que el exponente la simplificación no se efectúa aún.

Propósito

El Problema inicial y los Problemas se desarrollan de tal manera que puedan efectuarse operaciones entre raíces semejantes. En la Conclusión, en el numeral 2 se debe entender que la igualdad es valida siempre que $\sqrt[n]{a}$ esté bien definida.

Solución de problemas:

1a) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}$

1b) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{512} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} + \sqrt[4]{2^4 \times 2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2} + 2 \times 2\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2} + 4\sqrt[4]{2} = 6\sqrt[4]{2}$

1c) $\sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{2^4 \times 5} + \sqrt[4]{3^4 \times 5} = 2\sqrt[4]{5} + 3\sqrt[4]{5} = 5\sqrt[4]{5}$

1d) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} + \sqrt[3]{3^3 \times 5} = 2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$

1e) $\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{2^2 \times 5^3} - \sqrt[3]{2^2 \times 3^3} = 5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$

1f) $\sqrt[3]{576} - \sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 3^2} - \sqrt[3]{2^3 \times 3^2} = 2 \times 2\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{9} = 4\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{9}$

1g) $\sqrt[3]{486} - \sqrt[3]{144} = \sqrt[3]{2 \times 3^3 \times 3^2} - \sqrt[3]{2^3 \times 2 \times 3^2} = 3\sqrt[3]{18} - 2\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{18}$

1h) $\sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} - \sqrt[4]{2^4 \times 3} = 3\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}$

1i) $(\sqrt[5]{27})^2 = \sqrt[5]{27^2} = \sqrt[5]{(3^3)^2} = \sqrt[5]{3^{3 \times 2}} = \sqrt[5]{3^6} = \sqrt[5]{3^5 \times 3} = 3\sqrt[5]{3}$

1j) $(\sqrt[6]{8})^5 = \sqrt[6]{8^5} = \sqrt[6]{(2^3)^5} = \sqrt[6]{2^{3 \times 5}} = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt[6]{2^6 \times 2^6 \times 2^3} = 2 \times 2\sqrt[6]{2^3} = 4\sqrt[6]{8}$

1k) $(\sqrt[3]{25})^2 = \sqrt[3]{25^2} = \sqrt[3]{(5^2)^2} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \times 5} = 5\sqrt[3]{5}$

1l) $(\sqrt[4]{27})^3 = \sqrt[4]{27^3} = \sqrt[4]{(3^3)^3} = \sqrt[4]{3^9} = \sqrt[4]{3^4 \times 3^4 \times 3} = 3 \times 3\sqrt[4]{3} = 9\sqrt[4]{3}$

En algunos casos, como el literal b, también puede utilizar la distribución del exponente sobre la base en el radicando o utilizar la descomposición en primos convenientemente:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{2^4 \times 2^4 \times 2} &= \sqrt[4]{(2 \times 2)^4 \times 2}\\ &= \sqrt[4]{4^4 \times 2}\\ &= 4\sqrt[4]{2}\end{aligned}$$

2a) $(1 + \sqrt{3})^3 = 1^3 + 3(1)^2(\sqrt{3}) + 3(1)(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 1 + 3\sqrt{3} + 3(3) + \sqrt{3^3} = 1 + 3\sqrt{3} + 9 + \sqrt{3^2 \times 3}$
$= 1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} = 10 + 6\sqrt{3}$

Entonces, $1 + \sqrt{3} = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$.

2b) $(-1 + \sqrt{3})^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2(\sqrt{3}) + 3(-1)(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = -1 + 3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} = -10 + 6\sqrt{3}$

Entonces, $-1 + \sqrt{3} = \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}$.

2c) $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} - (-1 + \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} = 2$.

1.8 Exponente racional

Problema inicial

1. Simplifica las siguientes expresiones, escribe tu respuesta como una potencia.
   a) $\sqrt{2^6}$ b) $\sqrt[3]{2^{12}}$
2. Demuestra que $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$.

Recuerda que para todo número real a positivo:
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$ y $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Solución

1. a) $\sqrt{2^6} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2}$
$= 2 \times 2 \times 2$
$= 2^3$.

Por lo tanto, $\sqrt{2^6} = 2^3$.

Se observa que $3 = \frac{6}{2}$ $\begin{matrix} \longrightarrow \text{exponente} \\ \longrightarrow \text{índice} \end{matrix}$

b) $\sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3}$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 2^4$.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4$.

Se observa que $4 = \frac{12}{3}$ $\begin{matrix} \longrightarrow \text{exponente} \\ \longrightarrow \text{índice} \end{matrix}$

2. $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{\sqrt{2^4}}$ por propiedades de raíces n-ésimas,
$= \sqrt[3]{\sqrt{(2^2)^2}}$ al aplicar propiedades de potencia,
$= \sqrt[3]{2^2}$ se utiliza que $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Por lo tanto, $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$.   Se observa que $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\begin{matrix} \longrightarrow \text{exponente} \\ \longrightarrow \text{índice} \end{matrix}$

Definición

Si a es un número real positivo, m y n son números enteros y n es positivo, se define:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Una potencia con exponente racional $\frac{m}{n}$ es la raíz n-ésima de una potencia m-ésima.

Además, si r es un entero positivo se cumple que $\sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n]{a^m}$, por lo que es válida la simplificación de exponentes racionales, para todo $a > 0$:

$$a^{\frac{mr}{nr}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Problemas

1. Escribe las siguientes raíces como potencias con exponente fraccionario, simplifica si se puede.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3^3}$ c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{3^2}$

e) $\sqrt[4]{5^2}$ f) $\sqrt[5]{2^{10}}$ g) $\sqrt[5]{6^3}$ h) $\sqrt[6]{5^2}$

2. Escribe las siguientes potencias fraccionarias como raíces de una potencia.

a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $3^{\frac{5}{2}}$ c) $2^{\frac{5}{2}}$ d) $7^{\frac{3}{8}}$

e) $12^{\frac{3}{7}}$ f) $11^{\frac{7}{2}}$ g) $9^{\frac{5}{3}}$ h) $10^{\frac{1}{4}}$

Indicador de logro

1.8 Utiliza exponentes racionales para representar raíces n-ésimas de un número y viceversa.

Secuencia

En esta clase se realiza la extensión de los valores que pueden ir en el exponente: desde los enteros hacia los racionales, utilizando la definición de exponente racional como la raíz n-ésima de un número real.

Propósito

En el Problema inicial se plantean dos situaciones: la primera es para inducir que el exponente puede ser una fracción y la segunda para ejemplificar la posibilidad de efectuar la simplificación en el exponente; por lo que, es pertinente hacer la observación planteada en la Solución.

Solución de problemas:

1a) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

1b) $\sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$

1c) $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

1d) $\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$

1e) $\sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}$

1f) $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2$

1g) $\sqrt[5]{6^3} = 6^{\frac{3}{5}}$

1h) $\sqrt[6]{5^2} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}}$

2a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

2b) $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5} = 9\sqrt{3}$

2c) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$

2d) $7^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{7^3}$

2e) $12^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{12^3}$

2f) $11^{\frac{7}{2}} = \sqrt{11^7} = 11^3\sqrt{11}$

2g) $9^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{9^5} = 27\sqrt[3]{3}$

2h) $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$

Lección 1

1.9 Propiedades de los exponentes racionales

Problema inicial

Realiza las siguientes operaciones expresando tu respuesta como potencia con exponente racional.

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}}$ b) $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}}$ c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$ d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}$ e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}}$

Solución

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[4]{2^3}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[4]{2^5 \times 2^3}$

$= \sqrt[4]{2^8}$

$= 2^{\frac{8}{4}}$

$= 2^2.$

Por lo tanto, $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = 2^2$. Observa que: $2^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} = 2^2$.

b) $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^{10}} \div \sqrt[3]{3^1}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[3]{3^{10} \div 3^1}$

$= \sqrt[3]{3^9}$

$= 3^{\frac{9}{3}}$

$= 3^3.$

Por lo tanto, $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = 3^3$. Se observa que: $3^{\frac{10}{3}-\frac{1}{3}} = 3^3$.

c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt[3]{8^2})^{\frac{1}{2}}$ se escribe como raíz cúbica,

$= \sqrt[2]{\sqrt[3]{8^2}}$ se escribe como raíz cuadrada,

$= \sqrt[6]{8^2}$

$= 8^{\frac{2}{6}}$

$= 8^{\frac{1}{3}}.$

Por lo tanto $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$. Se observa que: $8^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$.

d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{9^2}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[3]{3^2 \times 9^2}$

$= \sqrt[3]{(3 \times 9)^2}$

$= \sqrt[3]{27^2}$

$= 27^{\frac{2}{3}}.$

Por lo tanto $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$.

Observa que: $(3 \times 9)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$.

e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{32^3} \div \sqrt[4]{2^3}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[4]{32^3 \div 2^3}$

$= \sqrt[4]{(32 \div 2)^3}$

$= \sqrt[4]{16^3}$

$= 16^{\frac{3}{4}}.$

Por lo tanto, $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$. Se observa que: $(32 \div 2)^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$.

Conclusión

1. Las propiedades con exponentes enteros se aplican también a los exponentes racionales. Si a y b son números reales positivos, m y n son números racionales, entonces:

   a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. Para simplificar una potencia racional se debe verificar que la base sea la menor posible.

Ejemplo

Simplifica las respuestas de los literales c), d) y e) del problema inicial.

c) $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{\cancel{3} \times 1}{\cancel{3}}} = 2$ d) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{\cancel{3} \times 2}{\cancel{3}}} = 3^2$ e) $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{\cancel{4} \times 3}{\cancel{4}}} = 2^3$

Problemas

Realiza las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta.

a) $2^{\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{8}{5}}$ b) $9^{\frac{1}{5}} \times 9^{\frac{3}{10}}$ c) $25 \div 25^{\frac{1}{2}}$ d) $27^{\frac{5}{3}} \div 27$

e) $(9^{\frac{9}{7}})^{\frac{7}{6}}$ f) $(8^{\frac{10}{9}})^{\frac{3}{2}}$ g) $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}}$ h) $98^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}}$

Unidad 4

Indicador de logro

1.9 Aplica las propiedades de los exponentes, combinando exponentes racionales y enteros.

Secuencia

Se realizan las operaciones entre potencias cuyos exponentes son racionales, de manera análoga a como se realizaron con exponentes enteros, esto permitirá posteriormente efectuar operaciones entre raíces cuyo índice es distinto. Además, para simplificar se debe revisar si la potencia tiene la menor base posible.

Propósito

En la Solución del Problema inicial se debe utilizar la definición del exponente racional. La observación realizada en cada literal es para mostrar la utilidad de las propiedades que permiten desarrollar la operación en menos pasos y sin utilizar explícitamente la definición.

Solución de problemas:

a) $2^{\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{8}{5}} = 2^{\frac{7}{5}+\frac{8}{5}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3$

b) $9^{\frac{1}{5}} \times 9^{\frac{3}{10}} = 9^{\frac{1}{5}+\frac{3}{10}} = 9^{\frac{2}{10}+\frac{3}{10}} = 9^{\frac{5}{10}} = 9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{2 \times \frac{1}{2}} = 3$

c) $25 \div 25^{\frac{1}{2}} = 25^{1-\frac{1}{2}} = 25^{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2 \times \frac{1}{2}} = 5$

d) $27^{\frac{5}{3}} \div 27 = 27^{\frac{5}{3}-1} = 27^{\frac{5}{3}-\frac{3}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3 \times \frac{2}{3}} = 3^2$

e) $\left(9^{\frac{9}{7}}\right)^{\frac{7}{6}} = 9^{\frac{9}{7} \times \frac{7}{6}} = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2 \times \frac{3}{2}} = 3^3$

f) $\left(8^{\frac{10}{9}}\right)^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{10}{9} \times \frac{3}{2}} = 8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^{3 \times \frac{5}{3}} = 2^5$

g) *Forma 1:* $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}} = (16 \times 4)^{\frac{5}{6}} = (2^4 \times 2^2)^{\frac{5}{6}} = (2^6)^{\frac{5}{6}} = 2^{6 \times \frac{5}{6}} = 2^5$

Forma 2: $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}} = (2^4)^{\frac{5}{6}} \times (2^2)^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{20}{6}} \times 2^{\frac{10}{6}} = 2^{\frac{30}{6}} = 2^5$

h) $98^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} = (98 \div 2)^{\frac{1}{2}} = (49)^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7^{2 \times \frac{1}{2}} = 7$

También se pueden reescribir las potencias con la menor base posible antes de efectuar las operaciones.

Lección 1

1.10 Operaciones con raíces de distinto índice

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

Solución

Se escribe cada raíz como exponente racional:

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}}\\ &= 3^1\\ &= 3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3$.

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} &= 9^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{1}{3}} \div 9^{\frac{1}{12}}\\ &= 9^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}}\\ &= 9^{\frac{3}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}}\\ &= 9^{\frac{6}{12}}\\ &= 9^{\frac{1}{2}}\\ &= (3^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{simplificando}\\ &= 3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} = 3$.

Conclusión

Para operar raíces con distinto índice, se realizan los siguientes pasos:
1. Cada raíz se escribe como potencia con exponente racional.
2. Se efectúan las operaciones utilizando propiedades de exponentes racionales.
3. Se simplifica el resultado.

Ejemplo

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} &= \sqrt{2^5} \times \sqrt[3]{2^2} \div \sqrt[6]{2}\\ &= 2^{\frac{5}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{6}}\\ &= 2^{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}\\ &= 2^{\frac{15}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}}\\ &= 2^{\frac{18}{6}}\\ &= 2^3\\ &= 8.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} = 8$.

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{3}{6}+\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{4}{6}}\\ &= 3^{\frac{2}{3}} \quad \text{no se puede simplificar,}\\ &= \sqrt[3]{3^2} \quad \text{se escribe como raíz,}\\ &= \sqrt[3]{9}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3} = \sqrt[3]{9}$.

Problemas

Realiza las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta.

a) $\sqrt{8} \times \sqrt[4]{8} \div \sqrt[12]{8}$

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

d) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{32}$

e) $\sqrt{243} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{3}$

f) $\sqrt[4]{25} \div \sqrt[6]{5}$

Indicador de logro

1.10 Aplica las propiedades de los exponentes racionales para realizar operaciones de raíces con distinto índice.

Secuencia

La utilidad de los exponentes racionales se muestra en esta clase al efectuar operaciones entre raíces con diferente índice.

Propósito

Dado que las operaciones se indican con raíces n-ésimas entonces la respuesta se expresa como una raíz, como se muestra en el Ejemplo b).

Solución de problemas:

a) $\sqrt{8} \times \sqrt[4]{8} \div \sqrt[12]{8} = 8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{4}} \div 8^{\frac{1}{12}} = 8^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = 8^{\frac{6}{12} + \frac{3}{12} - \frac{1}{12}} = 8^{\frac{8}{12}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{6} + \frac{1}{6}} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

d) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{32} = 4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 32^{\frac{1}{12}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times (2^5)^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{2}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{12}} = 2^{\frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12}} = 2^{\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{5}{12}} = 2^{\frac{15}{12}} = 2^{\frac{5}{4}}$

$= \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2}$

e) $\sqrt{243} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{3} = 243^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = (3^5)^{\frac{1}{2}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{5}{2}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{5}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 3^{\frac{15}{6} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6}} = 3^{\frac{18}{6}} = 3^3 = 27$

f) $\sqrt[4]{25} \div \sqrt[6]{5} = 25^{\frac{1}{4}} \div 5^{\frac{1}{6}} = (5^2)^{\frac{1}{4}} \div 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{4}} \div 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} \div 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{3}{6} - \frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

Si la potencia que aparece en el radicando tiene un exponente mayor que 2, puede dejarla expresada sin efectuarla, como en b).

En d) también se puede efectuar la simplificación escribiendo la fracción impropia como un entero más una fracción propia:

$$2^{\frac{5}{4}} = 2^{1 + \frac{1}{4}} = 2 \times 2^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[4]{2}.$$

Además, no es necesario simplificar el exponente de $2^{\frac{2}{4}}$ porque debe reescribirse como fracción equivalente con exponente 12.

1.11 Practica lo aprendido

1. Efectúa las siguientes operaciones, expresa el resultado utilizando potencias con exponente positivo:

a) $5^6 \times 5^5$ b) $(-4) \times (-4)^2$ c) $2^6 \times 2^{-3}$ d) $3^{-7} \times 3^7$

e) $(-6)^{-1} \times (-6)^{-2}$ f) $3^9 \div 3^6$ g) $2 \div 2^4$ h) $(-5)^2 \div (-5)^{-3}$

i) $4^{-5} \div 4^3$ j) $(-2)^{-3} \div (-2)^{-2}$ k) $(4^2)^3$ l) $[(-3)^2]^{-3}$

m) $(2^{-4})^3$ n) $(6^{-1})^{-1}$ o) $(5^{-2})^{-2}$ p) $[(-2)^{-3}]^{-5}$

2. Realiza los siguientes ejercicios, expresa el resultado utilizando potencias con exponente positivo:

a) $3^4 \times 5^4$ b) $2^{-6} \times 3^{-6}$ c) $(-4)^2 \times 8^2$ d) $(-6)^{-3} \times (-5)^{-3}$

e) $9^5 \div 3^5$ f) $16^{-2} \div (-2)^{-2}$ g) $(-35)^7 \div 5^7$ h) $(-18)^{-4} \div (-3)^{-4}$

3. Realiza las siguientes operaciones simplificando tu respuesta:

a) $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{24}$ b) $\sqrt[3]{-20} \times \sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{6}$ d) $\sqrt[3]{80} \div \sqrt[3]{-5}$

e) $\sqrt{\sqrt{324}}$ f) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189}$ g) $\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{4}$ h) $(\sqrt[3]{24})^2$

4. Simplifica las siguientes raíces:

Escribe cada raíz como potencia racional.

a) $\sqrt[4]{4}$ b) $\sqrt[6]{9}$ c) $\sqrt[6]{27}$ d) $\sqrt[6]{16}$

5. Efectúa las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta a la mínima expresión:

a) $\sqrt[6]{9} \times \sqrt[4]{9}$ b) $\sqrt{8} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2}$ c) $\sqrt{27} \div \sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{2}$

6. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$ b) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$

Exponente irracional

El número $\sqrt{2}$ es irracional, por lo que su valor solo es aproximable: $\sqrt{2} = 1.414213...$

Considera la siguiente sucesión de potencias racionales:
$3^1 = 3$, $3^{1.4} = 4.655536...$, $3^{1.41} = 4.706965...$, $3^{1.414} = 4.727695...$, $3^{1.4142} = 4.728733...$

La sucesión se aproxima al número real 4.728804...
Los exponentes de la sucesión se aproximan al valor $\sqrt{2}$. Por lo que, se dirá que la sucesión se aproxima al valor $3^{\sqrt{2}}$.

De esta forma, si x es un número irracional y $a > 0$, es posible definir la potencia a^x siguiendo el proceso anterior.

Por lo tanto, la potencia a^x está definida para todo número real x y $a > 0$. Las propiedades vistas anteriormente se generalizan para todo exponente real. Si a y b son números reales positivos, r y s números reales:

a) $a^r \times a^s = a^{r+s}$ b) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ c) $(a^r)^s = a^{r \times s}$ d) $a^r \times b^r = (a \times b)^r$ e) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Unidad 4

107

Indicador de logro

1.11 Resuelve problemas utilizando potencias y raíces n-ésimas.

Solución de problemas:

1a) $5^6 \times 5^5 = 5^{6+5} = 5^{11}$

1b) $(-4) \times (-4)^2 = (-4)^{1+2} = (-4)^3 = -4^3$

1c) $2^6 \times 2^{-3} = 2^{6+(-3)} = 2^{6-3} = 2^3$

1d) $3^{-7} \times 3^7 = 3^{-7+7} = 3^0 = 1$

1e) $(-6)^{-1} \times (-6)^{-2} = (-6)^{-1+(-2)} = (-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = -\frac{1}{6^3}$

1f) $3^9 \div 3^6 = 3^{9-6} = 3^3$

1g) $2 \div 2^4 = 2^{1-4} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

1h) $(-5)^2 \div (-5)^{-3} = (-5)^{2-(-3)} = (-5)^{2+3} = (-5)^5 = -5^5$

1i) $4^{-5} \div 4^3 = 4^{-5-3} = 4^{-8} = \frac{1}{4^8}$

1j) $(-2)^{-3} \div (-2)^{-2} = (-2)^{-3-(-2)} = (-2)^{-3+2} = (-2)^{-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

1k) $(4^2)^3 = 4^{2\times 3} = 4^6$

1l) $[(-3)^2]^{-3} = (-3)^{2\times(-3)} = (-3)^{-6} = \frac{1}{(-3)^6} = \frac{1}{3^6}$

1m) $(2^{-4})^3 = 2^{-4\times 3} = 2^{-12} = \frac{1}{2^{12}}$

1n) $(6^{-1})^{-1} = 6^{(-1)\times(-1)} = 6$

1o) $(5^{-2})^{-2} = 5^{-2\times(-2)} = 5^4$

1p) $((-2)^{-3})^{-5} = (-2)^{-3\times(-5)} = (-2)^{15} = -2^{15}$

2a) $3^4 \times 5^4 = (3 \times 5)^4 = 15^4$

2b) $2^{-6} \times 3^{-6} = (2 \times 3)^{-6} = 6^{-6} = \frac{1}{6^6}$

2c) $(-4)^2 \times 8^2 = (-4 \times 8)^2 = (-32)^2 = 32^2$

2d) $(-6)^{-3} \times (-5)^{-3} = (-6 \times (-5))^{-3} = 30^{-3} = \frac{1}{30^3}$

2e) $9^5 \div 3^5 = (9 \div 3)^5 = 3^5$

2f) $16^{-2} \div (-2)^{-2} = (16 \div (-2))^{-2} = (-8)^{-2} = \frac{1}{(-8)^2} = \frac{1}{8^2}$

2g) $(-35)^7 \div 5^7 = (-35 \div 5)^7 = (-7)^7 = -7^7$

2h) $(-18)^{-4} \div (-3)^{-4} = (-18 \div (-3))^{-4} = 6^{-4} = \frac{1}{6^4}$

3a) $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{24} = \sqrt[5]{12 \times 24} = \sqrt[5]{2^5 \times 3^2} = 2\sqrt[5]{3^2} = 2\sqrt[5]{9}$

3b) $\sqrt[3]{-20} \times \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{-20 \times 25} = \sqrt[3]{-2^2 \times 5^3} = -5\sqrt[3]{4}$

3c) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{48 \div 6} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

3d) $\sqrt[3]{80} \div \sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{80 \div (-5)} = \sqrt[3]{-16} = -\sqrt[3]{2^3 \times 2} = -2\sqrt[3]{2}$

3e) $\sqrt{\sqrt{324}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3^2}} = \sqrt{2 \times 3 \times 3} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$

3f) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} = \sqrt[3]{2^3 \times 7} + \sqrt[3]{3^3 \times 7} = 2\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{7} = 5\sqrt[3]{7}$

3g) $\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^4 \times 2^2} - \sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt[4]{4} - \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$
$= 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

3h) $(\sqrt[3]{24})^2 = \sqrt[3]{24^2} = \sqrt[3]{(2^3 \times 3)^2} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 3^2} = 4\sqrt[3]{9}$

4a) $\sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

4b) $\sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$

4c) $\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$

4d) $\sqrt[6]{16} = \sqrt[3]{4}$

5a) $\sqrt[6]{9} \times \sqrt[4]{9} = 9^{\frac{1}{6}} \times 9^{\frac{1}{4}} = 9^{\frac{5}{12}}$
$= 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

5b) $\sqrt{8} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2} = 4$

5c) $\sqrt{27} \div \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[6]{3}$

5d) $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

6a) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}$
$= \sqrt[3]{8} - \cancel{\sqrt[3]{12}} + \cancel{\sqrt[3]{18}} + \cancel{\sqrt[3]{12}} - \cancel{\sqrt[3]{18}} + \sqrt[3]{27}$
$= \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{3^3} = 2 + 3 = 5$

6b) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) = -1$

La definición de exponente irracional presentada en el recuadro de información adicional completa la posibilidad de utilizar cualquier exponente real, así es posible definir la función exponencial como una función real.

Lección 2 Funciones y ecuaciones exponenciales

2.1 Definición de la función exponencial

Problema inicial

Para cada literal completa la tabla y grafica la función dada.

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					

Solución

a) $f(x) = 2^x$

Si $x = -2$ se tiene $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

Si $x = -1$ se tiene $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Si $x = 0$ se tiene $f(0) = 2^0 = 1$

Si $x = 1$ se tiene $f(1) = 2^1 = 2$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = 2^2 = 4$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Si $x = -2$ se tiene $f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2 = 4$

Si $x = -1$ se tiene $f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$

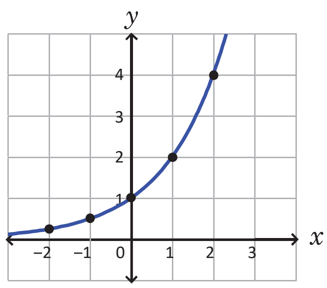
Si $x = 0$ se tiene $f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

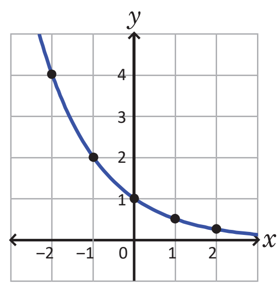
Si $x = 1$ se tiene $f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Se traza una curva sobre los puntos obtenidos en cada caso.





Definición

Sea a un número real positivo y diferente de 1. La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ se llama **función exponencial**. Al número a se le llama **base**.

La gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$.

En la función exponencial la variable x está en el exponente.

Si se cumple que $0 < a < 1$, entonces $f(x) = a^x$, se puede escribir de la forma $f(x) = b^{-x}$, donde $b = \frac{1}{a} > 1$. Por ejemplo $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones exponenciales:

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 3^{-x}$ c) $f(x) = 4^x$ d) $f(x) = 4^{-x}$

Indicador de logro

2.1 Grafica funciones exponenciales utilizando tablas y localizando puntos en el plano cartesiano.

Secuencia

En la lección anterior quedó definida la potencia para todo exponente real, por lo que ahora se define la función exponencial y se elabora su gráfica a partir de la ubicación de puntos en el plano cartesiano.

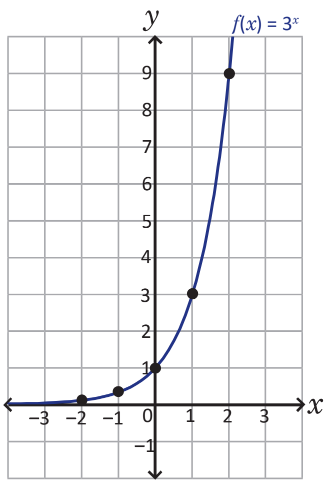
Posibles dificultades

Al elaborar la gráfica debe darse la indicación de que la gráfica no corta al eje x, incluso puede sugerir probar valores en la calculadora para observar el comportamiento de la gráfica.

Solución de problemas:

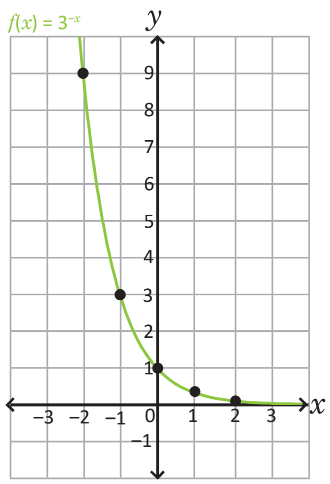
a)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



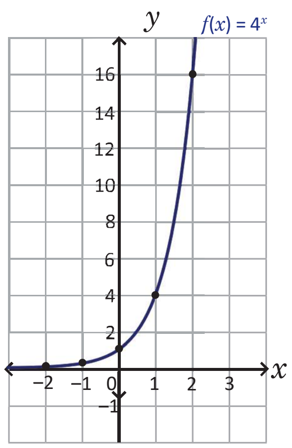
b)

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$



c)

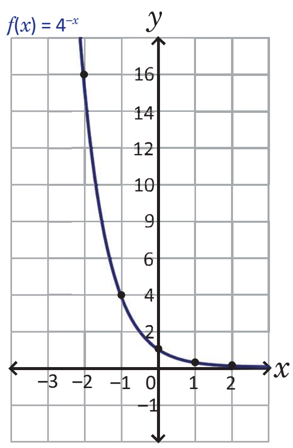
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16



Las gráficas de los literales c) y d) pueden elaborarse a escala o hasta $y = 4$.

d)

x	-2	-1	0	1	2
y	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$



Lección 2

2.2 Funciones exponenciales simétricas

Problema inicial

1. Grafica las siguientes funciones en un mismo plano cartesiano.
   a) $f_1(x) = 3^x$ b) $f_2(x) = 3^{-x}$ c) $f_3(x) = -3^x$
2. Compara la coordenada en x de los puntos de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ que tienen la misma coordenada en y.
3. Compara la coordenada en y de los puntos de $f_1(x)$ y $f_3(x)$ que tienen la misma coordenada en x.

Solución

1. a) $f_1(x) = 3^x$

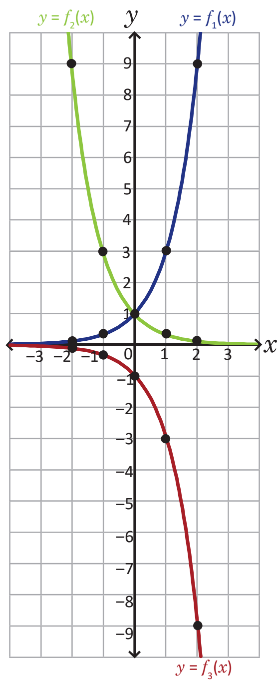
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

b) $f_2(x) = 3^{-x}$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

c) $f_3(x) = -3^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	-9



2.

$f_1(x) = 3^x$	$f_2(x) = 3^{-x}$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(2, \frac{1}{9}\right)$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, \frac{1}{3}\right)$
(0, 1)	(0, 1)
(1, 3)	(–1, 3)
(2, 9)	(–2, 9)

Si (x, y) es un punto de la gráfica de f_1 entonces $(-x, y)$ es un punto de la gráfica de f_2. Las gráficas son simétricas respecto al eje y.

3.

$f_1(x) = 3^x$	$f_3(x) = -3^x$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(-2, -\frac{1}{9}\right)$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$
(0, 1)	(0, –1)
(1, 3)	(1, –3)
(2, 9)	(2, –9)

Si (x, y) es un punto de la gráfica de f_1 entonces $(x, -y)$ es un punto de la gráfica de f_2. Las gráficas son simétricas respecto al eje x.

Se observa que:
- La gráfica de la función $y = 3^{-x}$ es simétrica a la gráfica de la función $y = 3^x$ respecto al eje y.
- La gráfica de la función $y = -3^x$ es simétrica a la gráfica de la función $y = 3^x$, respecto al eje x.

Conclusión

1. Las funciones $y = a^x$ y $y = a^{-x}$ son simétricas respecto al eje y.
   Para graficar $y = a^{-x}$ se cambia el signo a la coordenada en x de los puntos de la gráfica de $y = a^x$.

2. Las funciones $y = a^x$ y $y = -a^x$ son simétricas respecto al eje x.
   Para graficar $y = -a^x$ se cambia el signo a la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $y = a^x$.

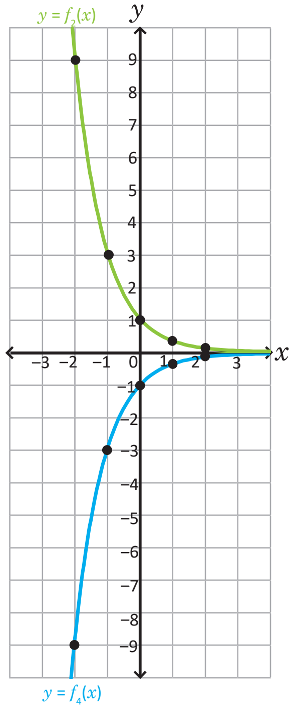
3. Las funciones $y = a^{-x}$ y $y = -a^{-x}$, son simétricas respecto al eje x.
   Para graficar $y = -a^{-x}$ se cambia el signo a la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $y = a^{-x}$.

Ejemplo

Grafica la función $f_4(x) = -3^{-x}$.

Para graficar $f_4(x) = -3^{-x}$ se cambia el signo a la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $f_2(x) = 3^{-x}$.

$f_2(x) = 3^{-x}$	$f_4(x) = -3^{-x}$
$\left(2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(2, -\frac{1}{9}\right)$
$\left(1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, -\frac{1}{3}\right)$
(0, 1)	(0, –1)
(–1, 3)	(–1, –3)
(–2, 9)	(–2, –9)



Problemas

1. Grafica las siguientes funciones en el mismo plano cartesiano utilizando las simetrías:
   $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{-x}$, $f_3(x) = -2^x$ y $f_4(x) = -2^{-x}$.

2. Grafica la función $f_4(x) = -3^{-x}$ a partir de la función $f_1(x) = 3^x$.

Comprueba que f_4 es simétrica a f_1 respecto al origen: si (a, b) está en la gráfica de f_1 entonces $(-a, -b)$ está en la gráfica de f_4.

Indicador de logro

2.2 Grafica funciones exponenciales utilizando simetrías respecto de los ejes de coordenadas y el origen.

Secuencia

Teniendo clara la forma de las gráficas de las funciones exponenciales a^x y a^{-x} se estudian ahora aquellas que pueden obtenerse aplicando simetrías respecto a los ejes coordenados y el origen, que se estudió en la unidad 5 de primer año.

Propósito

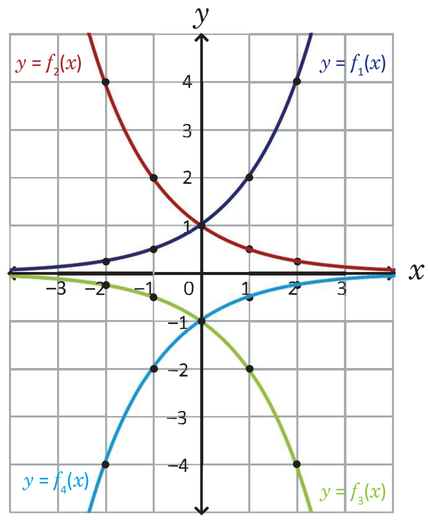
En el Problema inicial el estudiante realiza la comparación de las coordenadas de algunos puntos, de esta manera no solo visualiza la simetría de manera gráfica sino también por medio de su definición.

Solución de problemas:

1. Se cambia el signo a la primera coordenada. Se cambia el signo a la segunda coordenada.

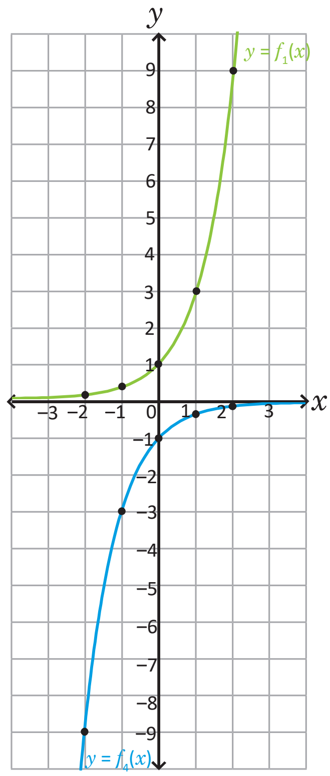
$f_1(x) = 2^x$	$f_2(x) = 2^{-x}$	$f_3(x) = -2^x$	$f_4(x) = -2^{-x}$
(2, 4)	(−2, 4)	(2, −4)	(−2, −4)
(1, 2)	(−1, 2)	(1, −2)	(−1, −2)
(0, 1)	(0, 1)	(0, −1)	(0, −1)
$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(-2, -\frac{1}{4}\right)$	$\left(2, -\frac{1}{4}\right)$

Se cambia el signo a la segunda coordenada.



2. Sea (a, b) un punto en la gráfica de $f_1(a) = 3^b$ entonces $(a, b) = (a, 3^a)$.
Se comprueba que $(-a, -b)$ está en la gráfica de $f_4(x) = -3^{-x}$.
Evaluando $f_4(-a) = -3^{-(-a)} = -3^a = -b$.
Por lo que $(-a, -b)$ es un punto de la gráfica de $f_4(x) = -3^{-x}$.

$f_2(x) = 3^x$	$f_4(x) = -3^{-x}$
(2, 9)	(−2, −9)
(1, 3)	(−1, −3)
(0, 1)	(0, −1)
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$

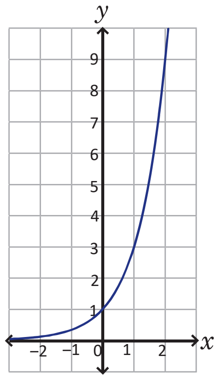


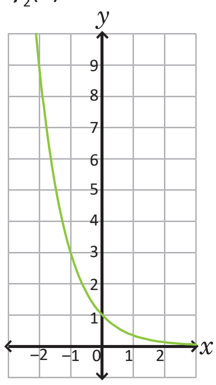
2.3 Características de las funciones exponenciales

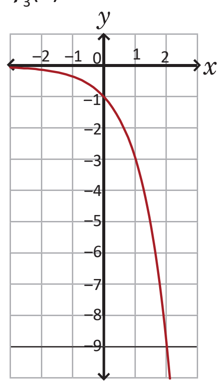
Problema inicial

Se muestran las siguientes funciones y sus gráficas:

1. $f_1(x) = 3^x$
2. $f_2(x) = 3^{-x}$
3. $f_3(x) = -3^x$







Para cada una de las gráficas determina:

a) Interceptos con los ejes

b)Dominio y rango

c) Si la función es creciente o decreciente

d) Asíntotas de la función

f es una función creciente si $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
f es una función decrecientes si $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

Solución

1. $f_1(x) = 3^x$

a) Interceptos con los ejes:
Eje y: $f_1(0) = 3^0 = 1$, el intercepto es (0, 1).
Eje x: No existe un valor real x tal que $3^x = 0$.

b) Dominio y rango:
$D_{f_1} = \mathbb{R}$
$R_{f_1} =]0,\infty[$

c) La función es creciente:
Si $b < c$ entonces $3^b < 3^c$

d) Asíntotas de la función:
$y = 0$ es asíntota horizontal de la función, pues la gráfica de f_1 se aproxima a la recta $y = 0$ a medida que x disminuye su valor.

2. $f_2(x) = 3^{-x}$

a) Interceptos con los ejes:
Eje y: $f_2(0) = 3^{-0} = 3^0 = 1$, el intercepto es (0, 1).
Eje x: No existe un valor real x tal que $3^{-x} = 0$.

b) Dominio y rango:
$D_{f_2} = \mathbb{R}$
$R_{f_2} =]0,\infty[$

c) La función es decreciente:
Si $b < c$ entonces $3^{-b} > 3^{-c}$

d) Asíntotas de la función:
$y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

3. Las gráficas de las funciones $f_3(x) = -3^x$ y $f_1(x) = 3^x$ son simétricas respecto al eje x.

	Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
$f_1(x) = 3^x$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Creciente Si $b < c$ entonces $3^b < 3^c$	$y = 0$
$f_3(x) = -3^x$	(0, −1)	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $-3^b > -3^c$	$y = 0$

Unidad 4

Lección 2

Conclusión

La siguiente tabla reúne las características de las gráficas de las funciones $f_1(x) = a^x$, $f_2(x) = a^{-x}$ y $f_3(x) = -a^x$ donde $a > 1$.

	$f_1(x) = a^x$	$f_2(x) = a^{-x}$	$f_3(x) = -a^x$
Intercepto en el eje y	(0, 1)	(0, 1)	(0, –1)
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Rango	$R_{f_1} =]0, +\infty[$ $= \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$	$R_{f_2} =]0, +\infty[$	$R_{f_2} =]-\infty, 0[$ $= \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$
Creciente o Decreciente	Creciente Si $b < c$ entonces $a^b < a^c$	Decreciente Si $b < c$ entonces $a^{-b} > a^{-c}$	Decreciente Si $b < c$ entonces $-a^b > -a^c$
Asíntota	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$

Además, observa que las funciones f_1, f_2 y f_3 no tienen intercepto con el eje x.

Si a es un número real tal que $a > 1$, entonces:

- La función $f(x) = a^x$, se llama **función exponencial creciente**.
- La función $f(x) = a^{-x}$, se llama **función exponencial decreciente**.

Problemas

1. Utiliza la simetría respecto al eje x para completar las características de la función $f(x) = -a^{-x}$ a partir de las características de la función $f(x) = a^{-x}$, $a > 1$.

	Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
$f(x) = a^{-x}$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $a^{-b} > a^{-c}$	$y = 0$
$f(x) = -a^{-x}$		$\mathbb{R}$			$y = 0$

2. Determina el intercepto en el eje y, dominio, rango, monotonía y asíntotas de las siguientes funciones.

   a) $f_1(x) = 2^x$　　b) $f_2(x) = 2^{-x}$　　c) $f_3(x) = -2^x$　　d) $f_4(x) = -2^{-x}$

3. Resuelve las siguientes desigualdades utilizando la gráfica de la función $y = 2^x$.

   a) $2^x \geq 1$　　b) $2^x < 1$

4. Demuestra que la función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es creciente en $[0, \infty[$, desarrollando los siguientes pasos:

   a) Demuestra que si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(d + \frac{1}{d}\right) = (c - d)\left(1 - \frac{1}{cd}\right)$.

   b) De a) prueba que $(2^b + 2^{-b}) - (2^a + 2^{-a}) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)$.

   c) De b) concluya que si $0 \leq a < b$ entonces $f(a) < f(b)$.

5. Demuestra que la función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es decreciente en $]-\infty, 0]$.

Indicador de logro

2.3 Determina las características de una función exponencial dada (dominio, rango, monotonía y asíntotas).

Secuencia

Algunas características de las funciones que se estudiaron en primer año se establecieron gráficamente; de igual manera se establecerán las características de las funciones exponenciales como la monotonía, el dominio, el rango y la asíntota. Las otras se estudiarán por medio de su definición.

Propósito

Algunas de las características se pueden justificar de manera intuitiva, es por eso que en la Solución se establece la asíntota horizontal sin realizar una descripción formal, de hecho se puede utilizar la calculadora para evaluar los valores. La monotonía se puede establecer gráficamente.

Solución de problemas:

1. Utilizando que la función $f(x) = a^{-x}$ puede obtenerse cambiando el signo a la segunda coordenada de los puntos de $f(x) = -a^{-x}$.

Intercepto en el eje y: (0, 1) en $f_1(x) = a^{-x} \Rightarrow (0, -1)$ en $f_2(x) = -a^{-x}$.

Dominio: no cambia porque son valores en la variable x.

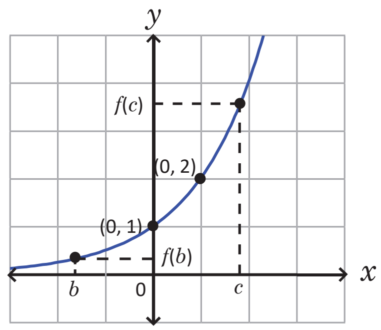
Rango: $R_{f_1} =]0, \infty[= \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} \Rightarrow R_{f_2} = \{y \in \mathbb{R} \mid -y > 0\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\} =]-\infty, 0[$.

Creciente o decreciente
Se sabe que si $b < c$ entonces $a^{-b} > a^{-c}$, multiplicando por -1 esta desigualdad, se tiene que si $b < c$ entonces $-a^{-b} < -a^{-c}$, es decir si $b < c$ entonces $f_2(b) < f_2(c)$.

	Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
$f_1(x) = a^{-x}$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $a^{-b} > a^{-c}$	$y = 0$
$f_2(x) = -a^{-x}$	(0, −1)	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	Creciente Si $b < c$ entonces $-a^{-b} < -a^{-c}$	$y = 0$

2a) Se obtienen las características de $f_1(x) = 2^x$ a partir de su gráfica.

Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Creciente Si $b < c$ entonces $2^b < 2^c$	$y = 0$



2b) Se obtienen las características de $f_2(x) = 2^{-x}$ a partir de la simetría con $f(x) = 2^x$.

El intercepto (0, 1) no cambia por ser cero su coordenada en x.

El dominio es $\mathbb{R}$ y el rango: $R_{f_2} =]0, \infty[$.

Creciente o decreciente
Se sabe que si $b < c$ entonces $2^b < 2^c$,

$$\frac{1}{2^b2^c}(2^b) < \frac{1}{2^b2^c}(2^c), \text{ se multiplica por } \frac{1}{2^b2^c}$$

$$\frac{1}{2^c} < \frac{1}{2^b}$$

$$2^{-c} < 2^{-b}$$

Así si $b < c$, entonces $2^{-b} > 2^{-c}$ por lo que la función es decreciente.

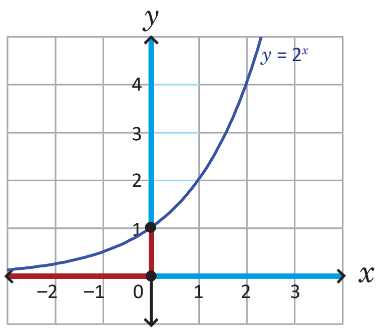
La monotonía también se puede analizar por medio de la gráfica.

La asíntota no cambia $y = 0$.

En resumen, para b), c) y d):

	Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
$f_2(x) = 2^{-x}$	$(0, 1)$	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $2^{-b} > 2^{-c}$	$y = 0$
$f_3(x) = -2^{x}$	$(0, -1)$	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $-2^{b} > -2^{c}$	$y = 0$
$f_4(x) = -2^{-x}$	$(0, -1)$	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	Creciente Si $b < c$ entonces $-2^{-b} < -2^{-c}$	$y = 0$

3.



Por medio de la gráfica se tiene que

3a) $2^x \geq 1$ entonces $x \geq 0$, es decir que se cumple para $x \in [0, \infty[$.

3b) $2^x < 1$ entonces $x < 0$, es decir que se cumple para $x \in]-\infty, 0[$.

> También se puede utilizar la monotonía:
> Si $x \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^0 = 1$ y $x < 0 \Rightarrow 2^x < 2^0 = 1$,
> entonces $2^x \geq 2^0$ solo si $x \geq 0$ y $2^x < 2^0$ solo si $x < 0$.

4a) $\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(d + \frac{1}{d}\right) = (c - d) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) = (c - d) + \left(\frac{d - c}{cd}\right) = (c - d) - \left(\frac{c - d}{cd}\right) = (c - d)\left(1 - \frac{1}{cd}\right)$

4b) Tomando $c = 2^b$ y $d = 2^a$ se tiene que

$$\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(d + \frac{1}{d}\right) = (2^b + 2^{-b}) - (2^a + 2^{-a}) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right).$$

4c) $f(b) - f(a) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)$

Como $0 \leq a < b$ entonces $2^a < 2^b$, es decir, $0 < 2^b - 2^a$. Por otra parte, como $0 < a + b$, entonces

$$1 < 2^{a+b} \Rightarrow \frac{1}{2^{a+b}} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{2^{a+b}}.$$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right) > 0 \Rightarrow f(a) < f(b).$

5 $f(b) - f(a) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)$

Como $a < b \leq 0$ entonces $2^a < 2^b$, es decir, $0 < 2^b - 2^a$. Por otra parte, como $a + b < 0$, entonces

$$2^{a+b} < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{2^{a+b}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{a+b}} < 0,$$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right) < 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$

2.4 Desplazamientos horizontales y verticales de la función exponencial

Problema inicial

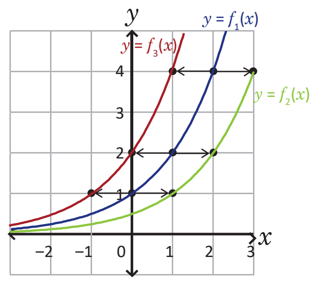
1. Grafica las funciones de cada literal en un mismo plano cartesiano.
   a) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$ y $f_3(x) = 2^{x+1}$ b) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$ y $f_3(x) = 2^x + 1$

2. Describe la gráfica de las funciones $f_2(x)$, $f_3(x)$ como un desplazamiento horizontal o vertical de la función $f_1(x)$.

Solución

a) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$, $f_3(x) = 2^{x+1}$

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f_2(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f_3(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



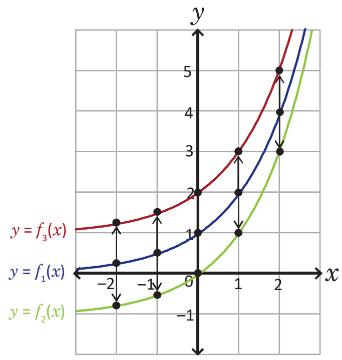
Al dibujar las gráficas de las funciones se observa que:
- La gráfica de $f_2(x)$ es un desplazamiento horizontal de 1 unidad hacia la derecha de la función $f_1(x)$.
- La gráfica de $f_3(x)$ es un desplazamiento horizontal de 1 unidad hacia la izquierda de la función $f_1(x)$.

b) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$, $f_3(x) = 2^x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f_2(x)$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3
$f_3(x)$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5

- La gráfica de $f_2(x)$ es un desplazamiento vertical de 1 unidad hacia abajo de la función $f_1(x)$.

- La gráfica de $f_3(x)$ es un desplazamiento vertical de 1 unidad hacia arriba de la función $f_1(x)$.



La asíntota horizontal de $f(x) = a^x + k$ es $y = k$.

Conclusión

La gráfica de la función $f(x) = a^{x-h}$ es un desplazamiento horizontal de h unidades de la función $f(x) = a^x$.
- Si $h > 0$ el desplazamiento es hacia la derecha.
- Si $h < 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda.

La gráfica de la función $f(x) = a^x + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la función $f(x) = a^x$.
- Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo.

Problemas

1. A partir de la gráfica de $f(x) = 3^x$ grafica las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 3^{x-2}$ b) $f(x) = 3^{x+1}$ c) $f(x) = 3^x - 3$

2. A partir de la gráfica de $f(x) = 4^x$ grafica las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 4^{x-1}$ b) $f(x) = 4^{x+2}$ c) $f(x) = 4^x + 2$

Unidad 4

Indicador de logro

2.4 Grafica funciones exponenciales utilizando desplazamientos horizontales y verticales.

Secuencia

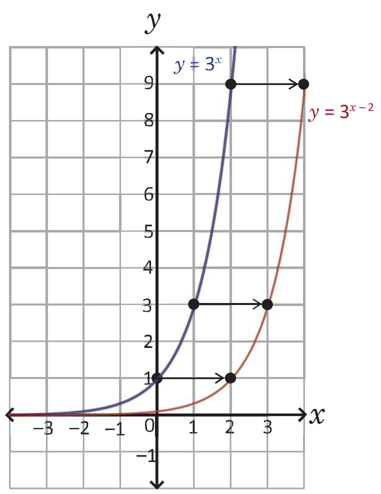
En primer año se graficaron los desplazamientos de funciones. En esta clase se utiliza la misma dinámica para establecer los desplazamientos en las funciones exponenciales, es decir, se comparan las gráficas de las funciones para luego establecer los desplazamientos.

Propósito

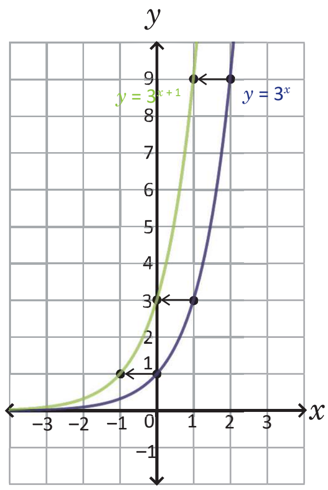
Debido a que solo algunos estudiantes recordarán el concepto de desplazamiento con claridad, la Solución permitirá observar los desplazamientos de las gráficas a partir de la función más simple.

Solución de problemas:

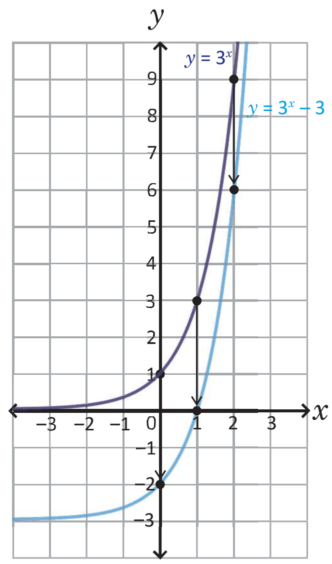
1a) $f(x) = 3^{x-2}$



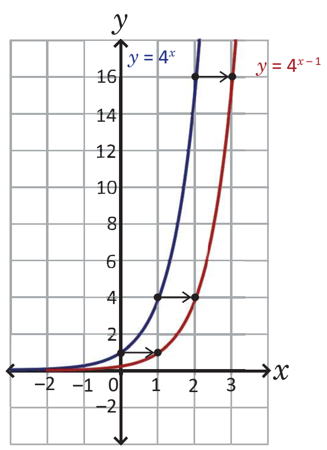
1b) $f(x) = 3^{x+1}$



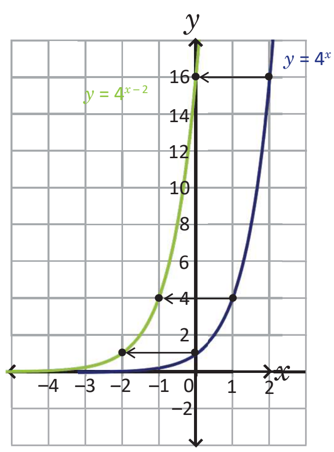
1c) $f(x) = 3^x - 3$



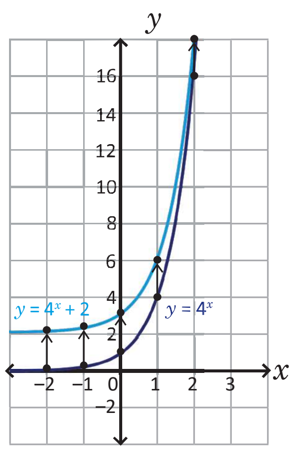
2a) $f(x) = 4^{x-1}$



2b) $f(x) = 4^{x+2}$



2c) $f(x) = 4^x + 2$



2.5 Gráfica de funciones exponenciales con simetría y desplazamientos*

Problema inicial

En cada literal traza la gráfica de $f(x)$ a partir de la gráfica de $f_1(x) = 2^x$, utiliza simetría y desplazamientos.

a) $f(x) = 2^{x-1} + 1$

b) $f(x) = 2^{-(x-1)} - 1$

La simetría se aplica si la potencia es negativa o si la variable tiene signo negativo.

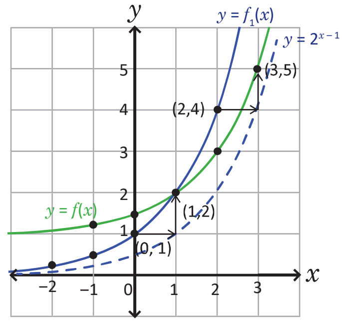
Solución

a) La gráfica de f_1 se dibujó en la clase 2.1.

Se grafica $y = 2^{x-1}$, como un desplazamiento de una unidad hacia la derecha de f_1.

Se grafica $f(x) = 2^{x-1} + 1$, como un desplazamiento de una unidad hacia arriba de y.

Si (x, y) es un punto de $f_1(x)$, entonces el punto $(x + 1, y + 1)$ es un punto de la gráfica de $f(x)$.

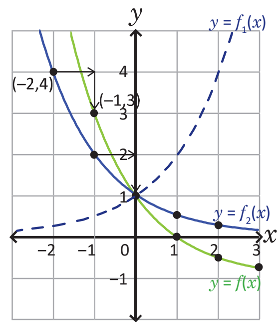


b) Se grafica $f_2(x) = 2^{-x}$ a partir de la simetría con la gráfica de f_1 respecto al eje y.

Se puede escribir $f(x) = f_2(x - 1) - 1$.

Así, $f(x)$ es un desplazamiento de una unidad a la derecha y una unidad hacia abajo de $f_2(x)$.

Sea (x, y) un punto de $f_2(x)$, entonces el punto $(x + 1, y - 1)$ es un punto de la gráfica de $f(x)$.

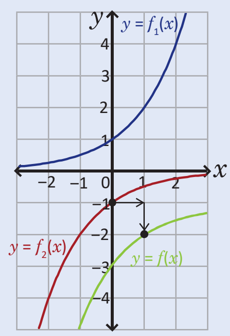


Conclusión

Para elaborar la gráfica de una función exponencial $f(x)$ se realizan los siguientes pasos:

1. Se dibuja la gráfica de $f_1(x) = a^x$.
2. Se dibuja una función $f_2(x)$ de acuerdo a los signos de la potencia y el exponente de $f(x)$:
   - a^{-x} se utiliza simetría respecto al eje y.
   - $-a^x$ se utiliza simetría respecto al eje x.
   - $-a^{-x}$ se utiliza simetría respecto al origen.
3. Desplazamiento, escribiendo $f(x) = f_2(x - h) + k$ entonces el punto (x, y) de la gráfica de f_2 se desplaza al punto $(x + h, y + k)$ de la gráfica de f.

Ejemplo: $f(x) = -2^{-(x-1)} - 1$



1. $f_1(x) = 2^x$

Simetría respecto al origen.

2. $f_2(x) = -2^{-x}$

Desplazamiento

3. $f(x) = -2^{-(x-1)} - 1$

Problemas

Grafica las siguientes funciones utilizando simetrías y desplazamientos:

a) $f(x) = 3^{x-2} + 1$

b) $f(x) = 4^{-x-1} - 3$

c) $f(x) = -2^{x-1} + 2$

d) $f(x) = -3^{-x+1} - 3$

e) $f(x) = 3^{-x+1} + 2$

f) $f(x) = 2^{-x-2} + 1$

g) $f(x) = -3^{x-1} - 1$

h) $f(x) = -3^{-x-2} + 2$

Indicador de logro

2.5 Elabora la gráfica de funciones exponenciales utilizando simetría y desplazamientos.

Secuencia

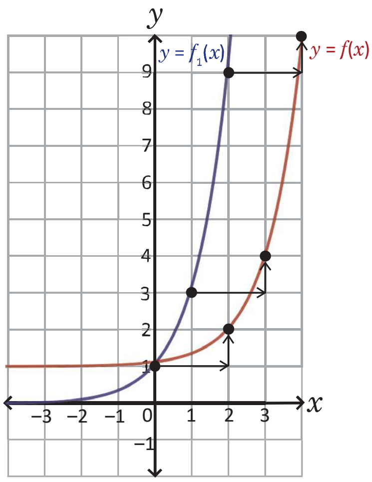
Ahora se grafican funciones exponenciales utilizando la simetría y los desplazamientos al mismo tiempo; si el Problema inicial representa mucha dificultad deberá ser resuelto por el docente.

Propósito

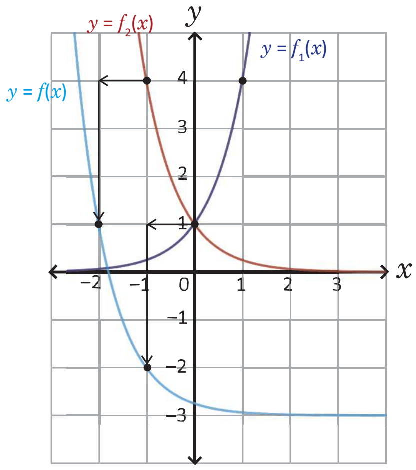
En la Conclusión se establece un proceso general para graficar funciones exponenciales, en el caso del paso 2 debe aclararse que no se utiliza cuando la potencia y la variable en el exponente tienen signo positivo.

Solución de problemas:

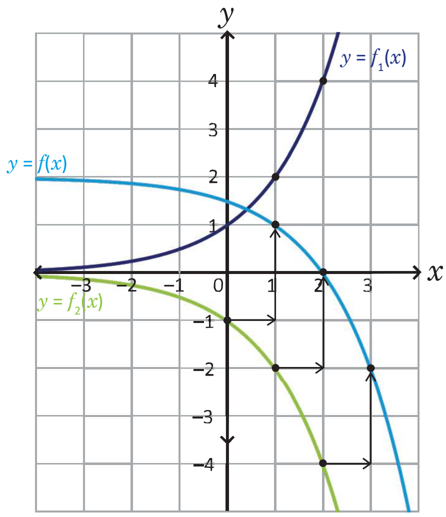
a) $f_1(x) = 3^x$
$f(x) = f_1(x - 2) + 1 = 3^{x-2} + 1$



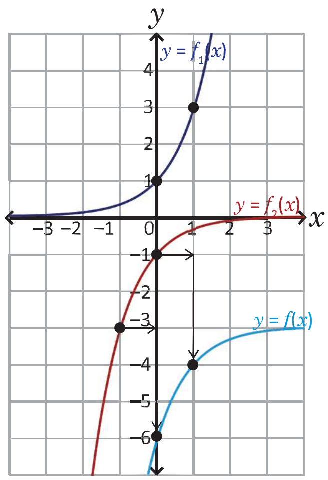
b) $f_1(x) = 4^x$; $f_2(x) = 4^{-x}$
$f(x) = f_2(x - (-1)) - 3 = 4^{-x-1} - 3$



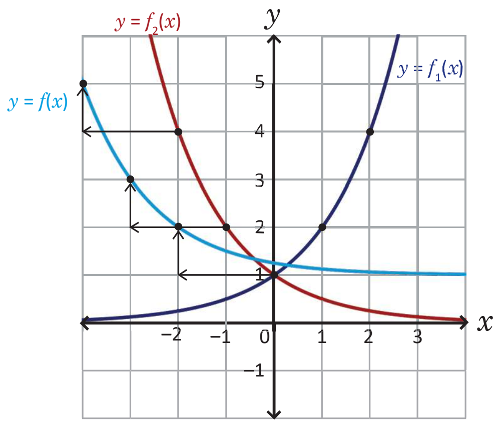
c) $f_1(x) = 2^x$; $f_2(x) = -2^x$
$f(x) = f_2(x - 1) + 2 = -2^{x-1} + 2$



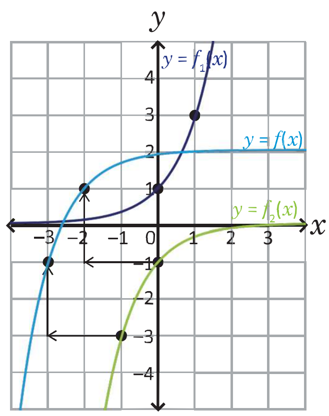
d) $f_1(x) = 3^x$; $f_2(x) = -3^{-x}$
$f(x) = f_2(x - 1) - 3 = -3^{-x+1} - 3$



f) $f_1(x) = 2^x$; $f_2(x) = 2^{-x}$
$f(x) = f_2(x - (-2)) + 1 = 2^{-x-2} + 1$



h) $f_1(x) = 3^x$; $f_2(x) = -3^{-x}$
$f(x) = f_2(x - (-2)) + 2 = -3^{-x-2} + 2$



El problema e) no se resuelve por motivos de espacio.

Lección 2

2.6 Ecuaciones exponenciales

Problema inicial

Encuentra una solución para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $5^x = 25$ b) $2^x = \frac{1}{8}$ c) $4^x = 8$ d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

Solución

a) $5^x = 25$

Descomponiendo $25 = 5^2$,

sustituyendo $5^x = 5^2$.

Por lo tanto, $x = 2$.

b) $2^x = \frac{1}{8}$

Descomponiendo $8 = 2^3$,

sustituyendo $2^x = \frac{1}{2^3}$,

escribiendo con exponente negativo $2^x = 2^{-3}$.

Por lo tanto, $x = -3$.

c) $4^x = 8$

Descomponiendo $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$,

sustituyendo $(2^2)^x = 2^3$,

aplicando propiedades de potencia $2^{2x} = 2^3$,

entonces $2x = 3$.

Por lo tanto, $x = \frac{3}{2}$.

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

Descomponiendo $9 = 3^2$ y $81 = 3^4$,

sustituyendo $\left(\frac{1}{3^2}\right)^x = 3^4$,

escribiendo con exponente negativo: $(3^{-2})^x = 3^4$,

aplicando propiedades de potencia: $3^{-2x} = 3^4$,

entonces $-2x = 4$.

Por lo tanto, $x = -2$.

Definición

Una **ecuación exponencial** es aquella que tiene términos de la forma a^x con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Para resolver una ecuación exponencial se realiza lo siguiente:

1. Se escriben todos los términos en la misma base para obtener una igualdad de potencias con la misma base: $a^r = a^s$.
2. Se igualan los exponentes $r = s$ y se resuelve esta ecuación.

Ejemplo: $27^x = \frac{1}{9}$

$27^x = (3^3)^x = 3^{3x}$ y $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$

$\longrightarrow$ $3^{3x} = 3^{-2}$

$\longrightarrow$ $3x = -2$

Por lo tanto, $x = -\frac{2}{3}$.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^x = 16$ b) $3^{-x+1} = 9^{x+2}$ c) $5^{3x-4} = \frac{1}{25}$ d) $2^{2x-3} = \frac{1}{4}$

e) $2^{5x+7} = \frac{1}{8}$ f) $9^{3x+1} = 27^{-2x-2}$ g) $8^{-x+3} = 4^{x+2}$ h) $4^{2x-1} = \frac{1}{2}$

Unidad 4

Indicador de logro

2.6 Resuelve ecuaciones exponenciales utilizando igualdad de potencias con la misma base.

Secuencia

Se introducen las ecuaciones exponenciales, para resolverlas se tiene como base la descomposición en factores primos. Estas ecuaciones surgen en algunos problemas de la unidad 6.

Propósito

La igualación de exponentes que se encuentra en en el numeral 2 de la Definición viene del hecho de que: si $a \neq 1$, $a > 0$, entonces $a^b = a^c \Leftrightarrow b = c$, porque la función $y = a^x$ es monótona.

Solución de problemas:

a) $2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$

b) $3^{-x+1} = 9^{x+2}$

$3^{-x+1} = (3^2)^{x+2}$

$3^{-x+1} = 3^{2x+4}$

$-x + 1 = 2x + 4$

$-3 = 3x$

$x = -1$

c) $5^{3x-4} = \frac{1}{25}$

$5^{3x-4} = \frac{1}{5^2}$

$5^{3x-4} = 5^{-2}$

$3x - 4 = -2$

$3x = -2 + 4$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

d) $2^{2x-3} = \frac{1}{4}$

$2^{2x-3} = \frac{1}{2^2}$

$2^{2x-3} = 2^{-2}$

$2x - 3 = -2$

$2x = -2 + 3$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

e) $2^{5x+7} = \frac{1}{8}$

$2^{5x+7} = \frac{1}{2^3}$

$2^{5x+7} = 2^{-3}$

$5x + 7 = -3$

$5x = -3 - 7$

$5x = -10$

$x = -2$

f) $9^{3x+1} = 27^{-2x-2}$

$(3^2)^{3x+1} = (3^3)^{-2x-2}$

$3^{6x+2} = 3^{-6x-6}$

$6x + 2 = -6x - 6$

$12x = -8$

$x = \frac{-8}{12}$

$x = -\frac{2}{3}$

g) $8^{-x+3} = 4^{x+2}$

$(2^3)^{-x+3} = (2^2)^{x+2}$

$2^{-3x+9} = 2^{2x+4}$

$-3x + 9 = 2x + 4$

$-5x = -5$

$x = 1$

h) $4^{2x-1} = \frac{1}{2}$

$(2^2)^{2x-1} = 2^{-1}$

$2^{4x-2} = 2^{-1}$

$4x - 2 = -1$

$4x = 1$

$x = \frac{1}{4}$

2.7 Ecuaciones exponenciales que se reducen a ecuaciones cuadráticas

Problema inicial

A partir de la ecuación exponencial: $4^x - 2^x = 2$ realiza lo siguiente:

a) Escribe 4^x como potencia de 2.

b) Sustituye y en lugar de 2^x en la ecuación.

c) Resuelve la ecuación resultante.

d) En las soluciones encontradas sustituye 2^x en lugar de y.

e) Resuelve las ecuaciones resultantes.

Solución

a) Se representa 4^x como una potencia de 2:

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ al descomponer $4 = 2^2$.

Así, se obtiene la ecuación $(2^2)^x - 2^x = 2$.

b) Al utilizar que $(2^2)^x = (2^x)^2$ se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} (2^x)^2 & - & 2^x & = & 2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ y^2 & - & y & = & 2 \end{array}$$

c) Resuelve la ecuación resultante.
$y^2 - y = 2$ es una ecuación cuadrática, resolviendo:

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y - 2)(y + 1) = 0$$

$$y = 2 \quad \text{o} \quad y = -1$$

d) En las soluciones encontradas sustituye 2^x en lugar de y.

$$\begin{array}{ccc} y = 2 & \text{o} & y = -1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2^x = 2 & \text{o} & 2^x = -1 \end{array}$$

e) Resuelve las ecuaciones resultantes.

$2^x = 2$ o $2^x = -1$, esta ecuación no tiene solución,

$2^x = 2^1$ ya que $2^x > 0$, para todo x real.

$x = 1$

Por lo tanto, la solución es $x = 1$.

Conclusión

Una ecuación exponencial, en la que aparece una suma o resta de potencias, se puede reducir a una ecuación cuadrática si una de las bases es el cuadrado de la otra.

Este tipo de ecuaciones se representa así: $p(a^x)^2 + qa^x + r = 0$.

Para resolverla se realiza lo siguiente:
1. Se efectúa el cambio de variable $y = a^x$.
2. Se resuelve la ecuación $py^2 + qy + r = 0$, del paso anterior.
3. En las soluciones encontradas $y = y_1$, $y = y_2$, se sustituye y por a^x: $a^x = y_1$ y $a^x = y_2$.
4. Por último se resuelven ambas ecuaciones, si se puede. Estas son las soluciones de la ecuación original.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales reduciéndolas a ecuaciones cuadráticas.

a) $4^x - 2^x - 12 = 0$

b) $9^x - 2(3^x) + 1 = 0$

c) $4^x - 6(2^x) + 8 = 0$

d) $5(25^x) - 26(5^x) + 5 = 0$

e) $9^{x+1} + 8(3^x) - 1 = 0$

f) $4^{x+2} - 5(2^{x+1}) + 1 = 0$

Si una potencia tiene la forma a^{x+r}, con r un número real, se reescribe $a^{x+r} = a^r(a^x)$.
Por ejemplo, $2^{x+1} = 2(2^x)$.

Indicador de logro

2.7 Resuelve ecuaciones exponenciales que se reducen a ecuaciones cuadráticas por medio de un cambio de variable.

Secuencia

Ahora se resuelven ecuaciones exponenciales que pueden reducirse a ecuaciones cuadráticas, utilizando un cambio de variable. Por lo tanto, será necesario que el estudiante recuerde los métodos para resolver este tipo de ecuaciones que ya se han estudiado en las unidades de ecuaciones y secciones cónicas.

Posibles dificultades

El Problema inicial plantea al estudiante el proceso para resolver la ecuación dada. En la Solución, al sustituir la potencia por la variable auxiliar puede haber confusión si no se tiene claro la posibilidad de alternar los exponentes en la potencia de una potencia (ver literal b).

Solución de problemas:

a) $4^x - 2^x - 12 = 0$, $y = 2^x$

$\Rightarrow 4^x - 2^x - 12 = y^2 - y - 12 = (y - 4)(y + 3) = 0$

$\Rightarrow y - 4 = 0$ o $y + 3 = 0$

$\Rightarrow y = 4$ o $y = -3$

$\Rightarrow$ Si $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$.

$\Rightarrow$ Si $2^x = -3$ no tiene solución.

Por lo tanto, la solución es $x = 2$.

b) $9^x - 2(3^x) + 1 = 0$, $y = 3^x$

$\Rightarrow 9^x - 2(3^x) + 1 = y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Por lo tanto, la solución es $x = 0$.

c) $4^x - 6(2^x) + 8 = 0$, $y = 2^x$

$\Rightarrow 4^x - 6(2^x) + 8 = y^2 - 6y + 8 = (y - 4)(y - 2) = 0$

$\Rightarrow y - 4 = 0$ o $y - 2 = 0$

$\Rightarrow y = 4$ o $y = 2$

$\Rightarrow$ Si $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$.

$\Rightarrow$ Si $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 1$, $x = 2$.

d) $5(25^x) - 26(5^x) + 5 = 0$, $y = 5^x$

$\Rightarrow 5(25^x) - 26(5^x) + 5 = 5y^2 - 26y + 5$

$= (y - 5)(5y - 1) = 0$

$\Rightarrow y - 5 = 0$ o $5y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 5$ o $y = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow 5^x = 5$ o $5^x = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ Si $5^x = 5 \Rightarrow x = 1$.

$\Rightarrow$ Si $5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1} \Rightarrow x = -1$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 1$, $x = -1$.

e) $9^{x+1} + 8(3^x) - 1 = 0$, $y = 3^x$

$\Rightarrow 9^{x+1} + 8(3^x) - 1 = 9(9^x) + 8(3^x) - 1 = 9y^2 + 8y - 1$

$= (y + 1)(9y - 1) = 0$

$\Rightarrow y + 1 = 0$ o $9y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = -1$ o $y = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow$ Si $3^x = -1$ no tiene solución.

$\Rightarrow$ Si $3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$.

Por lo tanto, la solución es $x = -2$.

f) $4^{x+2} - 5(2^{x+1}) + 1 = 0$, $y = 2^x$

$\Rightarrow 4^{x+2} - 5(2^{x+1}) + 1 = 16(4^x) - 10(2^x) + 1$

$= 16y^2 - 10y + 1$

$= (2y - 1)(8y - 1) = 0$

$\Rightarrow 2y - 1 = 0$ o $8y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}$ o $y = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow$ Si $2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow x = -1$.

$\Rightarrow$ Si $2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$.

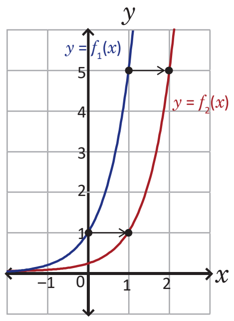
Por lo tanto, las soluciones son $x = -2$, $x = -3$.

2.8 Practica lo aprendido

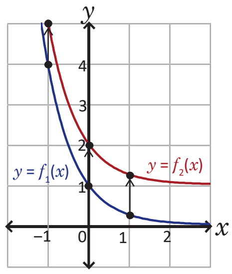
1. Justifica las siguientes afirmaciones.
   a) La gráfica de las funciones $y = 2^x$ y $y = 2^{-x}$ son simétricas respecto al eje y.
   b) La gráfica de las funciones $y = 3^x$ y $y = -3^x$ son simétricas respecto al eje x.
   c) Si (a, b) es un punto de la gráfica de la función $y = 3^x$ entonces $(-a, -b)$ es un punto de $y = -3^x$.

2. Utilizando las gráficas de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Determina la ecuación de $f_2(x)$ a partir de $f_1(x)$.

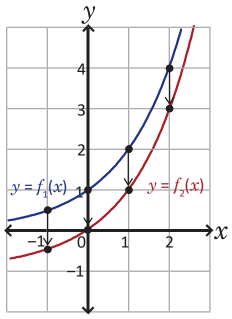
a) $f_1(x) = 5^x$



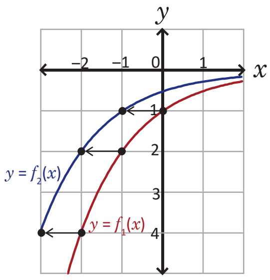
b) $f_1(x) = 4^{-x}$



c) $f_1(x) = 2^x$



d) $f_1(x) = -2^{-x}$



3. Grafica las siguientes funciones y describe sus características: interceptos con los ejes, dominio, rango, asíntota de la función y crecimiento o decrecimiento.

   a) $f(x) = 2^{x-3} - 2$ b) $f(x) = 3^{-x-1} + 4$ c) $f(x) = 5^{-x+2} + 2$ d) $f(x) = -4^{x-1} - 1$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

   a) $2^{3x-1} = 32$ b) $3^{-2x+3} = \frac{1}{27}$ c) $4^{3x-3} = 1$

   d) $25^{x+3} = \frac{1}{5}$ e) $7^{-2x-4} = 49$ f) $16^{x-3} = 8^{2x-1}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales reduciéndolas a ecuaciones cuadráticas:

   a) $9^x - 4(3^x) + 3 = 0$ b) $6^{2x} - 5(6^x) - 6 = 0$ c) $3^{2x+3} - 4(3^{x+1}) + 1 = 0$

Indicador de logro

2.8 Resuelve problemas sobre funciones y ecuaciones exponenciales.

Solución de problemas:

1a) Si (a, b) está en la gráfica de $y = 2^x \Rightarrow b = 2^a$.
Evaluando $-a$ en $y = 2^{-x}$ se tiene que $y = 2^{-(-a)} = 2^a = b \Rightarrow (-a, b)$ está en la gráfica de $y = 2^{-x}$.
Los puntos (a, b) y $(-a, b)$ son simétricos respecto al eje y.
Por lo tanto, la gráfica de las funciones $y = 2^x$ y $y = 2^{-x}$ son simétricas respecto al eje y.

1b) Si (a, b) está en la gráfica de $y = 3^x \Rightarrow b = 3^a$.
Evaluando a en $y = -3^x$ se tiene que $y = -3^a = -3^a = -b \Rightarrow (a, -b)$ está en la gráfica de $y = -3^x$.
Los puntos (a, b) y $(a, -b)$ son simétricos respecto al eje x.
Por lo tanto, las gráficas de las funciones $y = 3^x$ y $y = -3^x$ son simétricas respecto al eje x.

1c) Si (a, b) está en la gráfica de $y = 3^x$ entonces $b = 3^a$.
Evaluando $-a$ en $y = -3^{-x}$ se tiene que $y = -3^{-(-a)} = -3^a = -b \Rightarrow (-a, -b)$ está en la gráfica de $y = -3^{-x}$.

2a) $f_1(x) = 5^x$, $f_2(x) = 5^{x-1}$

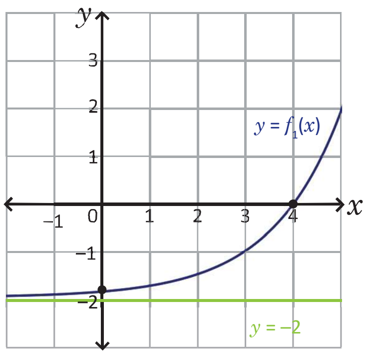
2b) $f_1(x) = 4^{-x}$, $f_2(x) = 4^{-x} + 1$

2c) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$

2d) $f_1(x) = -2^{-x}$, $f_2(x) = -2^{-(x-(-1))} = -2^{-(x+1)}$

3a) $f_1(x) = 2^{x-3} - 2$. La gráfica se obtiene después de trasladar la de $y = 2^x$, 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.

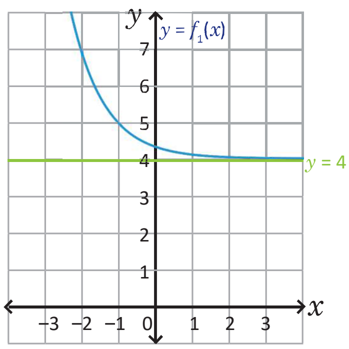
Interceptos con los ejes:
Eje y: $f_1(0) = 2^{0-3} - 2 = 2^{-3} - 2 = \frac{1}{8} - 2 = -\frac{15}{8}$, el intercepto es $\left(0, -\frac{15}{8}\right)$.
Eje x: $2^{x-3} - 2 = 0 \Rightarrow 2^{x-3} = 2 \Rightarrow x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$, el intercepto es $(4, 0)$.



Dominio y rango: $D_{f_1} = \mathbb{R}$, $R_{f_1} =]-2, \infty[$.

La función es creciente:
Si $b < c$ entonces $b - 3 < c - 3 \Rightarrow 2^{b-3} < 2^{c-3} \Rightarrow 2^{b-3} - 2 < 2^{c-3} - 2$
$\Rightarrow f(b) < f(c)$.
Asíntotas de la función: $y = -2$.

3b) $f(x) = 3^{-x-1} + 4$. La gráfica se obtiene después de trasladar la de $y = 3^{-x}$, 1 unidad a la izquierda y 4 unidades hacia abajo.
Interceptos con los ejes
Eje y: $\left(0, \frac{13}{3}\right)$.
Eje x: $3^{-x-1} + 4 = 0 \Rightarrow 3^{-x-1} = -4$, por lo tanto, no tiene.



Dominio y rango: $D_{f_1} = \mathbb{R}$, $R_{f_1} =]4, \infty[$.

La función es decreciente.

Asíntotas de la función: $y = 4$.

3c) $f(x) = 5^{-x+2} + 2$. La gráfica se obtiene después de trasladar la de $y = 5^{-x}$, 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba.

Interceptos con los ejes

Eje y: (0, 27).

Eje x: no tiene.

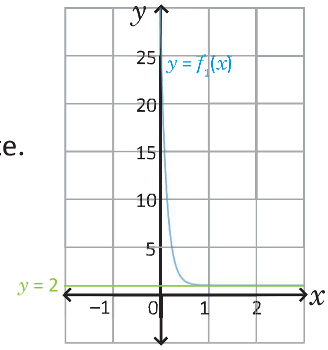
Dominio y rango:

$D_{f_1} = \mathbb{R}$, $R_{f_1} =]2, \infty[$.

La función es decreciente.

Asíntotas de la función:

$y = 2$.



3d) $f(x) = -4^{x-1} - 1$. La gráfica se obtiene después de trasladar la de $y = -4^{x}$, 1 unidad a la derecha y una unidad hacia abajo.

Interceptos con los ejes

Eje y: $\left(0, -\frac{5}{4}\right)$.

Eje x: no tiene.

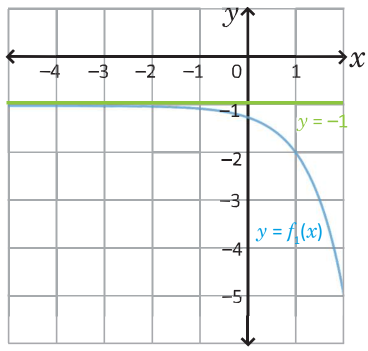
Dominio y rango:

$D_{f_1} = \mathbb{R}$,

$R_{f_1} =]-\infty, -1[$.

La función es decreciente.

Asíntotas de la función: $y = -1$.



4a) $2^{3x-1} = 32$

$2^{3x-1} = 2^{5}$

$3x - 1 = 5$

$3x = 6$

$x = 2$

4b) $3^{-2x+3} = \frac{1}{27}$

$3^{-2x+3} = 3^{-3}$

$-2x + 3 = -3$

$-2x = -6$

$x = 3$

4c) $4^{3x-3} = 1$

$4^{3x-3} = 4^{0}$

$3x - 3 = 0$

$3x = 3$

$x = 1$

4d) $25^{x+3} = \frac{1}{5}$

$(5^{2})^{3x-1} = 5^{-1}$

$5^{6x-2} = 5^{-1}$

$6x - 2 = -1$

$6x = 1$

$x = \frac{1}{6}$

4e) $7^{-2x-4} = 49$

$7^{-2x-4} = 7^{2}$

$-2x - 4 = 2$

$-2x = 6$

$x = -3$

4f) $16^{x-3} = 8^{2x-1}$

$(2^{4})^{x-3} = (2^{3})^{2x-1}$

$2^{4x-12} = 2^{6x-3}$

$4x - 12 = 6x - 3$

$-2x = 9$

$x = -\frac{9}{2}$

5a) $9^{x} - 4(3^{x}) + 3 = 0$, $y = 3^{x}$

$\Rightarrow 9^{x} - 4(3^{x}) + 3 = y^{2} - 4y + 3 = (y-3)(y-1) = 0$

$\Rightarrow y - 3 = 0$ o $y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 3$ o $y = 1$

$\Rightarrow$ Si $3^{x} = 3 \Rightarrow x = 1$.

$\Rightarrow$ Si $3^{x} = 1 \Rightarrow x = 0$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 1$, $x = 0$.

5b) $6^{2x} - 5(6^{x}) - 6 = 0$, $y = 6^{x}$

$\Rightarrow 6^{2x} - 5(6^{x}) - 6 = y^{2} - 5y - 6 = (y-6)(y+1) = 0$

$\Rightarrow y - 6 = 0$ o $y + 1 = 0$

$\Rightarrow y = 6$ o $y = -1$

$\Rightarrow$ Si $6^{x} = 6 \Rightarrow x = 1$.

$\Rightarrow$ Si $6^{x} = -1$ no tiene solución.

Por lo tanto, la solución es $x = 1$.

5c) $3^{2x+3} - 4(3^{x+1}) + 1 = 0$, $y = 3^{x}$

$\Rightarrow 3^{2x+3} - 4(3^{x+1}) + 1 = 27(3^{2x}) - 12(3^{x}) + 1 = 27y^{2} - 12y + 1 = (3y-1)(9y-1)$

$\Rightarrow 3y - 1 = 0$ o $9y - 1 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3}$ o $y = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow$ Si $3^{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{x} = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$.

$\Rightarrow$ Si $3^{x} = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^{x} = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$.

Por lo tanto, las soluciones son $x = -1$, $x = -2$.

2.9 Problemas de la unidad

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{(3^{-2})^3 \times (3^4)^2}{3^{-5}}$ b) $\left[\frac{2^2 \times (2^4)^{-2}}{2^7}\right]^{-1}$ c) $\frac{25^{-4} \times 5^{-3}}{5^{-5}}$ d) $\frac{3^{-4} \times 6^8}{2^4}$

2. En los siguientes literales se tienen dos números reales, establece cuál es el mayor de ellos.

a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt[3]{12}$ y $\sqrt{6}$ d) 4 y $\sqrt[3]{68}$

Utiliza el hecho que $a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ y el exponente racional, para escribir las raíces con índice común. Para $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{2}$:
$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{2^4}$ y $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{2^3}$

3. En los siguientes literales determina cuál de los dos números reales es el mayor de ellos:

a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt[4]{8}$ y $\sqrt[5]{16}$ c) $\sqrt[4]{125}$ y $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{\frac{1}{27}}$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{81}}$

Escribe cada radicando como una potencia

4. Efectúa el producto $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{48} + 2)(\sqrt{3} + \sqrt[4]{48} + 2)$.

5. Racionaliza el denominador de la fracción $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ realizando los siguientes pasos:

a) Escribe $\sqrt[3]{3}$ como una potencia.

b) Resuelve la ecuación $\sqrt[3]{3}x = 3$, escribe la solución como una potencia.

c) Efectúa $\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{x}{x}$, con x la solución del literal anterior.

6. Racionaliza el denominador de las siguientes fracciones.

a) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[4]{2}}$ c) $\frac{10}{\sqrt[4]{8}}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{4x-2} = 8^{x+1}$ b) $3^{3x} = 27^{2x+3}$ c) $2^{-x} = \sqrt{2}$

d) $2^{\frac{x}{2}} \times 4^{\frac{x}{3}} = 128$ e) $9^x - 4(3^{x+1}) + 27 = 0$ f) $4^{-x} - 2^{-x+2} + 4 = 0$

g) $(4^{x-3})(6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$ h) $12^{x-2} = 2^{2x-4}$ i) $-3^x - 9(3^{-x}) + 10 = 0$

8. Justifica las siguientes afirmaciones:

a) $\sqrt{5}$ y $\sqrt[4]{25}$ representan el mismo número.
b) Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = -2^x$ no se intersecan en ningún punto.
c) $y = 2^x$ y $y = 4^x$ se intersecan en un solo punto.

9. Grafica las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ b) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

10. Determina para cada función del problema anterior lo que se pide:

a) Dominio y rango b) Los intervalos donde es creciente o decreciente.

Indicador de logro

2.9 Resuelve problemas utilizando propiedades de los exponentes y funciones exponenciales.

Solución de problemas:

1a) $\frac{(3^{-2})^3 \times (3^4)^2}{3^{-5}} = 3^7$ **1b)** $\left[\frac{2^2 \times (2^4)^{-2}}{2^7}\right]^{-1} = 2^{13}$ **1c)** $\frac{25^{-4} \times 5^{-3}}{5^{-5}} = 5^{-6}$ **1d)** $\frac{3^{-4} \times 6^8}{2^4} = 6^4$

2a) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \sqrt{2} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3}$ y $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{2^2}$

Así, ya que $2^2 < 2^3 \Rightarrow \sqrt[6]{2^2} < \sqrt[6]{2^3} \Rightarrow \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$.

2b) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \sqrt{3} = 3^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{9}$ y $\sqrt[4]{5}$

Así, ya que $5 < 9 \Rightarrow \sqrt[4]{5} < \sqrt[4]{9} \Rightarrow \sqrt[4]{5} < \sqrt{3}$.

2c) $\sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{3}}$ y $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{12} = 12^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{12^2} = \sqrt[6]{144}$ y $\sqrt{6} = 6^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{216}$

Así, ya que $144 < 216 \Rightarrow \sqrt[6]{144} < \sqrt[6]{216} \Rightarrow \sqrt[3]{12} < \sqrt{6}$.

2d) $4 = 4^{\frac{1}{1}}$ y $\sqrt[3]{68} = 68^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 4 = 4^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64}$ y $\sqrt[3]{68}$

Así, ya que $64 < 68 \Rightarrow \sqrt[6]{64} < \sqrt[6]{69} \Rightarrow 4 < \sqrt[3]{68}$.

3a) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$

Así, ya que $2 > 1$ y $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$.

3b) $\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$ y $\sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2^4} = 2^{\frac{4}{5}}$

Así, ya que $2 > 1$ y $\frac{3}{4} < \frac{4}{5} \Rightarrow 2^{\frac{3}{4}} < 2^{\frac{4}{5}} \Rightarrow \sqrt[4]{8} < \sqrt[5]{16}$.

3c) $\sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}}$ y $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

Así, ya que $5 > 1$ y $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} \Rightarrow 5^{\frac{1}{2}} < 5^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt[4]{125}$.

3d) $\sqrt{\frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{1}{3^3}} = \sqrt{3^{-3}} = 3^{-\frac{3}{2}}$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{81}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^4}} = \sqrt[3]{3^{-4}} = 3^{-\frac{4}{3}}$

Así, ya que $3 > 1$ y $-\frac{3}{2} < -\frac{4}{3} \Rightarrow 3^{-\frac{3}{2}} < 3^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{27}} < \sqrt[3]{\frac{1}{81}}$.

4. Sea $y = \sqrt{3} + 2$

$\Rightarrow (\sqrt{3} - \sqrt[4]{48} + 2)(\sqrt{3} + \sqrt[4]{48} + 2) = (y - \sqrt[4]{48})(y + \sqrt[4]{48}) = y^2 - \sqrt{48} = y^2 - \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3} = y^2 - 4\sqrt{3}$

Calculando $y^2 = (\sqrt{3} + 2)^2 = 7 + 4\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3} - \sqrt[4]{48} + 2)(\sqrt{3} + \sqrt[4]{48} + 2) = y^2 - 4\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 7$.

5a) $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$

5b) $\sqrt[3]{3}x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{1-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$

5c) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{x}{x} = \frac{2}{3^{\frac{1}{3}}} \times \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{2 \times 3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}} = \frac{2\sqrt[3]{3^2}}{3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$

6a) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}} = \frac{6}{3^{\frac{2}{3}}}$

Luego $\sqrt[3]{9}x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{3}{3^{\frac{2}{3}}} = 3^{1-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}}$,

$\Rightarrow \frac{6}{\sqrt[3]{9}} = \frac{6}{3^{\frac{2}{3}}} \times \frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{6 \times 3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{6\sqrt[3]{3}}{3} = 2\sqrt[3]{3}$.

6b) $\frac{4}{\sqrt[4]{2}} = \frac{4}{2^{\frac{1}{4}}} = \frac{4}{2^{\frac{1}{4}}} \times \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{4 \times 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}}} = \frac{4\sqrt[4]{2^3}}{2} = 2\sqrt[4]{8}$

6c) $\frac{10}{\sqrt[4]{8}} = \frac{10}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{10}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{10}{2^{\frac{3}{4}}} \times \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} = \frac{10 \times 2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}}} = \frac{10\sqrt[4]{2}}{2} = 5\sqrt[4]{2}$

7a) $2^{4x-2} = 8^{x+1}$

$2^{4x-2} = (2^3)^{x+1}$

$2^{4x-2} = 2^{3x+3}$

$4x - 2 = 3x + 3$

$x = 5$

7b) $3^{3x} = 27^{2x+3}$

$x = -3$

7c) $2^{-x} = \sqrt{2}$

$x = -\frac{1}{2}$

7d) $2^{\frac{x}{2}} \times 4^{\frac{x}{3}} = 128$

$x = 6$

7e) $9^x - 4(3^{x+1}) + 27 = 0$, $y = 3^x$

Sustituyendo se tiene $y^2 - 12y + 27 = 0$.

Las soluciones son $x = 1$, $x = 2$.

7f) $4^{-x} - 2^{-x+2} + 4 = 0$, $y = 2^{-x}$

Sustituyendo se tiene $y^2 - 4y + 4 = 0$.

Las solución es $x = -1$.

7g) $(4^{x-3})(6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$

$[(2^2)^{x-3}](6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$

$(2^{2x-6})(6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$

$(6^{2x-6})(6^{x+1}) = 6$

$6^{3x-5} = 6$

$3x - 5 = 1$

$x = 2$

Por lo tanto, la solución es $x = 2$.

7h) $12^{x-2} = 2^{2x-4}$

$[(2^2)(3)]^{x-2} = 2^{2x-4}$

$[(2^2)^{x-2}](3^{x-2}) = 2^{2x-4}$

$(2^{2x-4})(3^{x-2}) = 2^{2x-4}$

$3^{x-2} = 1$

$x = 2$

Por lo tanto, la solución es $x = 2$.

7i) $-3^x - 9(3^{-x}) + 10$, $y = 3^x$

$-y - 9y^{-1} + 10 = 0$

Se tiene que $y \neq 0$

$\Rightarrow -y(-y - 9y^{-1} + 10) = -y(0)$

$\Rightarrow y^2 + 9yy^{-1} - 10y = 0$

$\Rightarrow y^2 - 10y + 9 = 0$

$\Rightarrow (y-9)(y-1) = 0 \Rightarrow y = 9$ o $y = 1$

$\Rightarrow 3^x = 9$ o $3^x = 1 \Rightarrow x = 2$ o $x = 0$.

Por lo tanto, la soluciones son $x = 2$, $x = 0$.

8a) $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

8b) $y = 2^x$ y $y = -2^x$.

Si tienen un punto en común (a, b)

$\Rightarrow b = 2^a$ y $b = -2^a \Rightarrow 2b = 2^a - 2^a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow 2^a = 0$, pero esto no es posible para ningún número real a.

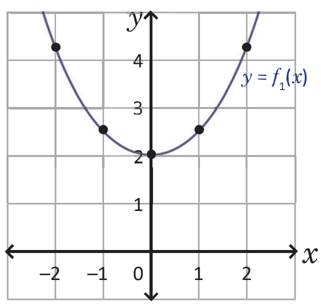
8c) Si tienen un punto en común (a, b)

$\Rightarrow b = 2^a$ y $b = 4^a \Rightarrow 2^a = 4^a \Rightarrow 2^a = (2^2)^a \Rightarrow 2^a = 2^{2a} \Rightarrow a = 2a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 1$.

El único punto en común es (0, 1).

9a)

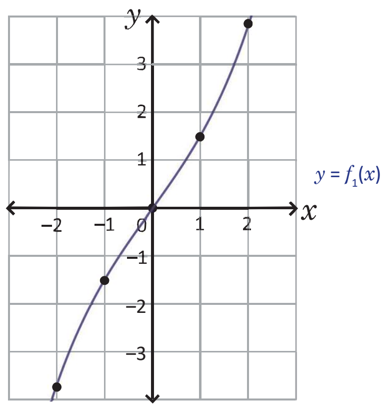
x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	4.25	2.5	2	2.5	4.25



Utilizando los resultados de los problemas 4 y 5 se puede deducir que está función alcanza su mínimo valor en $x = 0$.

9b)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	–3.75	–1.5	0	1.5	3.75



Una vez estén bien trazadas las gráficas de las funciones del problema 9 se puede establecer la monotonía gráficamente. Para la función $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ también se puede establecer con un proceso similar al desarrollado en el problema 4 de la clase 2.3.

10a) Gráficamente

La función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $[2, +\infty[$.

La función $f(x) = 2^x - 2^{-x}$, tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $\mathbb{R}$.

10b) La función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es creciente en el intervalo $[0, +\infty[$ y decreciente en el intervalo $]-\infty, 0]$.

La función $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ es creciente en $\mathbb{R}$.