Unidad 5. Funciones trascendentales II

Competencia de la unidad

Describir los elementos y características de la función logaritmo y de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente por medio de su definición o gráfica para interpretar situaciones modeladas por funciones.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 2: Raíz cuadrada (9°)
- Raíz cuadrada y números reales
- Operaciones con raíces cuadradas

Primer año de bachillerato

Unidad 1: Números reales
- Números reales

Unidad 4: Funciones reales
- Definición de función
- Función cuadrática
- Aplicaciones de la función cuadrática
- Otras funciones
- Práctica en GeoGebra

Unidad 5: Resolución de triángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Unidad 6: Identidades y ecuaciones trigonométricas
- Identidades trigonométricas
- Ecuaciones trigonométricas

Segundo año de bachillerato

Unidad 4: Funciones trascendentales I
- Potencia y raíz n-ésima
- Funciones y ecuaciones exponenciales

Unidad 5: Funciones trascendentales II
- Función biyectiva e inversa
- Función logarítmica
- Funciones trigonométricas
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Función biyectiva e inversa	1	1. Funciones inyectivas
	1	2. Funciones sobreyectivas
	1	3. Funciones biyectivas
	1	4. Composición de funciones
	1	5. Dominio de la función composición
	1	6. Función inversa
	1	7. Existencia, dominio y rango de la función inversa
	1	8. Practica lo aprendido
2. Función logarítmica	1	1. Definición de logaritmo
	1	2. Logaritmo de un número
	1	3. Propiedades de los logaritmos
	1	4. Cambio de base de un logaritmo
	1	5. Definición de la función logarítmica y su gráfica
	1	6. Relación entre las funciones exponencial y logarítmica
	1	7. Ecuaciones logarítmicas, parte I
	1	8. Ecuaciones logarítmicas, parte II
	1	9. Logaritmo base 10 y logaritmo natural
	1	10. Practica lo aprendido
	1	Prueba de las lecciones 1 y 2

Lección	Horas	Clases
3. Funciones trigonométricas	1	1. Razones trigonométricas de cualquier ángulo (repaso)
	1	2. Círculo trigonométrico
	1	3. Periodicidad de las funciones seno y coseno en el círculo trigonométrico
	1	4. Periodicidad de la tangente en el círculo trigonométrico
	1	5. Función seno
	1	6. Función coseno
	1	7. La tangente en el círculo trigonométrico
	1	8. Gráfica de la función tangente
	1	9. Periodo y amplitud de las funciones trigonométricas
	1	10. Desplazamiento vertical de las funciones trigonométricas
	1	11. Desplazamiento horizontal de las funciones trigonométricas
	1	12. Forma general de las funciones trigonométricas
	1	13. Sistema circular de ángulos
	1	14. Practica lo aprendido
	1	15. Problemas de la unidad
4. Práctica en GeoGebra	1	1. Funciones trigonométricas
	1	2. Construcción de las funciones seno y coseno
	1	3. Construcción de la función tangente
	1	4. El método de exhaución
	1	Prueba de la lección 3

37 horas clase + prueba de las lecciones 1 y 2 + prueba de la lección 3

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Función biyectiva e inversa

El estudiante tiene como base de primer año de bachillerato el concepto de función, dominio y gráfica; además conoce las funciones lineal, cuadrática, cúbica, racional, raíz cuadrada y exponencial; por lo que, en esta lección se utilizan estas funciones para estudiar las definiciones de función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. En las clases se priorizan los métodos gráficos, como son: el trazo de una curva horizontal para determinar la inyectividad y la determinación gráfica del rango de una función; no obstante, se introducen también los métodos algebraicos, los cuales formalizan los procesos realizados. Estos conceptos permitirán introducir la operación de composición de funciones en dos clases, la primera para determinar la ecuación de la función composición y posteriormente estudiar el dominio correspondiente. Luego se establece la definición de función inversa en dos clases, la primera aborda cómo se determina la ecuación de la función inversa y la segunda plantea la posibilidad de determinar la función inversa para cierto tipo de funciones, cómo trazar su gráfica y cuál es el dominio y rango asociado.

Lección 2: Función logarítmica

Se inicia con la definición de logaritmo, aquí se establece una relación inversa con la definición de la potencia de un número, luego se utiliza la descomposición en factores para determinar el valor del logaritmo de un número. Se establecen las propiedades de los logaritmos de forma particular y de forma general, posteriormente se trabaja la propiedad del cambio de base, luego se estudia la función logarítmica y se establece su relación con la función exponencial como funciones inversas respecto a la composición. Se resuelven ecuaciones logarítmicas en dos clases, la primera trata aquellos casos en los que se aplica directamente la definición de logaritmo para determinar la solución, se introduce además la resolución de ecuaciones exponenciales utilizando logaritmos; en la siguiente clase las ecuaciones necesitan el paso adicional de aplicar alguna de las propiedades de los logaritmos, ambas clases hacen hincapié en realizar la comprobación de las soluciones evaluándolas en cada argumento de los logaritmos de la ecuación y debe verificarse que este sea positivo. Por último, se estudia el conteo de dígitos de un número como aplicación del logaritmo base 10.

Lección 3: Funciones trigonométricas

En esta lección se hace énfasis en las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. Primero se establecen las razones trigonométricas como funciones del ángulo, tomando como base la razón trigonométrica de un ángulo en el plano, definida a partir de un punto sobre su lado terminal, o su prolongación; en ese sentido también se introduce el círculo trigonométrico (CT) para facilitar la representación de las razones trigonométricas por medio del círculo de radio uno, lo que permite, además, estudiar de manera representativa la periodicidad de las funciones seno, coseno y tangente. Luego se grafica cada función en el plano cartesiano y se estudian el periodo, la amplitud y los desplazamientos. Hasta este punto se ha trabajado con ángulos en el sistema sexagesimal, con el fin de no complicar al estudiante el trazo de las gráficas de las funciones, al convertir ángulos en radianes, por tal razón, el concepto de radián se estudia por último. En el sistema circular de ángulos se toma como base la longitud del arco subtendido por un ángulo en el círculo trigonométrico.

Lección 4: Práctica en GeoGebra

En primer lugar se estudian los desplazamientos, la amplitud y el periodo de las funciones trigonométricas, poniendo en práctica lo recién aprendido sobre el sistema circular con el cual trabaja GeoGebra y se utilizan los deslizadores y las animaciones. Luego se construyen las funciones a partir del círculo trigonométrico utilizando otras herramientas de GeoGebra como el rastro de un punto, cuya animación genera la gráfica deseada. Otra de las herramientas utilizadas es la función SI, que tiene relación con las estructuras de control de la unidad 4 de la asignatura de Informática; sin embargo, el estudiante podrá prescindir de su conocimiento gracias al desarrollo de la práctica en el Libro de texto. Por último se estudia el método de exhaución para aproximar el valor de la constante π, el objetivo de esta práctica es explorar un método histórico para el calculo del área del círculo pero en este caso por medio de un software.

Lección 1 Función biyectiva e inversa

1.1 Funciones inyectivas

Problema inicial

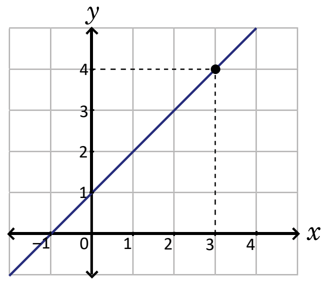
Responde las siguientes preguntas:

a) Sea $f(x) = x + 1$, se sabe que $f(3) = 4$, ¿existe otro valor x en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4$?

b) En el caso de la función $f(x) = x^2$, se cumple que $f(2) = 4$, ¿ocurre lo mismo que el caso anterior?

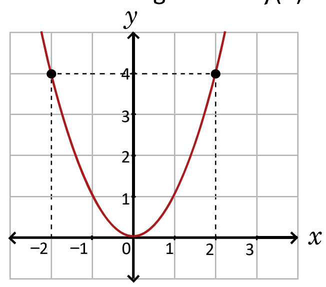
Solución

a) Se elabora la gráfica de $f(x) = x + 1$.



El único valor de x tal que $f(x) = 4$ es $x = 3$.

b) Se elabora la gráfica de $f(x) = x^2$.



No ocurre lo mismo, ya que existen dos valores de x que cumplen $f(x) = 4$: $x = 2$ y $x = -2$.

Definición

Una función $f : A \longrightarrow B$ es **inyectiva** en A, si a valores diferentes del conjunto A le corresponden valores diferentes del conjunto B. Simbólicamente: si a, b son elementos de A con $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$.

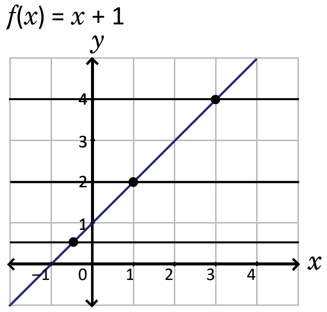
También se puede definir de la siguiente manera: $f : A \longrightarrow B$ es **inyectiva** en A, si a cada imagen en B le corresponde una única preimagen de A.

Para determinar gráficamente la inyectividad de una función se trazan rectas horizontales sobre la gráfica, si una recta interseca a la gráfica en dos o más puntos, entonces la función no es inyectiva.

Ejemplo

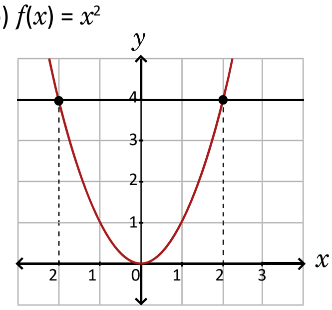
Determina si las siguientes funciones son inyectivas:

a) $f(x) = x + 1$



Toda recta horizontal interseca en un solo punto a la función. Por lo tanto, $f(x) = x + 1$ es inyectiva.

b) $f(x) = x^2$



La recta horizontal que pasa por el punto (2, 4) también pasa por el punto (–2, 4). Por lo tanto, $f(x) = x^2$ no es inyectiva. En este caso $2 \neq -2$ pero $f(2) = f(-2)$ pues $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$.

Problemas

Determina si las siguientes funciones son inyectivas en su dominio:

a) $f(x) = 2x - 6$ b) $f(x) = -x^2 - 2x - 6$ c) $f(x) = 2x^3$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $f(x) = \sqrt{x}$

Indicador de logro:

1.1 Identifica funciones inyectivas de manera gráfica y algebraica.

Secuencia:

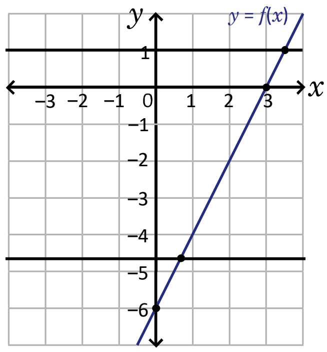
Hasta este momento el estudiante conoce varias funciones reales, ahora se estudiarán las características de las funciones iniciando con la identificación de la inyectividad de forma gráfica y algebraica.

Posibles dificultades:

El Problema inicial también se puede resolver con el planteamiento de ecuaciones; la elaboración de la gráfica se sugiere al estudiante si hay dificultades.

Solución de problemas:

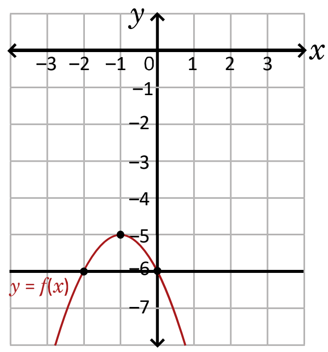
a) $f(x) = 2x - 6$



Toda recta horizontal interseca en un solo punto la gráfica de $f(x) = 2x - 6$, por lo tanto, es inyectiva.

La única preimagen de un número b es $\frac{1}{2}b + 3$.

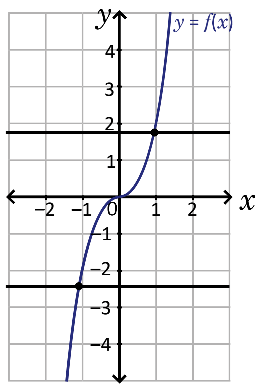
b) $f(x) = -x^2 - 2x - 6 = -(x + 1)^2 - 5$



La recta horizontal trazada interseca en dos puntos a la gráfica de $f(x)$. Por lo tanto, $f(x)$ no es inyectiva.

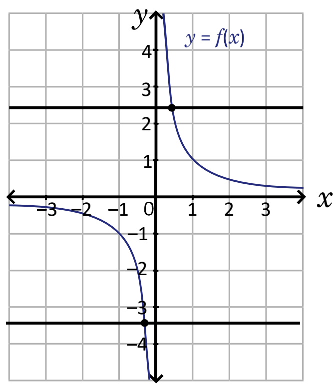
Otra forma:
$f(-2) = f(0) = -6$.
Por lo tanto no es inyectiva.

c) $f(x) = 2x^3$



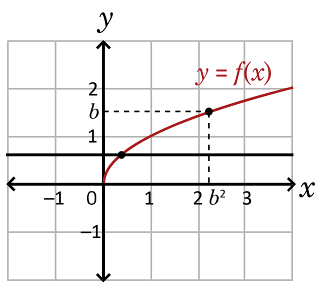
Es inyectiva.

d) $f(x) = \frac{1}{x}$



Es inyectiva.

e) $f(x) = \sqrt{x}$



La única preimagen de b es b^2.

Es inyectiva.

1.2 Funciones sobreyectivas

Problema inicial

Una función de A en B que tiene como ecuación $y = f(x)$ se puede representar de las siguientes formas:

1. f: A → B
   $x \rightarrow f(x)$

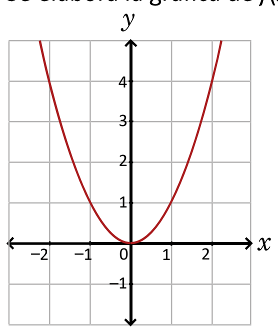
2. f: A → B; $x \rightarrow f(x)$

Esta representación significa "la función de A en B tal que x toma valores en A y $f(x)$ en B".

a) Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x^2$, ¿existe un valor x en el conjunto de partida que cumple $f(x) = -1$?
b) Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x^3$. Si y es un número real, determina el valor de x tal que $f(x) = y$ si $y = 1$, $y = 8$.

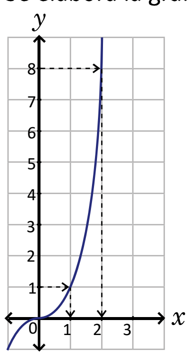
Solución

a) Se elabora la gráfica de $f(x) = x^2$.



No hay valores de x tal que $f(x) = -1$.

b) Se elabora la gráfica de $f(x) = x^3$.



El valor de x tal que $f(x) = 1$, es $x = 1$.
$f(1) = 1^3 = 1$.

El valor de x tal que $f(x) = 8$, es $x = 2$.
$f(2) = 2^3 = 8$.

Conclusión

Una función f: A → B es **sobreyectiva**, si cada número en B es imagen de, al menos, un número en A.

1. Para decir que una función no es sobreyectiva se debe encontrar un valor y en B que no tenga preimagen en A.
2. Una función f: A → B, donde el conjunto B es igual al rango de la función R_f es una función sobreyectiva.

Recuerda que el rango es el conjunto de valores que puede tomar la función $R_f = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Ejemplo

a) La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x^2$, no es sobreyectiva pues no existe un número real x tal que $x^2 = -1$.

El rango de $f(x) = x^2$ no es $\mathbb{R}$ sino $R_f = [0, \infty[$.

b) La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x^3$ es sobreyectiva pues un número y en $\mathbb{R}$ es imagen del número $\sqrt[3]{y}$. Al evaluar se tiene: $f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.

El rango de $f(x) = x^3$ es $R_f = \mathbb{R}$.

Problemas

Identifica si cada una de las siguientes funciones es sobreyectiva.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow x$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow 3x - 2$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow x^2 - 1$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 0]$
$x \rightarrow -x^2$

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow -x^2 + x$

f) $f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$
$x \rightarrow \sqrt{x}$

g) $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow \frac{1}{x}$

h) $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \rightarrow \frac{1}{1-x}$

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow |x|$

El conjunto $]-\infty, a[\cup]a, \infty[$ se puede escribir en la forma $\mathbb{R} - \{a\}$, que representa el conjunto de los números reales exceptuando al número a.

$f(x) = |x|$ es la función valor absoluto.

Unidad 5

Indicador de logro:

1.2 Identifica funciones sobreyectivas de manera gráfica y algebraica.

Secuencia:

Para la mayoría de funciones estudiadas hasta ahora se ha determinado su domino y rango. En esta clase se introduce una nueva notación de funciones y se estudian las formas de identificar una función sobreyectiva.

Propósito:

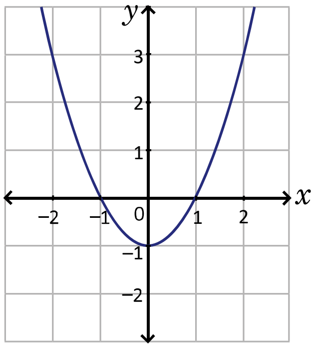
En la Conclusión se describen dos caracterizaciones de la función sobreyectiva, una permite negar la sobreyectividad y la otra afirmarla. En el Ejemplo b) se muestra cómo puede establecerse la sobreyectividad de manera algebraica.

Solución de problemas:

a)
- Toda función lineal con domino $\mathbb{R}$ tiene rango $\mathbb{R}$, por lo tanto f es sobreyectiva.
- Un número real b es imagen de b. $f(b) = b$, por lo tanto la función es sobreyectiva.

b)
- Toda función lineal con domino $\mathbb{R}$ tiene rango $\mathbb{R}$, por lo tanto f es sobreyectiva.
- Un número real b es imagen de $\frac{b+2}{3}$. $f\left(\frac{b+2}{3}\right) = b$, por lo tanto la función es sobreyectiva.

c) El número real –2 no es imagen de ningún número real, por lo tanto f no es sobreyectiva.



d)
- El rango de la función $f(x) = -x^2$ es $]-\infty, 0]$, por lo tanto la función definida así es sobreyectiva.
- Un número real $b \leq 0$ es imagen del número $\sqrt{-b}$. Por lo que $f(x) = -x^2$ es sobreyectiva sobre $]-\infty, 0]$.

e) $-x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. Así, 1 no es imagen de ningún número real. Para corroborarlo, se puede hacer la gráfica. Por lo tanto, $f(x) = -x^2 + x$ no es sobreyectiva.

f) Un número real $b \geq 0$ es imagen del número real $b^2 \geq 0$. Por lo tanto $f(x) = \sqrt{x}$ es sobreyectiva.

g) El número real 0 no es imagen de ningún número real; por lo tanto, f no es sobreyectiva.

h)
- El rango de la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, por lo tanto la función definida así es sobreyectiva.
- Un número real $b \neq 0$ es imagen del número real $1 - \frac{1}{b}$. Por lo que la función es sobreyectiva.

i) Un número real –1 no es imagen de ningún número real, por lo tanto f no es sobreyectiva.

En algunos literales se tienen dos argumentos distintos de por qué la función es sobreyectiva, con uno de los dos es suficiente para afirmarlo.

1.3 Funciones biyectivas*

Definición

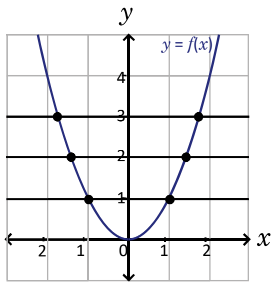
Una función f: A ⟶ B es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

- Si una función no es inyectiva se puede restringir el dominio para que sea inyectiva, en algunos casos se puede hacer de varias maneras.
- Para que la función f sea sobreyectiva basta encontrar el rango R_f y hacer B = R_f.

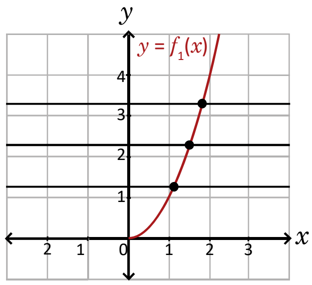
Se llama **restricción de la función f** a la que se obtiene como resultado de los pasos anteriores.

Ejemplo

1. Verifica que la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty[\ ; x \longrightarrow x^2$ no es biyectiva.
2. Haz una restricción del dominio para que la función f sea biyectiva.

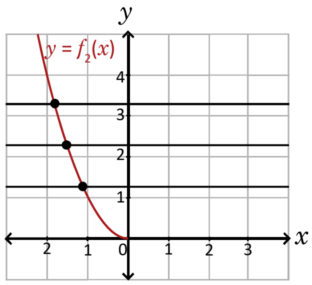


1. Las rectas horizontales cortan en dos puntos a la gráfica, así la función no es inyectiva, por lo que tampoco es biyectiva.



2. Eliminando los puntos con primera coordenada negativa, se obtiene la gráfica de una función inyectiva, a la que se denomina f_1. Su dominio es $[0, \infty[$ y su rango es $[0, \infty[$.

   Por lo tanto, la función $f_1: [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[; x \longrightarrow x^2$ es biyectiva pues es inyectiva y sobreyectiva.



Otra restricción de f se obtiene eliminando los puntos con primera coordenada positiva.

Por lo tanto, la función $f_2: [-\infty, 0[\longrightarrow [0, \infty[; x \longrightarrow x^2$ es biyectiva pues es inyectiva y sobreyectiva.

Problemas

Determina si cada función es biyectiva, si no lo es, haz una restricción de f para que lo sea.

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x$

b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x - 1$

c) $f: [0, 10] \longrightarrow [0, \infty[$, $x \longrightarrow x^2$

d) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x^2 - 2x + 3$

e) $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$

f) $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty[$, $x \longrightarrow |x|$

g) $f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 1 + \dfrac{1}{1-x}$

h) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 2^x$

i) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 2^{-x-1} + 1$

Indicador de logro:

1.3 Identifica si una función es biyectiva o restringe su dominio o rango para que lo sea.

Secuencia:

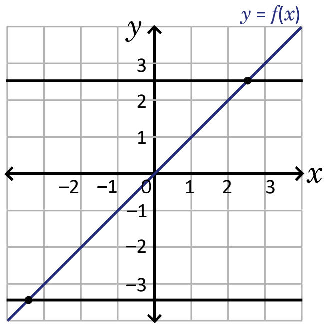
Ahora se presenta la definición de función biyectiva y la forma en que se puede restringir el domino o rango de una función cualquiera para que cumpla esta condición. Puede dar el Ejemplo como problema a los estudiantes pero si el numeral 2 es muy difícil puede orientarlos.

Propósito:

Para mostrar que la restricción no es única en el Ejemplo se realizan dos restricciones de la función original para que sea biyectiva. Se hace las distinción entre una función (f) y su restricción asignando a esta un subíndice (f_1).

Solución de problemas:

a)



- Toda recta horizontal que interseca a la gráfica de $f(x)$ la interseca en un solo punto, así f es inyectiva.
- La función $f(x) = x$ es lineal, se tiene que $D_f = \mathbb{R}$ entonces $R_f = \mathbb{R}$, por lo que f es sobreyectiva.

Por lo tanto $f(x) = x$ es biyectiva.

b) Es biyectiva.

c) No es sobreyectiva pues 11^2 no tiene preimagen en $[0, 10]$.

Restricción

$$f_1: [0, 10] \longrightarrow [0, 100]$$
$$x \longrightarrow x^2$$

d) $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$, no es sobreyectiva pues 0 no tiene preimagen.

Restricciones

$$f_1: [1, \infty] \longrightarrow [2, \infty[\qquad \text{o} \qquad f_1:]-\infty, 1] \longrightarrow [2, \infty[$$
$$x \longrightarrow x^2 - 2x + 3 \qquad\qquad x \longrightarrow x^2 - 2x + 3$$

e) Es biyectiva.

f) No es inyectiva: $f(-1) = f(1) = 1$.

Restricciones

$$f_1: [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[\qquad \text{o} \qquad f_2:]-\infty, 0] \longrightarrow [0, \infty[$$
$$x \longrightarrow |x| \qquad\qquad x \longrightarrow |x|$$

g) No es sobreyectiva: 1 no tiene preimagen.

Restricción

$$f_1: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$
$$x \longrightarrow 1 + \frac{1}{1 - x}$$

h) No es sobreyectiva: 0 no tiene preimagen.

Restricción

$$f_1: \mathbb{R} \longrightarrow]0, \infty[$$
$$x \longrightarrow 2^x$$

i) No es sobreyectiva: 0 no tiene preimagen.

Restricción

$$f_1: \mathbb{R} \longrightarrow]1, \infty[$$
$$x \longrightarrow 2^{-x-1} + 1$$

Para resolver estos problemas, se puede recomendar que los estudiantes que realicen las gráficas de las funciones para restringir los dominios.

1.4 Composición de funciones

Problema inicial

En el departamento de Morazán el beneficio promedio, en dólares, que obtiene un productor de dulce de atado está dado por $f(x) = 0.53x$, donde x representa la inversión realizada por el productor. Se sabe que la inversión realizada por un productor está dada por la función $g(x) = 69.19x$, donde x es el número de toneladas de caña de azúcar utilizadas. A partir de lo anterior contesta:

1. ¿Cuál es la inversión realizada por el productor si utiliza 2 toneladas?
2. ¿Cuál es el beneficio obtenido por el productor si utiliza 2 toneladas?
3. Determina una función que proporcione el beneficio obtenido a partir de una cantidad x de toneladas de caña de azúcar utilizadas.

Solución

1. Utilizando la función de inversión g, se tiene $g(2) = 69.19(2) = 138.38$.
   Por lo tanto, la inversión realizada es de \$138.38.

$$\underset{\text{Toneladas}}{x} \xrightarrow{g} \underset{\text{Inversión}}{g(x)}$$

2. La inversión realizada al utilizar 2 toneladas es $g(2) = \$138.38$.
   Utilizando la función de beneficio f se tiene que
   $$f(g(2)) = f(138.38) = 0.53(138.38) = 73.3414.$$
   Por lo tanto, el beneficio es de \$ 73.3414.

$$\underset{\text{Inversión}}{x} \xrightarrow{f} \underset{\text{Beneficios}}{f(x)}$$

3. Al utilizar x toneladas se tiene una inversión de $g(x) = 69.19x$.
   Al utilizar una inversión $g(x)$ se tiene un beneficio de $f(g(x)) = 0.53(g(x))$.
   Por lo tanto, el beneficio a partir de la cantidad x de toneladas es
   $f(g(x)) = 0.53(69.19x) = 36.6707x$.

$$\underset{\text{Toneladas}}{x} \xrightarrow{g} \underset{\text{Inversión}}{g(x)} \xrightarrow{f} \underset{\text{Beneficios}}{f(g(x))}$$

Definición

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, la **composición** de f y g se denota por $(f\circ g)(x)$ y se define como:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$

La composición de f y g es una función que resulta de evaluar la función $g(x)$ en la función $f(x)$.

La expresión $f\circ g$ se lee f compuesta con g. La expresión $f(g(x))$ se lee f de g de x.

Ejemplo

Efectúa las composiciones $f\circ g$ y $g\circ f$, con las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x - 3$.

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= 2(g(x)) + 1 \quad \text{se evalúa la función } g(x) \text{ en } f(x),\\ &= 2(x - 3) + 1\\ &= 2x - 6 + 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f\circ g)(x) = 2x - 5$.

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= f(x) - 3 \quad \text{se evalúa la función } f(x) \text{ en } g(x),\\ &= (2x + 1) - 3\\ &= 2x - 2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(g\circ f)(x) = 2x - 2$.

Observa que, en general, $(f\circ g)(x)$ no es igual a $(g\circ f)(x)$:

Si $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x - 3$ se tiene que $(f\circ g)(x) = 2x - 5$ y $(g\circ f)(x) = 2x - 2$.

En este caso $(f\circ g)(x) \neq (g\circ f)(x)$.

Problemas

Efectúa la composición $f\circ g$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x$, $g(x) = 3x$
b) $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x + 5$
c) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x - 4$
d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x + 1$
e) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$
f) $f(x) = 3^x$, $g(x) = x + 2$
g) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2^x$
h) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 5^x$
i) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 4^x$

Unidad 5

Indicador de logro:

1.4 Determina la ecuación de la composición de dos funciones.

Secuencia:

La composición de funciones se estudia en dos clases, en la primera se determina la ecuación de la composición y en la siguiente el dominio de la composición. La ecuación de la composición es el resultado de evaluar una función en otra. Así queda establecida la composición como una operación entre funciones reales.

Posibles dificultades:

Para determinar la ecuación de una composición se debe evaluar una función en otra en el orden adecuado, pues como se muestra en el Ejemplo al evaluar en distinto orden se pueden obtener funciones diferentes.
El Problema inicial también se puede resolver haciendo uso de la multiplicación, en el caso que un estudiante presente una solución con este razonamiento se debe aclarar que no todas las composiciones se pueden efectuar de esta manera.

Solución de problemas:

a) $f(x) = 4x$, $g(x) = 3x$
$(f \circ g)(x) = 12x$

b) $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x + 5$
$(f \circ g)(x) = -x - 3$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x - 4$
$(f \circ g)(x) = \sqrt{x-3}$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x + 1$
$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x+1}$

e) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$
$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x} + 1$

f) $f(x) = 3^x$, $g(x) = x + 2$
$(f \circ g)(x) = 3^{x+2}$

g) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2^x$
$(f \circ g)(x) = 2^x + 1$

h) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 5^x$
$(f \circ g)(x) = \frac{1}{5^x}$

i) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 4^x$
$(f \circ g)(x) = \sqrt{4^x} = \sqrt{2^{2x}} = 2^{\frac{2x}{2}} = 2^x$

En esta clase solo se trata como tal el hecho de evaluar una función con otra, de aquí que el indicador de logro se refiera a determinar la ecuación de la composición, pues la función composición quedará bien definida al calcular su dominio en la siguiente clase.

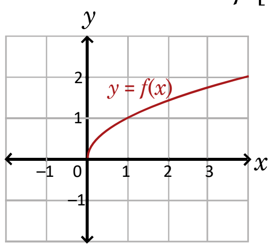
Lección 1

1.5 Dominio de la función composición*

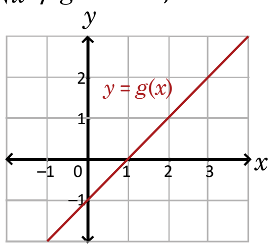
Problema inicial

Se tiene la gráfica de las funciones f: $[0, \infty[\to [0, \infty[$; $x \to \sqrt{x}$ y g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \to x - 1$.

$D_f = [0, \infty[$
$R_f = [0, \infty[$



$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = \mathbb{R}$



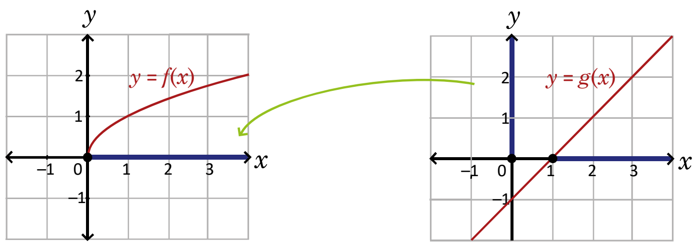
La composición está definida como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, es decir $g(x)$ se evalúa en $f(x)$. A partir de esto, realiza lo siguiente:

a) Determina el intervalo de los valores que puede tomar $g(x)$ para que $f(g(x))$ esté definida.
b) ¿Cuál es el intervalo de valores que debe tomar x para que $g(x)$ esté en el intervalo del literal anterior?

Solución

a) Los valores que $g(x)$ puede tomar deben estar en el domino de $f(x)$.
Por lo que el intervalo que se pide es $[0, \infty[$.

b) Se determina el intervalo a partir de la gráfica.



En la función $g(x)$ los valores del intervalo $[0, \infty[$ se obtienen al evaluar los valores del intervalo $[1, \infty[$.

Por lo tanto, x debe tomar valores en el intervalo $[1, \infty[$ para que $g(x)$ esté en el intervalo $[0, \infty[$.

Definición

El **dominio de la composición** de f y g está dado por el conjunto: $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

El dominio de la composición de funciones $(f \circ g)(x)$ son los valores que pertenecen a D_g (el dominio de $g(x)$) tal que $g(x)$ pertenece a D_f (el dominio de $f(x)$).

Ejemplo

Utilizando las funciones: $f(x) = \sqrt{x - 9}$, con dominio $D_f = [9, \infty[$, y $g(x) = 3x$, con dominio $D_g = \mathbb{R}$, encuentra el dominio de la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{3x - 9}$.

Se tienen los dominios $D_f = [9, \infty[$ y $D_g = \mathbb{R}$. Para determinar $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ se tiene que $g(x)$ es un valor de $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 9\}$ si se cumple que $g(x) \geq 9$, sustituyendo se obtiene $3x \geq 9$, por lo que $x \geq 3$ entonces $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid x \geq 3\}$. Por lo tanto, $D_{f \circ g} = [3, \infty[$.

Problemas

Determina el domino de la composición de funciones $(f \circ g)(x)$:

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 3x + 1$
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 2x + 4$

b) f: $[3, \infty[\to [-1, \infty[$
$x \to x^2 - 12x + 35$
g: $[0, \infty[\to [0, \infty[$
$x \to \sqrt{x}$

c) f: $[-1, \infty[\to [-1, \infty[$
$x \to x^2 - 1$
g: $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \frac{1}{x}$

d) f: $[0, \infty[\to [0, \infty[$
$x \to \sqrt{x}$
g: $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \frac{1}{x}$

Indicador de logro:

1.5 Determina el domino de la composición de funciones utilizando la definición.

Secuencia:

Ahora se estudia el dominio de la función composición, esto permitirá al estudiante determinar el dominio de otras funciones que no se han estudiado como tales pero que pueden obtenerse como composición de funciones conocidas. Si el Problema incial resulta muy difícil para el estudiante, puede explicar el primer literal.

Propósito:

El Problema inicial plantea determinar el dominio de una composición de funciones en dos pasos. La Solución presenta un método gráfico para determinar el dominio de la composición. Mientras que el Ejemplo expone un método algebraico en el que se utilizan intervalos y desigualdades.

Solución de problemas:

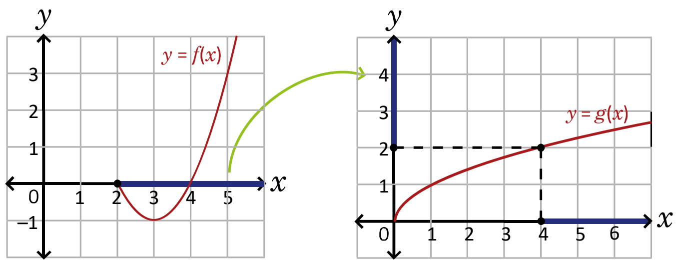
a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \rightarrow 3x + 1$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \rightarrow 2x + 4$

$D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$
$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

b) $f: [2, \infty[\rightarrow [-1, \infty[$
$\quad x \rightarrow x^2 - 6x + 8$

$g: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$
$\quad x \rightarrow \sqrt{x}$

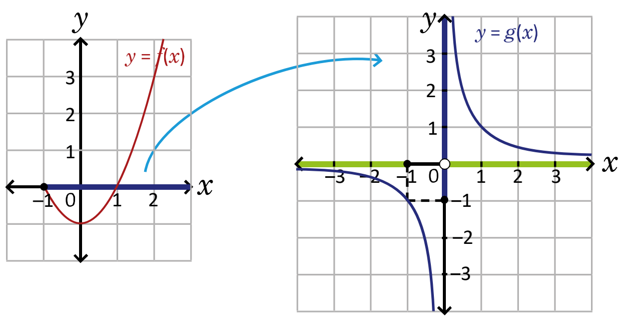


$D_{f\circ g} = [4, \infty[$

Fe de errata: en el problema del Libro de Texto hay que corregir la función f por los datos
$f: [2, \infty[\rightarrow [-1, \infty[$
$\quad x \rightarrow x^2 - 6x + 8.$

c) $f: [-1, \infty[\rightarrow [-1, \infty[$
$\quad x \rightarrow x^2 - 1$

$g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$\quad x \rightarrow \frac{1}{x}$



$D_{f\circ g} =]-\infty, -1] \cup]0, \infty[$

d) $f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$
$\quad x \rightarrow \sqrt{x}$

$g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$\quad x \rightarrow \frac{1}{x}$

$D_f = [0, \infty[$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

$D_{f\circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{1}{x} \geq 0\right\}$

$\frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow x > 0$

$\Rightarrow D_{f\circ g} =]0, \infty[$

Lección 1

1.6 Función inversa

Problema inicial

Dadas las funciones $f(x) = 2x + 2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, efectúa las composiciones:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

Solución

a) $(f \circ g)(x)$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= 2(g(x)) + 2 \\
&= 2\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + 2 \\
&= x - 2 + 2 \\
&= x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(f \circ g)(x) = x$.

b) $(g \circ f)(x)$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= \frac{1}{2}(2x + 2) - 1 \\
&= x + 1 - 1 \\
&= x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(g \circ f)(x) = x$.

Definición

Sea f: A ⟶ B una función, si una función g: B ⟶ A cumple las condiciones:
1. $(f \circ g)(x) = x$, para todo valor x en B.
2. $(g \circ f)(x) = x$, para todo valor x en A.

Entonces a g se le llama la **función inversa de** f y se denota por f^{-1}.

La función inversa f^{-1} cumple $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$, así para encontrar la ecuación de la función inversa se despeja y de la ecuación $f(y) = x$, donde $y = f^{-1}(x)$.

Ejemplo

Obtén la función inversa de $f(x) = 2x + 2$.

Escribe la ecuación $\Rightarrow$ $f(y) = x$,

evalúa y en $f(x) = 2x + 2$ $\Rightarrow$ $2y + 2 = x$,

al despejar y se obtiene: $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

A la función $h(x) = x$ se le denomina **función identidad**.

Para una función l: A ⟶ B, la función identidad cumple las siguientes condiciones:

1. Si h: B ⟶ B; $x \longrightarrow x$ entonces $(h \circ l)(x) = l(x)$.

2. Si h: A ⟶ A; $x \longrightarrow x$ entonces $(l \circ h)(x) = l(x)$.

Problemas

1. Determina la ecuación de la función inversa de las siguientes funciones.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 5x - 1$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^3$

c) $f: \mathbb{R} \to [1, \infty[$, $x \to (x - 2)^2 + 1$

d) $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $x \to \frac{1}{x}$

e) $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, $x \to \frac{x + 1}{x - 1}$

f) $f: [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \to \sqrt{x}$

g) $f: [0, \infty[\to [1, \infty[$, $x \to x^2 + 1$

h) $f: [1, \infty[\to [0, \infty[$, $x \to (x - 1)^2$

2. Comprueba con la composición de funciones, que la función encontrada en cada literal del problema anterior es la función inversa.

Comprueba que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Unidad 5

Indicador de logro:

1.6 Determina la ecuación de la función inversa de una función dada.

Secuencia:

En primer lugar se estudia la ecuación de la función inversa, esta se define con base en la ecuación de una composición de funciones. Además se muestra que para esta operación existe un elemento invariante que es la función identidad, así como el cero lo es para la suma y el uno para la multiplicación.

Propósito:

En el Problema inicial se comprueba que dadas las ecuaciones de dos funciones mutuamente inversas su composición es la función identidad. En la información adicional se muestra la función identidad y su rol como elemento invariante para la operación composición.

Solución de problemas:

1a) $f(y) = 5y - 1 = x$

$y = \frac{x+1}{5}$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$

1b) $f(y) = y^3 = x$

$y = \sqrt[3]{x}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

1c) $f(y) = (y-2)^2 + 1 = x$

$y - 2 = \sqrt{x-1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$

1d) $f(y) = \frac{1}{y} = x$

$y = \frac{1}{x}$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

1e) $f(y) = \frac{y+1}{y-1} = x$

$y + 1 = x(y-1)$

$y - xy = -x - 1$

$y(1-x) = -x - 1$

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$

1f) $f(y) = \sqrt{y} = x$

se define para $y \geq 0$

$(\sqrt{y})^2 = x^2$

$y = x^2$

$f^{-1}(x) = x^2$

1g) $f(y) = y^2 + 1 = x$

se define para $y \geq 0$

$\Rightarrow\ y^2 = x - 1$

$y = \sqrt{x-1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

1h) $f(y) = (y-1)^2 = x$

se define para $y \geq 1$

$\Rightarrow\ y - 1 = \sqrt{x}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$

2a) $f(f^{-1}(x)) = 5\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}\right) - 1$

$= x + 1 - 1 = x$

$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{5}(5x - 1) + \frac{1}{5}$

$= x - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = x$

2b) $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$

$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$

2c) $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x-2)^2 + 1 - 1} + 2$

$= \sqrt{(x-2)^2} + 2$

$= x - 2 + 2$

$= x$

$f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x-1} + 2 - 2)^2 + 1$

$= (\sqrt{x-1})^2 + 1$

$= x - 1 + 1 = x$

2d) $f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x))$

$= \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 \div \frac{1}{x}$

$= 1(x) = x$

2e) $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x))$

$= \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}$

$= \frac{2x}{x-1} \div \frac{2}{x-1}$

$= \frac{2x}{x-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)$

$= x$

2f) $f(f^{-1}(x)) = \sqrt{x^2} = x$

$f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$

2h) $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x} + 1 - 1)^2$

$= (\sqrt{x})^2$

$= x$

$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x-1)^2} + 1$

$= x - 1 + 1$

$= x$

2g) $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 1$

$= x - 1 + 1 = x$

$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1 - 1}$

$= \sqrt{x^2} = x$

Aunque el rango de la función inversa se estudiará en la siguiente clase es necesario realizar la observación que los valores de que toma la variable y están en el dominio de f, sobre todo en los literales f), g) y h).

En la próxima clase se relaciona la biyectividad con la existencia de la función inversa.

1.7 Existencia, dominio y rango de la función inversa

Problema inicial

a) Grafica las funciones $f(x) = 2x + 2$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$ en un mismo plano cartesiano y observa que si (a, b) es un punto de la gráfica de f entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}.

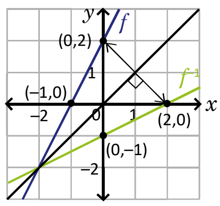
Los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos respecto a la recta $y = x$.

b) Sea (a, b) un punto de la gráfica de f, demuestra que si f posee función inversa f^{-1}, entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}.

c) Grafica la función $f(x) = x^2$, luego para cada punto (a, b) de $f(x)$ gráfica el punto (b, a) y dibuja la curva que une estos puntos.

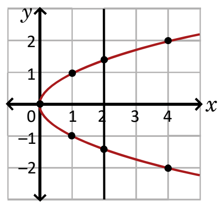
d) La curva que obtuviste en c), ¿corresponde a la gráfica de una función?

Solución



a) Se observa que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$. Por lo tanto, si (a,b) es un punto de la gráfica de f entonces (b, a) es un punto de f^{-1}.

b) (a, b) es un punto de la gráfica de f si y solo si $f(a) = b$.
Al aplicar la función inversa a la ecuación anterior se tiene $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b)$.
Así, por la definición de función inversa se tiene: $a = f^{-1}(b)$.
Por lo tanto, si (a, b) es un punto de la gráfica de f entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}.



c) Se grafican algunos puntos (b,a): $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(4, 2)$, $(4, -2)$.
Se traza la curva que une estos puntos.

d) La curva que se obtuvo no corresponde a la gráfica de una función pues hay rectas verticales que cortan en dos puntos a la curva.

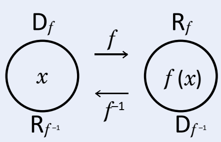
Definición

Una función f: A ⟶ B posee función inversa si y solo si es biyectiva. De acuerdo a la clase 1.3, una función puede restringirse para que sea biyectiva y así tener función inversa.

Si (a, b) es un punto de la gráfica de $f(x)$ entonces (b, a) es un punto de la gráfica de $f^{-1}(x)$.

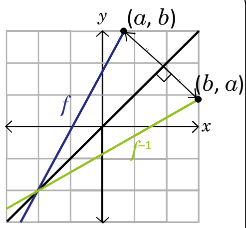
El dominio de la función inversa es el rango de la función inicial y el rango de la función inversa es el dominio de la función inicial:

$$D_{f^{-1}} = R_f \text{ y } R_{f^{-1}} = D_f.$$



La gráfica de f^{-1} es simétrica a la de f, con eje de simetría $y = x$.

El punto (a, b) es simétrico al punto (b, a).



Problemas

En los siguientes literales determina la función inversa, su dominio y su rango. Además grafica la función y su inversa en el mismo plano cartesiano. En el literal d) realiza una restricción de la función.

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow 3x - 2$

b) $f: \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \longrightarrow \frac{1}{x+1}$

c) $f:]-\infty, 0] \longrightarrow [0, \infty[$
$x \longrightarrow x^2$

d) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow (x + 1)^2 - 4$

Indicador de logro:

1.7 Determina la función inversa de una función analizando dominio y rango.

Secuencia:

En esta clase se establece que la función posee inversa si y solamente si es biyectiva. Además, se observa la relación de simetría respecto a la recta identidad entre las gráficas de una función y su inversa. Esto se utilizará en la siguiente lección para relacionar las funciones exponencial y logarítmica.

Propósito:

El Problema inicial, en el literal a) los estudiantes deben visualizar la simetría entre las gráficas de las funciones y luego consolidar lo observado, en el literal b). En los últimos literales se comprueba que para una función no inyectiva no es posible determinar una función inversa.

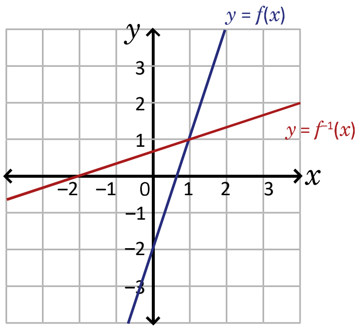
Solución de problemas:

a) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow 3x - 2$

$f^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

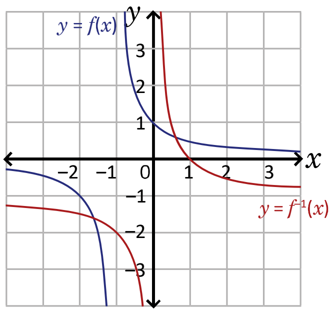


b) $f\colon \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$

$x \longrightarrow \frac{1}{x+1}$

$f^{-1}\colon \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$

$x \longrightarrow \frac{1}{x} - 1$

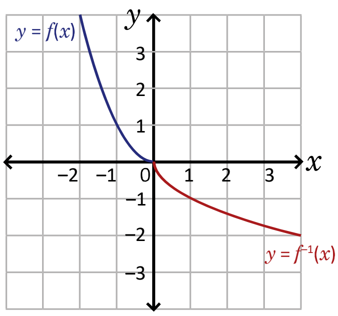


c) $f\colon]-\infty, 0] \longrightarrow [0, \infty[$

$x \longrightarrow x^2$

$f^{-1}\colon [0, \infty[\longrightarrow]-\infty, 0]$

$x \longrightarrow -\sqrt{x}$



d) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

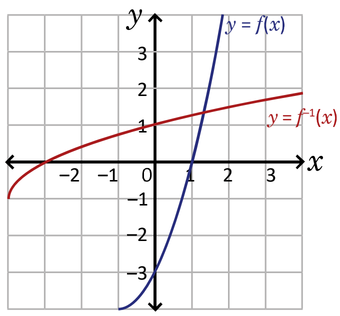
$x \longrightarrow (x + 1)^2 - 4$

$f_1\colon [-1, \infty[\longrightarrow]-4, \infty[$

$x \longrightarrow (x + 1)^2 - 4$

$f_1^{-1}\colon]-4, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$

$x \longrightarrow \sqrt{x+4} - 1$



1.8 Practica lo aprendido

1. En los siguientes literales determina la ecuación de las composiciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$:

a) $f(x) = -x + 5$, $g(x) = -x - 2$

b) $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = -x + 1$

c) $f(x) = \sqrt{-x+1}$, $g(x) = 4 - x^2$

d) $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2 - x$

2. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$

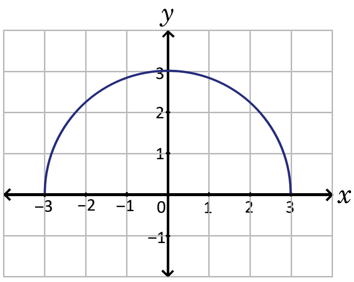
e) $f(x) = \sqrt{3^x - 9}$

f) $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$

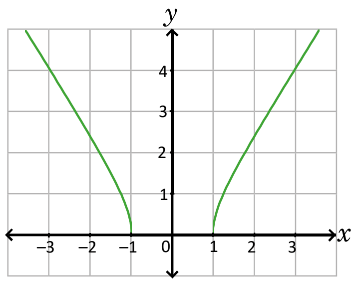
Escribe cada función como una composición de funciones.

3. Se tienen las gráficas de las siguientes funciones:

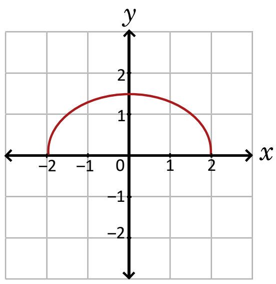
$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$



$f_2(x) = \sqrt{2x^2 - 2}$



$f_3(x) = \sqrt{2 - \dfrac{x^2}{2}}$



Para cada una:

a) Determina el dominio como el conjunto de los valores donde la función está definida.

b) Restringe el dominio de la función para que sea inyectiva.

c) Con el dominio encontrado en b) determina el rango de modo que la función sea sobreyectiva.

d) Traza la gráfica de la función con el dominio y el rango restringidos en b) y c).

4. A partir de las funciones redefinidas en el problema 3 realiza lo siguiente:

a) Para cada función determina la ecuación de la función inversa.

b) Determina el domino y rango de la función inversa.

c) Grafica en el mismo plano cartesiano f y f^{-1}.

5. Considerando los puntos P(a, b), Q(b, a) y la recta l: $y = x$ demuestra que $d(\text{P}, l) = d(\text{Q}, l)$.

6. Se tienen las siguientes funciones y sus inversas:

f_1: $[0, \infty[\to [0, \infty[$; $x \to x^2$

f_1^{-1}: $[0, \infty[\to [0, \infty[$; $x \to \sqrt{x}$

f_2: $[-1, \infty[\to [0, \infty[$; $x \to x + 1$

f_2^{-1}: $[0, \infty[\to [-1, \infty[$; $x \to x - 1$

Realiza lo siguiente:

a) Determina la ecuación de la función $g_1(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$.

b) Determina la ecuación de la función $g_2(x) = (f_2^{-1} \circ f_1^{-1})(x)$.

c) Efectúa las composiciones $(g_1 \circ g_2)(x)$ y $(g_2 \circ g_1)(x)$.

d) En este caso, ¿cuál es la función inversa de $g_1(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$?

e) Sean f_1 y f_2 dos funciones cualesquiera, tal que las funciones f_1^{-1}, f_2^{-1}, $f_1 \circ f_2$ y $f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ están definidas. Demuestra que $f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ es la función inversa de $f_1 \circ f_2$.

Unidad 5

Indicador de logro:

1.8 Resuelve problemas correspondientes a funciones biyectivas e inversas.

Solución de problemas:

1a) $(f\circ g)(x) = x + 7,\ (g\circ f)(x) = x - 7$

1b) $(f\circ g)(x) = x^2 - 2x + 5,\ (g\circ f)(x) = -x^2 - 3$

1c) $(f\circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 3}$, $(g\circ f)(x) = x + 3$

1d) $(f\circ g)(x) = 2^{x^2 - x}$, $(g\circ f)(x) = 4^x - 2^x$

En cada literal del problema 2 se tiene $f(x) = (f_1\circ f_2)(x)$

2a) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = 1 - x^2$

$D_{f_1} = [0, \infty[$

$0 \leq 1 - x^2 \Rightarrow x^2 \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow D_f = [-1, 1]$

2b) $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = x^2 - 2x - 3$

$D_{f_1} = \mathbb{R} - \{0\}$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = 3, x = -1$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

2c) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$

$D_{f_1} = [0, \infty[$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 0 < x$

$\Rightarrow D_f =]0, \infty[$

2d) $f_1(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$, $f_2(x) = x^2 + 1$

$D_{f_1} =]0, \infty[$

$0 < x^2 + 1$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

2e) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = 3^x - 9$

$D_{f_1} = [0, \infty[$

$0 \leq 3^x - 9 \Rightarrow 2 \leq x$

$D_f = [2, \infty[$

2f) $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$

$D_f = [0, \infty[$

El estudiante debe utilizar las técnicas de desigualdades vistas el año anterior. En el literal 2b) también se puede escribir la respuesta como unión de intervalos.

3a) $D_{f_1} = [-3, 3]$

$D_{f_2} =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

$D_{f_3} = [-2, 2]$

3b) $D_{f_1} = [0, 3]$

$D_{f_2} = [1, \infty[$

$D_{f_3} = [0, 2]$

3c) $R_{f_1} = [0, 3]$

$R_{f_2} = [0, \infty[$

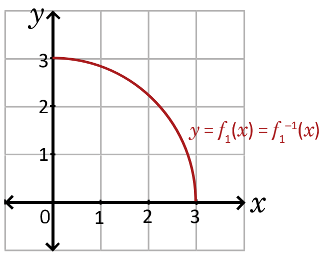
$R_{f_3} = [0, \sqrt{2}]$

3d) Ver solución del problema 4.

4a) $f_1^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2}$,

4b) $D_{f_1^{-1}} = [0, 3]$, $R_{f_1^{-1}} = [0, 3]$

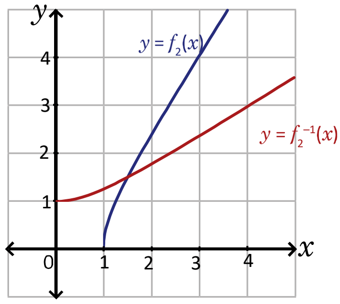
4c)



4a) $f_2^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 1}$

4b) $D_{f_2^{-1}} = [0, \infty[$, $R_{f_2^{-1}} = [1, \infty[$

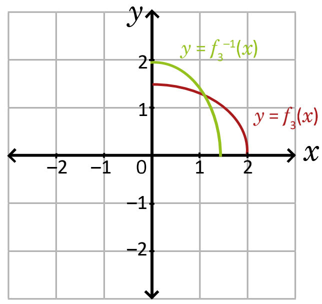
4c)



4a) $f_3^{-1}(x) = \sqrt{4 - 2x^2}$,

4b) $D_{f_3^{-1}} = [0, \sqrt{2}]$, $R_{f_3^{-1}} = [0, 2]$

4c)



5. $d(P, l) = \frac{|a - b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|b - a|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = d(Q, l)$

La solución del problema 4 depende de la restricción en el problema 3.

6a) $g_1(x) = (f_1\circ f_2)(x) = (x + 1)^2$.

6b) $g_2(x) = (f_2^{-1}\circ f_1^{-1})(x) = \sqrt{x} - 1$.

6c) $(g_1\circ g_2)(x) = x$, donde $x \geq 0$ y $(g_2\circ g_1)(x) = x$, donde $x \geq -1$.

6d) $g_2(x) = (f_2^{-1}\circ f_1^{-1})(x) = \sqrt{x} - 1$.

6e) $((f_1\circ f_2)\circ(f_2^{-1}\circ f_1^{-1}))(x) = (f_1\circ f_2)((f_2^{-1}\circ f_1^{-1})(x)) = (f_1\circ f_2)(f_2^{-1}(f_1^{-1}(x))) = f_1(f_2(f_2^{-1}(f_1^{-1}(x))))$

$= f_1(f_1^{-1}(x))$, por ser f_2 y f_2^{-1} inversas entre sí.

$= x$, por ser f_1 y f_1^{-1} inversas entre sí.

También se cumple que $((f_2^{-1}\circ f_1^{-1})\circ(f_1\circ f_2))(x) = x$.

Por lo tanto $f_2^{-1}\circ f_1^{-1}$ es la función inversa de $f_1\circ f_2$.

En el problema 3b) la restricción del dominio no es la única.

Lección 2 Función logarítmica

2.1 Definición de logaritmo

Problema inicial

¿Qué valor debe tomar el exponente x para que se cumplan las siguientes igualdades?

a) $2^x = 8$ b) $3^x = \frac{1}{27}$

Solución

a) $2^x = 8$

$2^x = 2^3$ se escribe 8 como potencia de 2

$x = 3.$

Por lo tanto, $x = 3$.

b) $3^x = \frac{1}{27}$

$3^x = 27^{-1}$

$3^x = (3^3)^{-1}$ Se escribe como potencias de la misma base

$3^x = 3^{-3}$

$x = -3.$

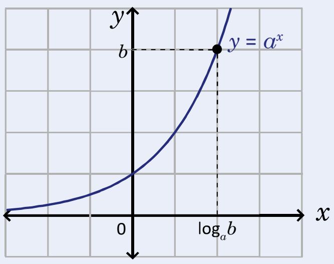
Por lo tanto, $x = -3$.

Definición

Sean a, b y x números reales tal que $b > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$, se define el **logaritmo** base a de un número b como sigue:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Significa que el logaritmo es el exponente al que se debe elevar el número a, llamado **base**, para obtener el número b.

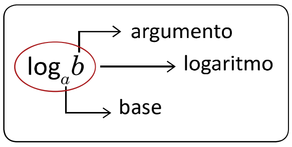


Ejemplo

En el Problema inicial se tiene que

a) $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$ y se lee el logaritmo base 2 de 8 es igual a 3.

b) $3^{-3} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{27} = -3$ y se lee el logaritmo de $\frac{1}{27}$ base 3 es igual a -3.



Problemas

1. Escribe como un logaritmo cada una de las siguientes potencias.

a) $2^2 = 4$ b) $3^4 = 81$ c) $10^{-1} = \frac{1}{10}$ d) $4^{-2} = \frac{1}{16}$

e) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ f) $25^{\frac{3}{2}} = 125$ g) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$ h) $2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$

2. Escribe cada logaritmo como una potencia.

a) $\log_2 64 = 6$ b) $\log_5 25 = 2$ c) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$ d) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

e) $\log_4 32 = \frac{5}{2}$ f) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}$ g) $\log_4 \sqrt{8} = \frac{3}{4}$ h) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$

Indicador de logro:

2.1 Expresa igualdades de potencias como igualdades de logaritmos y viceversa.

Secuencia:

En la unidad anterior se estudió la potencia donde el exponente es cualquier número real. Ahora se estudia la definición de logaritmo de un número a partir de la potencia de un número real positivo diferente de 1.

Propósito:

En el Problema inicial el estudiante debe determinar el valor del exponente que cumple la ecuación. Este proceso será útil posteriormente, para determinar el logaritmo de un número. En los Problemas el estudiante deberá relacionar las definiciones de potencia y logaritmo.

Solución de problemas:

1a) $\log_2 4 = 2$ **1b)** $\log_3 81 = 4$ **1c)** $\log_{10}\frac{1}{10} = -1$ **1d)** $\log_4\frac{1}{16} = -2$

1e) $\log_2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$ **1f)** $\log_{25}125 = \frac{3}{2}$ **1g)** $\log_2\sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}$ **1h)** $\log_2\frac{1}{\sqrt[3]{32}} = -\frac{5}{3}$

2a) $2^6 = 64$ **2b)** $5^2 = 25$ **2c)** $5^{-1} = \frac{1}{5}$ **2d)** $3^{-3} = \frac{1}{27}$

2e) $4^{\frac{5}{2}} = 32$ **2f)** $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$ **2g)** $4^{\frac{3}{4}} = \sqrt{8}$ **2h)** $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2.2 Logaritmo de un número

Problema inicial

1. Calcula el valor de los siguientes logaritmos:
   a) $\log_2 16$ b) $\log_3 \frac{1}{9}$
2. Demuestra que $\log_a a^c = c$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Solución

1. a) $\log_2 16$

Sea $x = \log_2 16$

$x = \log_2 16 \Leftrightarrow 2^x = 16$ se aplica la definición de logaritmo,

$\Leftrightarrow 2^x = 2^4$ se resuelve la ecuación,

$\Leftrightarrow x = 4.$

b) $\log_3 \frac{1}{9}$

Sea $x = \log_3 \frac{1}{9}$

$x = \log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{9}$ se aplica la definición de logaritmo,

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^2}$ se escribe 9 como potencia de 3,

$\Leftrightarrow 3^x = 3^{-2}$ se reescribe con exponente negativo,

$\Leftrightarrow x = -2.$

2. Se tiene que $x = \log_a a^c \Leftrightarrow a^x = a^c$. Por lo tanto, $x = c$.

Conclusión

Calcular el valor de un logaritmo $x = \log_a b$ es encontrar el valor del exponente x que cumple $a^x = b$.

De manera general para encontrar el valor de un logaritmo se realizan los siguientes pasos:
1. Se escribe como potencia $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.
2. Se resuelve la ecuación $a^x = b$.

Si $b = a^c$ entonces $\log_a b = c$; por lo que, $\log_a a^c = c$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$
$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

Ejemplo

Encuentra el valor del logaritmo $\log_4 64$.

Solución 1
Sea $x = \log_4 64$ entonces $x = \log_4 64 \Leftrightarrow 4^x = 64 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

Solución 2
Utilizando la propiedad $\log_a a^c = c$: $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$.

Problemas

Determina el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_{10} 10$ b) $\log_3 1$ c) $\log_2 2^{100}$ d) $\log_2 32$

e) $\log_9 81$ f) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ g) $\log_8 4$ h) $\log_{25} 125$

i) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$ j) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$ k) $\log_4 \frac{1}{2}$ l) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

Unidad 5

Indicador de logro:

2.2 Calcula el logaritmo de un número expresándolo como potencia.

Secuencia:

Se presenta el proceso para determinar el valor de un logaritmo a través de la definición, que involucra la resolución de ecuaciones exponenciales y se tiene la alternativa de escribir el argumento como potencia cuya base sea la base del logaritmo.

Propósito:

El numeral 2 del Problema inicial permite simplificar el proceso para determinar el logaritmo de un número pues utiliza únicamente la descomposición en factores, la desventaja de esta propiedad se presenta cuando la base es una fracción o es mayor al argumento del logaritmo, por lo que en tal caso es mejor proceder con la definición.

Solución de problemas:

a) $\log_{10}10 = \log_{10}10^1 = 1$

b) $\log_3 1 = \log_3 3^0 = 0$

c) $\log_2 2^{100} = 100$

d) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

e) $\log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$

f) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

g) $x = \log_8 4 \Leftrightarrow 8^x = 4$
$\Leftrightarrow (2^3)^x = 2^2$
$\Leftrightarrow 2^{3x} = 2^2$
$\Leftrightarrow 3x = 2$
$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

h) $x = \log_{25}125 \Leftrightarrow 25^x = 125$
$\Leftrightarrow (5^2)^x = 5^3$
$\Leftrightarrow 5^{2x} = 5^3$
$\Leftrightarrow 2x = 3$
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

i) $x = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Leftrightarrow (2^{-1})^x = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$
$\Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{-\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow -x = -\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

j) $x = \log_3\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$
$\Leftrightarrow 3^x = 3^{-\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

k) $x = \log_4\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4^x = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow (2^2)^x = 2^{-1}$
$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{-1}$
$\Leftrightarrow 2x = -1$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

l) $x = \log_{\frac{1}{3}}9 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$
$\Leftrightarrow (3^{-1})^x = 3^2$
$\Leftrightarrow 3^{-x} = 3^2$
$\Leftrightarrow -x = 2$
$\Leftrightarrow x = -2$

2.3 Propiedades de los logaritmos*

Problema inicial

1. Compara el resultado de la operación y el logaritmo para cada uno de los siguientes literales.
   a) $\log_2 4 + \log_2 8$ y $\log_2 32$ b) $\log_2 8 - \log_2 4$ y $\log_2 2$ c) $3\log_2 4$ y $\log_2 4^3$ d) $\log_2 8^2$ y $\log_2 4^3$

2. Demuestra las siguientes propiedades.
   a) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ b) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
   c) $b\log_a M = \log_a M^b$ d) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

Solución

1. a) $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 2^2 + \log_2 2^3$ y $\log_2 32 = \log_2 2^5$
$$= 2 + 3 \qquad = 5$$
$$= 5$$

Por lo tanto, el resultado es el mismo.
Se observa que $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 (4 \times 8) = \log_2 32$.

b) $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 2^3 - \log_2 2^2$ y $\log_2 2 = 1$
$$= 3 - 2$$
$$= 1$$

Por lo tanto, el resultado es el mismo.
Se observa que $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 \frac{8}{4} = \log_2 2$.

c) $3\log_2 4 = 3\log_2 2^2$ y $\log_2 4^3 = \log_2 (2^2)^3$
$$= 3(2) \qquad = \log_2 2^6$$
$$= 6 \qquad = 6$$

Por lo tanto, el resultado es el mismo.
Se observa que $3\log_2 4 = \log_2 4^3 = 6$.

d) $\log_2 8^2 = \log_2 2^6$ y $\log_2 4^3 = \log_2 2^6$
$$= 6 \qquad = 6$$

Por lo tanto, el resultado es el mismo.
Se observa que $8^2 = 4^3$.

2. Sean $x = \log_a M$ y $y = \log_a N$, por definición se tiene $M = a^x$ y $N = a^y$.

a) Se tiene el producto $MN = a^x a^y = a^{x+y}$
Al escribir como logaritmo: $\log_a MN = x + y$
Por lo tanto, $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$.

b) Se tiene el cociente $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
Por definición de logaritmo $\log_a \frac{M}{N} = x - y$
Por lo tanto, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

c) Se tiene la potencia $M^b = (a^x)^b = a^{bx}$
Se reescribe como logaritmo $bx = \log_a M^b$
Por lo tanto, $b\log_a M = \log_a M^b$.

d) En este caso $x = \log_a M$ y $x = \log_a N$
Entonces $M = a^x$ y $N = a^x$
Por lo tanto, $M = N$.

Conclusión

Sean a, M y N números positivos con $a \neq 1$, los logaritmos cumplen las siguientes propiedades:

1. $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
2. $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
3. $b\log_a M = \log_a M^b$
4. $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

Observa:
$(\log_2 4)^3 = 2^3 = 8$ y $\log_2 4^3 = 3\log_2 4 = 3(2) = 6$.
Se tiene que $(\log_2 4)^3 \neq \log_2 4^3$.
Por lo que, en general, $(\log_a M)^b \neq \log_a M^b$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\log_4 2 + \log_4 8$ b) $\log_6 12 + \log_6 18$ c) $\log_2 96 - \log_2 3$ d) $\log_2 6 - \log_2 24$

e) $\log_2 \frac{12}{5} + \log_2 \frac{5}{3}$ f) $\log_3 \frac{11}{54} + \log_3 \frac{2}{33}$ g) $\log_3 \frac{6}{7} - \log_3 \frac{2}{21}$ h) $\log_4 \frac{3}{10} - \log_4 \frac{12}{5}$

i) $3\log_9 3 + \log_9 243$ j) $5\log_4 8 + 3\log_4 32$ k) $2\log_2 54 - 3\log_2 18$ l) $2\log_{\frac{2}{3}} 12 - 2\log_{\frac{2}{3}} 18$

Indicador de logro:

2.3 Efectúa operaciones de logaritmos utilizando sus propiedades.

Secuencia:

Ahora se efectúan las operaciones entre logaritmos que serán útiles en la resolución de ecuaciones logarítmicas. La propiedad en d) hace referencia a la inyectividad del logaritmo como función.

Propósito:

El Problema inicial aborda las propiedades de logaritmos para un caso particular y para el caso general. Las propiedades se han escrito en la Conclusión de tal manera que sea inmediato aplicarlas en los Problemas.

Solución de problemas:

a) $\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$

b) $\log_6 12 + \log_6 18 = \log_6(2^2 \times 3 \times 2 \times 3^2)$
$= \log_6(2^3 \times 3^3)$
$= \log_6 6^3$
$= 3$

c) $\log_2 96 - \log_2 3 = \log_2 \frac{96}{3}$
$= \log_2 32$
$= \log_2 2^5$
$= 5$

d) $\log_2 6 - \log_2 24 = \log_2 \frac{6}{24}$
$= \log_2 \frac{1}{4}$
$= \log_2 2^{-2}$
$= -2$

e) $\log_2 \frac{12}{5} + \log_2 \frac{5}{3} = \log_2 4 = 2$

f) $\log_3 \frac{11}{54} + \log_3 \frac{2}{33} = \log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4$

g) $\log_3 \frac{6}{7} - \log_3 \frac{2}{21} = \log_3 9$
$= \log_3 3^2$
$= 2$

h) $\log_4 \frac{3}{10} - \log_4 \frac{12}{5} = \log_4 \frac{1}{8}$
$= \log_4[(2^2)^{\frac{1}{2}}]^{-3}$
$= \log_4 4^{-\frac{3}{2}}$
$= -\frac{3}{2}$

i) $3\log_9 3 + \log_9 243 = \log_9 3^3 + \log_9 3^5$
$= \log_9 3^8$
$= \log_9 9^4$
$= 4$

j) $5\log_4 8 + 3\log_4 32 = \log_4(2^3)^5 + \log_4(2^5)^3$
$= \log_4 2^{15} + \log_4 2^{15}$
$= \log_4 4^{15}$
$= 15$

k) $2\log_2 54 - 3\log_2 18 = \log_2 54^2 - \log_2 18^3$
$= \log_2 \frac{54^2}{18^3}$
$= \log_2 \frac{2^2 \times 3^6}{2^3 \times 3^6}$
$= \log_2 \frac{1}{2}$
$= -1$

l) $2\log_{\frac{2}{3}} 12 - 2\log_{\frac{2}{3}} 18 = \log_{\frac{2}{3}} 12^2 - \log_{\frac{2}{3}} 18^2$
$= \log_{\frac{2}{3}} \frac{12^2}{18^2}$
$= \log_{\frac{2}{3}} \frac{2^4 \times 3^2}{2^2 \times 3^4}$
$= \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^2$
$= 2$

En h) también es válido utilizar la definición para determinar el logaritmo que resulta de la operación.

Lección 2

2.4 Cambio de base de un logaritmo*

Problema inicial

¿Cómo calcularías el valor de $\log_2 5$ utilizando el logaritmo base 10?

La mayoría de calculadoras científicas solo permiten encontrar el valor de logaritmos de base 10 y e. El número neperiano: e = 2.718281828459045...

Solución

Sea $x = \log_2 5$. Entonces:

$2^x = 5$ por la definición de logaritmo,

$\log 2^x = \log 5$ se aplica logaritmo a ambos lados de la igualdad,

$x\log 2 = \log 5$ utilizando propiedades de logaritmo,

$x = \frac{\log 5}{\log 2}$.

El logaritmo base 10, usualmente, se denota sin la base: $\log_{10} a = \log a$.

Se utiliza la calculadora para determinar el cociente:

log 5 ÷ log 2 = $\Rightarrow$ Pantalla de la calculadora

log 5 ÷ log 2
2.321928095

Por lo tanto, $\log_2 5 = 2.321928095...$

Definición

Sean a, b y c números positivos tales que $a \neq 1$ y $c \neq 1$. Se denomina **cambio de base** a la igualdad:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Ejemplo

1. Demuestra la propiedad del cambio de base para $c = 10$.

   Se tiene que $x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$.

   Se aplica logaritmo base 10: $\log a^x = \log b$.

   Se aplica la propiedad del logaritmo de una potencia $x\log a = \log b$.

   Se despeja x: $x = \frac{\log b}{\log a}$, $\log a \neq 0$ ya que $a \neq 1$.

   Por lo tanto, se tiene que $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$.

2. Calcula el valor de $\log_4 8$.

   Se utiliza $c = 2$.

   $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$.

   Por lo tanto, $\log_4 8 = \frac{3}{2}$.

   Se puede utilizar cualquier base.

   $\log_4 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 4} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^2} = \frac{3\log_3 2}{2\log_3 2} = \frac{3}{2}$.

En este caso no es necesario utilizar la calculadora.

Problemas

1. Simplifica los siguientes logaritmos con la propiedad de cambio de base.

   a) $\log_4 32$ b) $\log_4 \frac{1}{8}$ c) $\log_9 \sqrt{3}$ d) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}}$

   e) $\log_{\frac{1}{9}} 27$ f) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$ h) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Observa que el argumento del logaritmo y la base son potencias de una misma base.

2. Calcula el valor de los siguientes logaritmos.

   a) $\log_5 24$ b) $\log_2 \frac{1}{3}$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$

Utiliza $c = 10$.

Unidad 5

Indicador de logro:

2.4 Utiliza la propiedad del cambio de base de un logaritmo para calcular el logaritmo de un número.

Secuencia:

Se introduce la propiedad del cambio de base que sirve para calcular otros logaritmos sin utilizar la definición de logaritmo explícitamente. Deberá indicar cómo puede iniciar el proceso si el estudiante no puede resolver el Problema inicial.

Propósito:

En el Problema inicial es necesario usar la calculadora, mientras que en el Ejemplo se muestra otro caso en el que no se utilizará debido a que la base y el argumento del logaritmo son potencias de una misma base.

Solución de problemas:

1a) $\log_4 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^2} = \frac{5}{2}$

1b) $\log_4 \frac{1}{8} = \frac{\log_2 \frac{1}{8}}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^{-3}}{\log_2 2^2} = -\frac{3}{2}$

1c) $\log_9 \sqrt{3} = \frac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}{\log_3 3^2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

1d) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}} = \log_4 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\log_2 2^{-\frac{1}{2}}}{\log_2 2^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

1e) $\log_{\frac{1}{9}} 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 \frac{1}{9}} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^{-2}} = -\frac{3}{2}$

1f) $\log_{\frac{1}{27}} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{1}{27}} = \frac{\log_3 3}{\log_3 3^{-3}} = -\frac{1}{3}$

1g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8} = \frac{\log_2 \sqrt{8}}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}{\log_2 2^{-2}} = \frac{\frac{3}{2}}{-2} = -\frac{3}{4}$

1h) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \log_{\frac{1}{8}} 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{\log_2 2^{-\frac{2}{3}}}{\log_2 2^{-3}} = \frac{-\frac{2}{3}}{-3} = \frac{2}{9}$

2a) $\log_5 24 = \frac{\log 24}{\log 5} = 1.97463...$

2b) $\log_2 \frac{1}{3} = \frac{\log \frac{1}{3}}{\log 2} = -1.58496...$

2c) $\log_{\frac{1}{2}} 5 = \frac{\log 5}{\log \frac{1}{2}} = -2.32192...$

2d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2} = \frac{\log \sqrt{2}}{\log \frac{1}{3}} = -0.31546...$

Los estudiantes también puede utilizar la aproximación hasta las centésimas.

2.5 Definición de la función logarítmica y su gráfica

Problema inicial

1. a) Utiliza la siguiente tabla para graficar la función $f(x) = \log_2 x$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					

b) Determina si la función $f(x) = \log_2 x$ es creciente o decreciente.

2. a) Utiliza la siguiente tabla para graficar la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					

b) ¿La función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es creciente o decreciente?

Solución

1. a) Si $x = \frac{1}{4}$ se tiene $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

Si $x = \frac{1}{2}$ se tiene $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

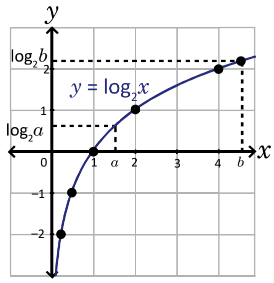
Si $x = 1$ se tiene $f(1) = \log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = \log_2 2 = 1$

Si $x = 4$ se tiene $f(4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	−2	−1	0	1	2

Se traza una curva sobre los puntos obtenidos.



b) Si $0 < a < b$, entonces $\log_2 a < \log_2 b$.
Por lo tanto, $f(x) = \log_2 x$ es creciente.

2. a) Si $x = \frac{1}{4}$ se tiene $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

Si $x = \frac{1}{2}$ se tiene $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$

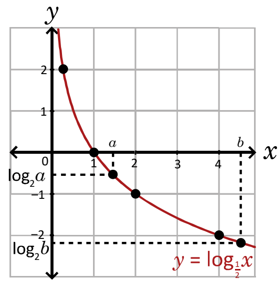
Si $x = 1$ se tiene $f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$

Si $x = 4$ se tiene $f(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	2	1	0	−1	−2

Se traza una curva sobre los puntos obtenidos.



b) Si $0 < a < b$, entonces $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$.
Por lo tanto, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es decreciente.

Definición

La función logarítmica se define como sigue f: $]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \log_a x$

donde a es un número positivo y $a \neq 1$.

La monotonía de la función $f(x) = \log_a x$ se describe a continuación:
1. Es creciente si $a > 1$.
2. $f(x)$ = Es decreciente si $0 < a < 1$.

Un logaritmo está bien definido si el argumento es positivo.

La gráfica de $f(x) = \log_a x$ pasa por los puntos (1, 0) y $(a, 1)$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones logarítmicas.

a) $f(x) = \log_3 x$
b) $f(x) = \log_4 x$
c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

132

Indicador de logro:

2.5 Grafica funciones logarítmicas utilizando tabla de valores y colocando puntos en el plano cartesiano.

Secuencia:

Se estudian las gráficas de las funciones logarítmicas. La razón de utilizar solo argumentos positivos viene de la definición en la cual se escribe el logaritmo a partir de una potencia con base positiva.

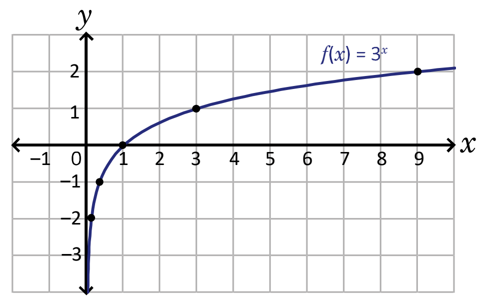
Propósito:

En el Problema inicial se utiliza la ubicación de puntos en el plano para graficar la función logarítmica. A partir de la definición de logaritmo se obtendrá el dominio de la función, la monotonía se obtiene a partir de la gráfica y se establecen puntos característicos de la función en la información adicional de la definición.

Solución de problemas:

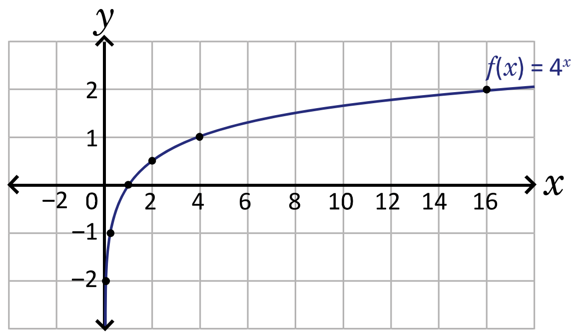
a)

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	–2	–1	0	1	2



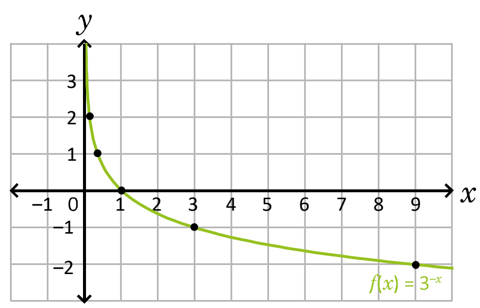
b)

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16
y	–2	–1	0	1	2



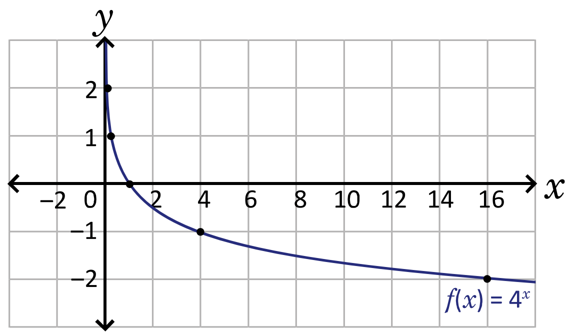
c)

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	2	1	0	–1	–2



d)

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16
y	2	1	0	–1	–2



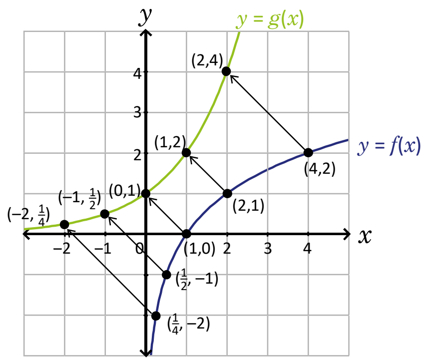
2.6 Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

Problema inicial

1. Grafica en un mismo plano cartesiano las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = 2^x$ y observa que si (a, b) es un punto de f entonces (b, a) es un punto de g.
2. Efectúa las composiciones:
   a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

Solución

1. La función $f(x) = \log_2 x$ se graficó en la clase anterior y la función $g(x) = 2^x$ se graficó en la clase 2.1 de la unidad 4.



$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = 2^x$
(4, 2)	(2, 4)
(2, 1)	(1, 2)
(1, 0)	(0, 1)
$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$

2. Efectúa las composiciones:

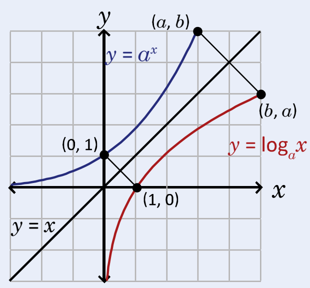
a) $f(g(x)) = f(2^x)$
$= \log_2 2^x$
$= x$

b) $g(f(x)) = g(\log_2 x)$
$= 2^{\log_2 x}$
$= x$

Por la definición de logaritmo $a^{\log_a x} = x$.

Conclusión

1. Las funciones $y = \log_a x$ y $y = a^x$ son simétricas respecto a la recta $y = x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.



2. Para dos números reales a y b con $a > 0$ y $a \neq 1$ se tiene que $\log_a a^b = b$ y $a^{\log_a b} = b$ (con $b > 0$).

3. La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial.
   $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ $f^{-1}:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow a^x$ $x \rightarrow \log_a x$

4. $y = a^x$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$, haciendo uso de la simetría se obtiene que $y = \log_a x$ tiene como asíntota vertical la recta $x = 0$.

5. El dominio de la función logaritmo es el rango de la función exponencial: $]0, \infty[$.
   El rango de la función logaritmo es el dominio de la función exponencial: $\mathbb{R}$.

6. La función logaritmo, al ser la inversa de la función exponencial, es una función biyectiva.

Problemas

Para cada función escribe su función inversa y grafícalas en el mismo plano cartesiano.

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_4 x$ c) $f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right)^x$

Recuerda que $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$

Unidad 5

Indicador de logro:

2.6 Determina la función inversa de una función logarítmica o exponencial.

Secuencia:

El logaritmo se definió como tal para que sea la operación inversa de la potencia. En esta clase se observa la relación de funciones inversas (simetría, composición de funciones, dominio y rango) entre las funciones exponencial y logarítmica.

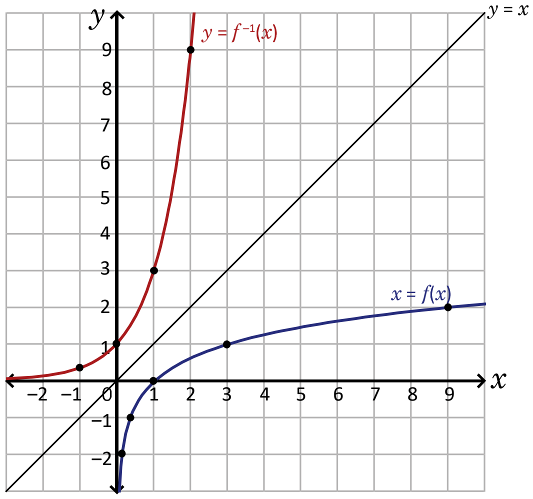
Propósito:

En el Problema inicial se observa la simetría respecto a la identidad entre las funciones exponencial y logarítmica, luego se comprueba la relación inversa por medio de la definición, en la que se debe tener claro el concepto de logaritmo. En los Problemas se sugiere retomar los gráficos de las funciones logarítmicas y aplicar la simetría respecto a la recta $y = x$ para graficar su inversa.

Solución de problemas:

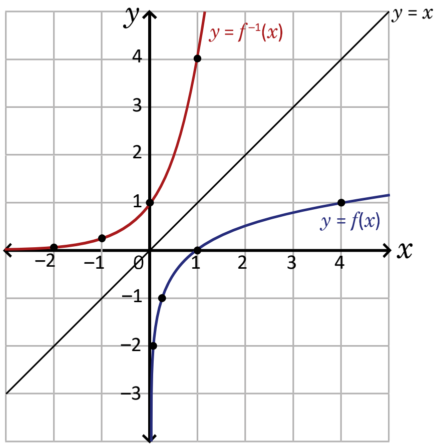
a) $f(x) = \log_3 x$

$f^{-1}(x) = 3^x$



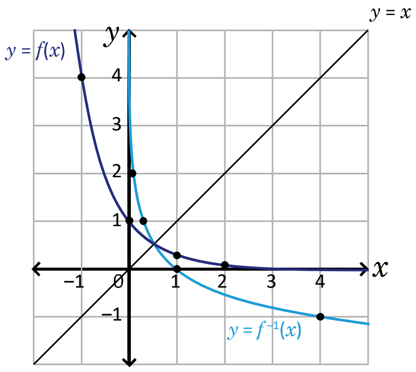
b) $f(x) = \log_4 x$

$f^{-1}(x) = 4^x$



c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$



Lección 2

2.7 Ecuaciones logarítmicas, parte 1

Problema inicial

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones encontradas.

a) $\log_2 x = 3$ b) $\log_3 (x-1) = 2$
c) $\log_5 x^2 = 4$ d) $\log_6 (3x(x+1)) = 2$

Verifica que el argumento del logaritmo es positivo al sustituir los valores encontrados.

Cuando se trata con logaritmos se consideran solo las soluciones reales.

Solución

a) Se utiliza la definición de logaritmo:
$\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8$.

Como $8 > 0$ entonces, $x = 8$ es solución de la ecuación.

b) Se utiliza la definición de logaritmo:
$\log_3 (x-1) = 2 \Leftrightarrow x-1 = 3^2 \Leftrightarrow x-1 = 9 \Leftrightarrow x = 10$.

Se verifica que $10 - 1 = 9 > 0$.
Por lo tanto, $x = 10$ es solución de la ecuación.

c) Se utiliza la definición de logaritmo:
$\log_5 x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 5^4$
$\Leftrightarrow x = \pm 5^2$
$\Leftrightarrow x = \pm 25$

Se verifica que $(\pm 25)^2 > 0$.
Por lo tanto, $x = 25$ y $x = -25$ son soluciones de la ecuación.

d) Se utiliza la definición de logaritmo: $3x(x+1) = 6^2$
Se resuelve la ecuación:
$3x^2 + 3x - 6^2 = 0 \Leftrightarrow 3(x+4)(x-3) = 0$
$\Leftrightarrow x = -4$ o $x = 3$

Verificando si $x = -4$, $3(-4)(-4+1) = 36 > 0$.
Si $x = 3$, $3(3)(3+1) = 36 > 0$.
Por lo tanto, $x = -4$ y $x = 3$ son soluciones de la ecuación.

Conclusión

Una **ecuación logarítmica** es una ecuación en la cual aparece la variable x en el argumento del logaritmo.

Para resolver una ecuación de la forma $\log_a M = b$, donde M es una expresión algebraica de variable x, se resuelve la ecuación $a^b = M$ que se obtiene al aplicar la definición de logaritmo: $\log_a M = b \Leftrightarrow a^b = M$.
Luego se verifica si las soluciones encontradas satisfacen la condición del argumento $M > 0$.

Además, las ecuaciones exponenciales pueden resolverse aplicando logaritmos:

$$a^x = b \Leftrightarrow \log a^x = \log b \Leftrightarrow x\log a = \log b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$$

Ejemplo

Observa la siguiente solución:

$7^x = 2 \Leftrightarrow \log 7^x = \log 2 \Leftrightarrow x\log 7 = \log 2 \Leftrightarrow x = \frac{\log 7}{\log 2} \Leftrightarrow x = 2.80735...$

Problemas

1. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_2 (x+1) = 5$ c) $\log_2 x^2 = 6$ d) $\log_3 x^3 = 6$
e) $\log_4 x = -2$ f) $\log_3 (2x+1) = -1$ g) $\log_2 x^2 = -2$ h) $\log_2 (x^2+4) = 3$
i) $\log (x(20-x)) = 2$ j) $\log_6 (x(13-x)) = 2$ k) $\log (x(x+3)) = 1$ l) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $9^x = 15$ b) $2^{x+1} = 13$ c) $5^{2x-1} = 1\,953\,125$

Indicador de logro:

2.7 Resuelve ecuaciones logarítmicas, aplicando propiedades de potencias.

Secuencia:

Se presentan las ecuaciones logarítmicas en las que se utiliza la definición de logaritmo y la resolución de ecuaciones lineales y de segundo grado. En esta clase, la aplicación de la definición de logaritmo es el primer paso para resolver dichas ecuaciones. Se presenta además la resolución de ecuaciones exponenciales utilizando logaritmos.

Posibles dificultades:

En el literal c) del Problema inicial aunque los estudiantes utilicen la propiedad 3 de la clase 2.3, se sugiere resolver nuevamente utilizando la definición para observar que en realidad la ecuación tienen dos soluciones.

Solución de problemas:

1a) $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81$

1b) $\log_2(x + 1) = 5 \Leftrightarrow x + 1 = 2^5 \Leftrightarrow x = 31$

1c) $\log_2 x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 2^6 \Leftrightarrow x = \pm 8$

1d) $\log_3 x^3 = 6 \Leftrightarrow x^3 = 3^6 \Leftrightarrow x = 9$

1e) $\log_4 x = -2 \Leftrightarrow x = 4^{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$

1f) $\log_3(2x + 1) = -1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3^{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

1g) $\log_2 x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 2^{-2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

1h)
$$\begin{aligned} \log_2(x^2 + 4) = 3 &\Leftrightarrow x^2 + 4 = 2^3 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 2 \end{aligned}$$

1i)
$$\begin{aligned} \log(x(20 - x)) = 2 &\Leftrightarrow x(20 - x) = 10^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 10 \end{aligned}$$

1j)
$$\begin{aligned} \log_6(x(13 - x)) = 2 &\Leftrightarrow x(13 - x) = 6^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 9,\ x = 4 \end{aligned}$$

1k)
$$\begin{aligned} \log(x(x + 3)) = 1 &\Leftrightarrow x(x + 3) = 10 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -5,\ x = 2 \end{aligned}$$

1l) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

2a)
$$\begin{aligned} 9^x = 15 &\Leftrightarrow \log 9^x = \log 15 \\ &\Leftrightarrow x\log 9 = \log 15 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\log 15}{\log 9} \\ &\Leftrightarrow x = 1.23248\ldots \end{aligned}$$

2b)
$$\begin{aligned} 2^{x+1} = 13 &\Leftrightarrow \log 2^{x+1} = \log 13 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)\log 2 = \log 13 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\log 13}{\log 2} - 1 \\ &\Leftrightarrow x = 2.70043\ldots \end{aligned}$$

2c)
$$\begin{aligned} 5^{2x-1} = 1\,953\,125 &\Leftrightarrow \log 5^{2x-1} = \log 1\,953\,125 \\ &\Leftrightarrow (2x - 1)\log 5 = \log 1\,953\,125 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\frac{\log 1\,953\,125}{\log 5} + 1\right) \\ &\Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

2.8 Ecuaciones logarítmicas, parte 2

Problema inicial

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$ b) $\log_5(2x) = \log_5(x+1)$

Solución

a) Se usa la propiedad de la suma de logaritmos:

$\log_2 x + \log_2(x-1) = \log_2(x(x-1))$

sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$\log_2(x(x-1)) = 1$

se debe aplicar la definición y resolver:

$$\begin{aligned}\log_2(x(x-1)) = 1 &\Leftrightarrow (x(x-1)) = 2^1\\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0\\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ o } x = -1\end{aligned}$$

se verifica que el argumento es positivo en cada logaritmo:

si $x = 2$, $2 > 0$, $2 - 1 = 1 > 0$,

si $x = -1$, $-1 < 0$. No es solución de la ecuación.

Por lo tanto, la solución es $x = 2$.

b) $\log_5(2x) = \log_5(x+1)$

$2x = x + 1$ Se utiliza la propiedad: $\log_a M = \log_a N \Rightarrow M = N$,

$x = 1$ se resuelve la ecuación.

Se evalúa $x = 1$ en cada logaritmo

$2(1) = 2 > 0$ y $2 + 1 = 3 > 0$.

Por lo tanto, la solución es $x = 1$.

Conclusión

Para resolver las ecuaciones logarítmicas se utilizan las propiedades de los logaritmos para llevar la ecuación a la forma $\log_a M = b$.

1. Para todo M y N, números positivos se cumple que

   a) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ b) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

   c) $\log_a M^b = b\log_a M$ d) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

2. Se debe comprobar que el argumento de cada logaritmo es positivo al sustituir los valores encontrados para verificar que son soluciones de la ecuación.

En la propiedad $\log_a M^b = b\log_a M$, M debe ser un número positivo. Si b es par se debe tener cuidado.
Ejemplo:
$\log_3 x^2 = 4 \Leftrightarrow 2\log_3 x = 4 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$
En este caso falta la solución $x = -9$.
Así, es mejor no utilizarla en la solución de ecuaciones.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$ b) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+1)^2 = -2$

c) $\log_4(3x) + \log_4(x-2)^{-1} = 1$ d) $\log(x+1) = \log(1-x)$

e) $\log_8(x-3)^9 = 6$ f) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^6 = -18$

g) $\log_3(x+1) + \log_3(x^2-x+1) = 2$ h) $\log_2(x^4 - 6x^2 + 16)^4 = 12$

Indicador de logro:

2.8 Resuelve ecuaciones logarítmicas utilizando propiedades de logaritmos y potencias.

Secuencia:

En las ecuaciones logarítmicas que se presentan en esta clase es necesario utilizar las operaciones con logaritmos como primer paso, esto dará lugar a una ecuación como las resueltas en la clase anterior. Otro paso que es necesario realizar es el de comprobar que las soluciones encontradas no anulan ni hacen negativo el argumento de cada logaritmo de la ecuación inicial.

Propósito:

El Problema inicial presenta dos Problemas en los que se deben utilizar las propiedades de los logaritmos. Algunos de los Problemas a desarrollar involucran la resolución de ecuaciones bicuadráticas y también puede ser necesario el cambio de variable.

Solución de problemas:

a) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3 \Rightarrow \log_2 x(x-2) = 3$

$\Rightarrow \quad x(x-2) = 8$

$\Rightarrow x = 4$ o $x = -2$

si $x = 4$, $4 > 0$, $4 - 2 = 2 > 0$

si $x = -2$, $-2 < 0$. No es solución de la ecuación.

Por lo tanto, la solución es $x = 4$.

b) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+1)^2 = -2 \Rightarrow (x^2+1)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$\Rightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 25$

$\Rightarrow x^2 = -6$ o $x^2 = 4$

$\Rightarrow x = 2$ o $x = -2$

$(x^2+1)^2 > 0$ para todo número real x.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 2$ y $x = -2$.

c) $\log_4(3x) + \log_4(x-2)^{-1} = 1$

$\Rightarrow \quad \log_4[3x(x-2)^{-1}] = 1$

$\Rightarrow \quad \log_4 \frac{3x}{x-2} = 1$

$\Rightarrow \quad \frac{3x}{x-2} = 4$

$\Rightarrow \quad 3x = 4(x-2)$

$\Rightarrow \quad x = 8$

si $x = 8$, $3(8) = 24 > 0$, $8 - 2 = 6 > 0$.

Por lo tanto, la solución es $x = 8$.

d) $\log(x+1) = \log(1-x)$

$\Rightarrow \quad x + 1 = 1 - x$

$\Rightarrow \quad x = 0,$

si $x = 0$, $0 + 1 = 1 > 0$, $1 - 0 = 1 > 0$.

Por lo tanto, la solución es $x = 0$.

e) $\log_8(x-3)^9 = 6 \Rightarrow 9\log_8(x-3) = 6$

$\Rightarrow \log_8(x-3) = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow x = 7$

si $x = 7$, $(7-3)^9 = 4^9 > 0$

Por lo tanto, la solución es $x = 7$.

f) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^6 = -18 \Rightarrow (x-2)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-18}$

$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt[6]{2^{18}}$

$\Rightarrow x - 2 = \pm\, 2^3$

$\Rightarrow x = 10$ o $x = -6$

si $x = 10$, $(10-2)^6 = 8^6 > 0$

si $x = -6$, $(-6-2)^6 = 8^6 > 0$

Por lo tanto las soluciones son $x = 10$, $x = -6$.

g) $\log_3(x+1) + \log_3(x^2 - x + 1) = 2$

$\Rightarrow \quad \log_3[(x+1)(x^2-x+1)] = 2$

$\Rightarrow \quad \log_3(x^3+1) = 2$

$\Rightarrow \quad x^3 + 1 = 3^2$

$\Rightarrow \quad x = 2$

si $x = 2$, $2 + 1 = 3 > 0$, $2^2 - 2 + 1 = 3 > 0$

Por lo tanto, la solución es $x = 2$.

h) $\log_2(x^4 - 6x^2 + 16)^4 = 12$

$\Rightarrow \quad (x^4 - 6x^2 + 16)^4 = 2^{12}$

$\Rightarrow \quad x^4 - 6x^2 + 16 = \pm 8$

$\Rightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ o $x^4 - 6x^2 + 24 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 4$ o $x^2 = 2$

$\Rightarrow x = \pm 2$ o $x = \pm\sqrt{2}$

$(x^4 - 6x^2 + 16)^4 > 0$ para todo número real x.

Por lo tanto las soluciones son $x = \pm 2$, $x = \pm\sqrt{2}$.

Lección 2

2.9 Logaritmo base 10 y logaritmo natural*

Problema inicial

1. Determina el valor de $\log 2^{2019}$.
2. ¿Cuántos dígitos tiene el número 2^{2019}?

Observa que:
n se escribe con 1 dígito si y solo si $10^0 \leq n < 10^1$
n se escribe con 2 dígitos si y solo si $10^1 \leq n < 10^2$
n se escribe con 3 dígitos si y solo si $10^2 \leq n < 10^3$

Solución

1. Se calcula $\log 2^{2019} = 2019\log 2 = 607.77956...$

2. Observa el número de dígitos de los números

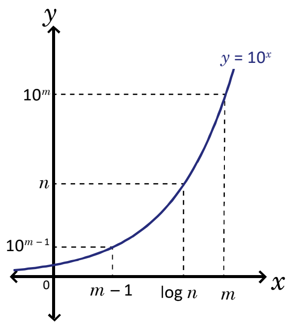
$$\underbrace{1, 2, ..., 9}_{\text{1 dígito}}, \underbrace{10, 11, 12, ..., 99}_{\text{2 dígitos}}, \underbrace{100, 101, ..., 999}_{\text{3 dígitos}}, \underbrace{1\,000, 1\,001, ..., 9\,999}_{\text{4 dígitos}}, \underbrace{10\,000, 10\,001...}_{\text{5 dígitos}}$$

Entonces se puede deducir que, si n es un número positivo:
n se escribe con m dígitos si y solo si $10^{m-1} \leq n < 10^m$

El número de dígitos de 2^{2019} está determinado por el exponente m tal que

$$10^{m-1} \leq 2^{2019} < 10^m \Leftrightarrow \log 10^{m-1} \leq \log 2^{2019} < \log 10^m$$
$$\Leftrightarrow m-1 \leq \log 2^{2019} < m$$

Del problema 1 se tiene que $607 \leq \log 2^{2019} < 608$.
Por lo tanto, 2^{2019} se escribe con 608 dígitos.



Observa que si $10^{m-1} \leq n < 10^m$, entonces $m-1 \leq \log n < m$, ya que la base es $10 > 1$.

Conclusión

1. El logaritmo base 10 de un número a se denota por $\log a$.

2. El número de dígitos de un número entero positivo a es el número entero m inmediatamente mayor a $\log a$.

3. El logaritmo natural de un número a es el logaritmo $\log_e a$, la base es el número neperiano $e = 2.71828...$, y se utiliza la notación $\log_e a = \ln a$.
   El logaritmo natural es muy útil en el cálculo infinitesimal.

Problemas

1. ¿Cuántos dígitos tienen las siguientes potencias?
   a) 3^{2019} b) 5^{1000} c) $2\,019^{2019}$

2. ¿Cuáles potencias de 2 tienen 2 019 dígitos?

3. Obtener el valor de los siguientes logaritmos:
   a) $\ln 2$ b) $\ln 3$
   c) $\ln 10$ d) $\ln \frac{1}{4}$
   e) $\ln \frac{8}{3}$ f) $\ln \frac{11}{3}$

En la calculadora utiliza la tecla ln para calcular el logaritmo natural de un número.

Indicador de logro:

2.9. Determina la cantidad de dígitos de un entero positivo utilizando logaritmo base 10 y calcula logaritmo natural de un número usando calculadora.

Secuencia:

Se introduce como aplicación de logaritmos la cantidad de dígitos de un número entero positivo; en ese sentido les será útil a los estudiantes la monotonía de la función logaritmo vista en la clase 2.5 de esta unidad. Si la pista no es suficiente para contestar la pregunta 2 puede indicar su utilidad para facilitar la solución.

Propósito:

En el Problema inicial, los estudiantes deben observar la relación entre el logaritmo de un número entero positivo y el exponente de la potencia de 10 inmediatamente mayor al número.

Solución de problemas:

1a) $\log 3^{2\,019} = 2\,019 \log 3 = 963.3078...$
Por lo tanto $3^{2\,019}$ tiene 964 dígitos.

1b) $\log 5^{1\,000} = 1\,000 \log 5 = 698.970004...$
Por lo tanto $5^{1\,000}$ tiene 699 dígitos.

1c) $\log 2\,019^{2\,019} = 2\,019 \log 2\,019 = 6\,673.07022...$
Por lo tanto $2\,019^{2\,019}$ tiene 6 674 dígitos.

2. Sea r un número entero tal que 2^r tiene 2 019 dígitos entonces se cumple que

$\Rightarrow 2\,018 \leq \log 2^r < 2\,019$

$\Rightarrow 2\,018 \leq r\log 2 < 2\,019$

$\Rightarrow \frac{2\,018}{\log 2} \leq r < \frac{2\,019}{\log 2}$

$\Rightarrow 6\,703.6508... \leq r < 6\,706.9728...$

$\Rightarrow r = 6\,704$, $r = 6\,705$ y $r = 6\,706$.

Por lo tanto las potencias de 2 que tienen 2 019 dígitos son $2^{6\,704}$, $2^{6\,705}$ y $2^{6\,706}$.

3a) $\ln 2 = 0.69314...$

3b) $\ln 3 = 1.09861...$

3c) $\ln 10 = 2.30258...$

3d) $\ln \frac{1}{4} = -1.38629...$

3e) $\ln \frac{8}{3} = 0.98082...$

3f) $\ln \frac{11}{3} = 1.29928...$

2.10 Practica lo aprendido

1. Calcula el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_7 49$ b) $\log_{16} 2$ c) $\log_9 \frac{1}{3}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 1$ e) $\log_5 \sqrt{5}$ f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}$

g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$ h) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ i) $\log_{\sqrt{2}} 2$

j) $\log_{\sqrt{2}} 4$ k) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$ l) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$

2. Determina el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_6 2 + \log_6 3$ b) $\log 4 + \log 25$ c) $\log_3 99 - \log_3 11$

d) $\log_5 4 - \log_5 500$ e) $\log_7 \frac{28}{9} + \log_7 \frac{63}{4}$ f) $\log_8 \frac{48}{5} + \log_8 \frac{10}{3}$

g) $\log_2 \frac{15}{16} - \log_2 30$ h) $\log_9 \frac{36}{5} - \log_9 \frac{4}{45}$ i) $\log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} + \log_{\sqrt{5}} \frac{20}{3}$

3. Calcula el valor de las siguientes expresiones, sin usar la calculadora.

a) $\frac{\log_9 125}{\log_9 5}$ b) $\frac{\log_3 49}{\log_3 7}$ c) $\frac{\log_6 64}{\log_6 32}$

4. Encuentra el valor de los siguientes logaritmos con la propiedad del cambio de base:

a) $\log_3 15$ b) $\log_8 6$ c) $\log_2 \frac{1}{5}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}$ f) $\log_{\frac{5}{3}} \frac{1}{2}$

5. Grafica las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_8 x = \frac{7}{3}$ b) $\log_3 x(x + 2) = 1$ c) $\log_2 x(2 - 3x) = -2$

d) $\log_6(2x - 3) = \log_6 5 + \log_6 7$ e) $\log (x - 3) + \log (5 - x) = 0$ f) $\log (x - 8) - \log (x - 9) = \log 4$

g) $\log_7(-x) - \log_7(6 - x) = 1$ h) $\log_6(x - 2) + \log_6(x + 3) = 1$ i) $\log_2(x^2 + 9) = 1 + \log_2(2x^2 - 33)$

7. Determina la cantidad de dígitos de los siguientes números:

a) 2^{350} b) 3^{1234} c) 4^{98765}

8. Encuentra la potencia de base 11 que se escribe con 100 dígitos. ¿Existe otra?

Unidad 5

2.10 Resuelve problemas utilizando logaritmos.

Solución de problemas:

1a) $\log_7 49 = 2$ **1b)** $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$ **1c)** $\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ **1d)** $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$

1e) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ **1f)** $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$ **1g)** $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2} = -\frac{1}{4}$ **1h)** $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{9}$

1i) $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$ **1j)** $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$ **1k)** $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = -2$ **1l)** $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = -6$

2a) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$ **2b)** $\log 4 + \log 25 = \log 100 = 2$ **2c)** $\log_3 99 - \log_3 11 = \log_3 9 = 2$

2d) $\log_5 4 - \log_5 500 = \log_5 \frac{1}{125} = -3$ **2e)** $\log_7 \frac{28}{9} + \log_7 \frac{63}{4} = \log_7 49 = 2$ **2f)** $\log_8 \frac{48}{5} + \log_8 \frac{10}{3} = \log_8 32 = \frac{5}{3}$

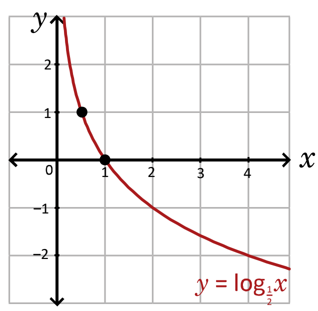
2g) $\log_2 \frac{15}{16} - \log_2 30 = \log_2 \frac{1}{32} = -5$ **2h)** $\log_9 \frac{36}{5} - \log_9 \frac{4}{45} = \log_9 81 = 2$ **2i)** $\log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} + \log_{\sqrt{5}} \frac{20}{3} = \log_{\sqrt{5}} 25 = 4$

3a) $\frac{\log_9 125}{\log_9 5} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$ **3b)** $\frac{\log_3 49}{\log_3 7} = \log_7 49 = 2$ **3c)** $\frac{\log_6 64}{\log_6 32} = \frac{\log_6 2^6}{\log_6 2^5} = \frac{6\log_6 2}{5\log_6 2} = \frac{6}{5}$

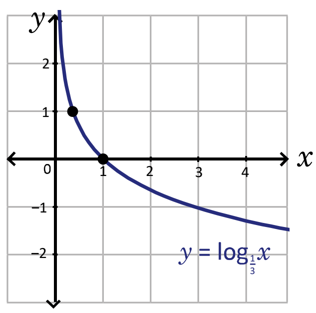
4a) $\log_3 15 = 2.46497...$ **4b)** $\log_8 6 = 0.86165...$ **4c)** $\log_2 \frac{1}{5} = -2.32192...$

4d) $\log_{\frac{1}{2}} 3 = -1.58496...$ **4e)** $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} = 0.36907...$ **4f)** $\log_{\frac{5}{3}} \frac{1}{2} = -1.35691...$

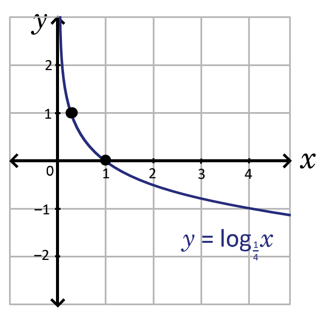
5a)



5b)



5c)



6a) $x = 2^7$ **6b)** $x = 1$, $x = -3$ **6c)** $x = \frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{2}$

6d) $x = 19$ **6e)** $x = 4$ **6f)** $x = \frac{28}{3}$

6g) No tiene solución. **6h)** $x = 3$ **6i)** $x = 5$, $x = -5$

7a) 2^{350} tiene 106 dígitos. **7b)** 3^{1234} tiene 589 dígitos. **7c)** 4^{98765} tiene 59 463 dígitos.

8. Sea n un número entero tal que 11^n que se escribe con 100 dígitos,

$\Rightarrow 99 \leq \log 11^n < 100 \Rightarrow 99 \leq n\log 11 < 100 \Rightarrow \frac{99}{\log 11} \leq n < \frac{100}{\log 11} \Rightarrow 95.065... \leq n < 96.02525...$

Entonces la única potencia de 11 que tiene 100 dígitos es 11^{96}.