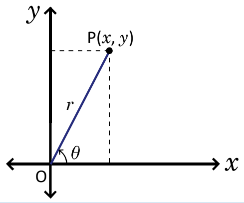
Lección 3 Funciones trigonométricas

3.1 Razones trigonométricas de cualquier ángulo (repaso)

Problema inicial

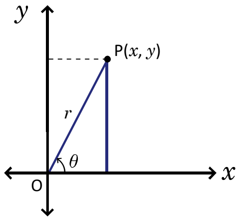
1. Se tiene la gráfica del ángulo θ, O es el origen, $\overline{OP}$ es el lado terminal del ángulo θ dibujado en posición estándar, r es la longitud del segmento $\overline{OP}$. Escribe las razones trigonométricas del ángulo θ.

2. ¿Las razones trigonométricas dependen del valor de r?

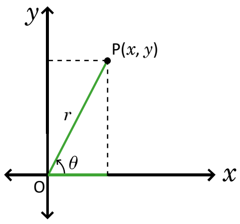


Solución

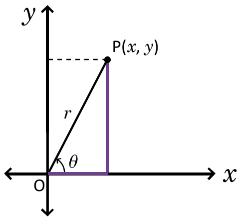
1.



sen $\theta = \frac{y}{r}$



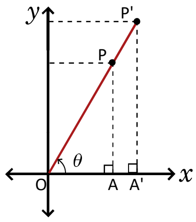
cos $\theta = \frac{x}{r}$



tan $\theta = \frac{y}{x}$

siempre que $x \neq 0$

2. Se elige otro punto P'(x', y') tal que $\overline{OP'}$ es también lado terminal de θ, como muestra la figura:



Se cumple que P es un punto del segmento $\overline{OP'}$.

Sea A la proyección de P en el eje x y A' la proyección de P' en el eje x.

Se cumple que ΔPOA ~ ΔP'OA', por critero AA de semejanza de triángulos.

Si $r' = \overline{OP'}$, entonces de la semejanza se tiene que sen $\theta = \frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$, cos $\theta = \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$ y tan $\theta = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$.

Por lo tanto, las razones no dependen del valor de r.

Conclusión

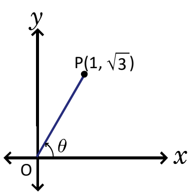
1. Las razones trigonométricas no dependen de la longitud del segmento $\overline{OP}$.
2. Las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo θ.
3. Al ángulo θ le corresponde un único valor de sen θ, un único valor de cos θ y un único valor de tan θ.
4. Las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ son funciones del ángulo θ.

De ahora en adelante se llamarán **funciones trigonométricas** a las razones seno, coseno y tangente.

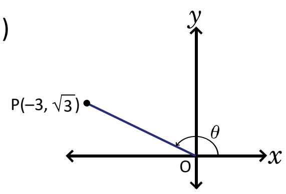
Problemas

1. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo θ a partir del punto P(x, y).

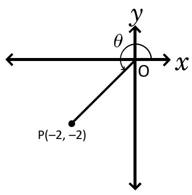
a)



b)



c)



2. Comprueba que el punto P'(cos θ, sen θ) pertenece al segmento $\overline{OP}$ en cada literal del problema 1.

Indicador de logro:

3.1 Calcula las razones trigonométricas de un ángulo determinado por un punto P en el plano cartesiano.

Secuencia:

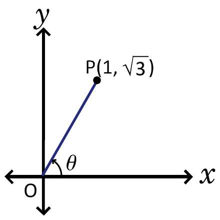
Ya se estudiaron las razones trigonométricas de un ángulo, para esta clase se establecen como funciones trigonométricas bajo la noción de correspondencia.

Propósito:

Al desarrollar el Problema inicial se probará que las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo y no de la longitud del segmento que corresponde al lado final.

Solución de problemas:

1a)



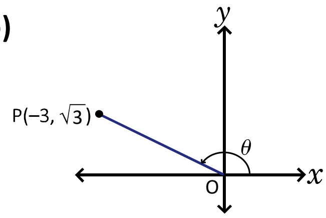
r = OP = $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

sen $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

cos $\theta = \frac{1}{2}$

tan $\theta = \sqrt{3}$

1b)



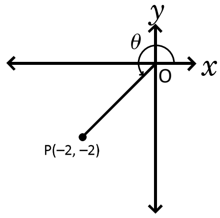
r = OP = $2\sqrt{3}$

sen $\theta = \frac{1}{2}$

cos $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

tan $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

1c)



r = OP = $2\sqrt{2}$

sen $\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

cos $\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

tan $\theta = 1$

2a) recta: $y = \sqrt{3}x$

P'(cos θ, sen θ) = $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$y = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2b) recta: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

P'(cos θ, sen θ) = $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

2c) recta: $y = x$

P'(cos θ, sen θ) = $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Lección 3

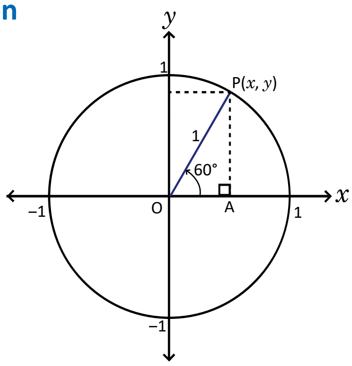
3.2 Círculo trigonométrico

Problema inicial

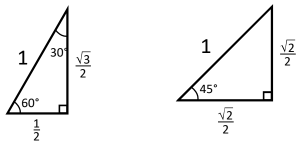
1. Dibuja en el plano cartesiano una circunferencia centrada en el origen y de radio 1. Representa el ángulo de 60° tomando como lado terminal un radio de la circunferencia.
2. Determina las coordenadas del punto P(x, y), que es la intersección de la circunferencia con el lado terminal del ángulo.

Solución

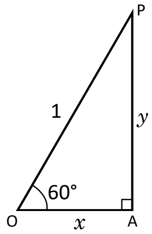
1.



Los triángulos notables a utilizar en los ángulos de referencia en el Círculo trigonométrico son:



2. En la figura se forma el triángulo rectángulo POA, P es el punto P(x, y), O es el origen y A es la proyección de P sobre el eje x.



Utilizando razones trigonométricas:

sen 60° $= \frac{y}{1} = y$ y cos 60° $= \frac{x}{1} = x$

Por lo que se tiene:

y = sen 60° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ y x = cos 60° $= \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, las coordenadas del punto P son: $\text{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

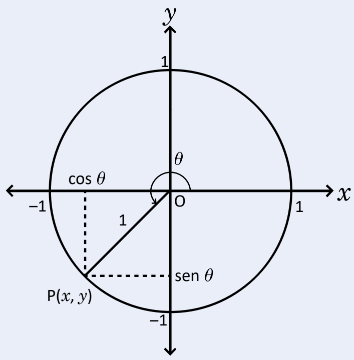
Conclusión

1. Se denomina **Círculo trigonométrico (CT)** a la circunferencia de radio 1, centrada en el origen O.

2. Las coordenadas de un punto P(x, y) en el círculo trigonométrico están determinadas por el ángulo θ dibujado en posición estándar con lado terminal $\overline{\text{OP}}$. Por definición de las razones trigonométricas de cualquier ángulo se tiene sen $\theta = \frac{y}{1} = y$ y cos $\theta = \frac{x}{1} = x$.

   Por lo tanto, P(x, y) = P(cos θ, sen θ).

3. Para todo ángulo θ es posible determinar los valores de cos θ y sen θ como coordenadas de un punto en el CT.



Problemas

1. Para cada valor de θ grafica el punto P(cos θ, sen θ) en el CT. Dibuja un círculo por cada literal.
   a) θ = 120°, θ = 210° b) θ = 30°, θ = 300° c) θ = 45°, θ = 135°
   d) θ = –45°, θ = –135° e) θ = 360°, θ = 405° f) θ = 495°, θ = 540°

2. Obtén el seno y coseno de los siguientes ángulos utilizando el círculo trigonométrico.
   a) θ = 0° b) θ = 90° c) θ = 180° d) θ = 270°

Utiliza el hecho que P(cos θ, sen θ) = P(x, y).

Unidad 5

Indicador de logro:

3.2 Grafica en el círculo trigonométrico el punto P(cos θ, sen θ) para un ángulo θ dado.

Secuencia:

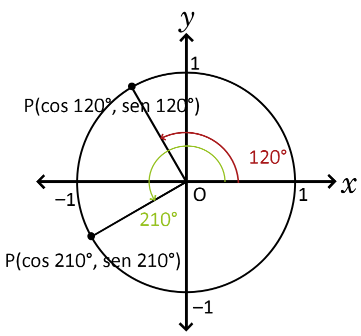
En la clase anterior se vio que las razones trigonométricas no dependen de la longitud del lado terminal de un ángulo dado, por lo que se introduce el círculo trigonométrico (círculo de radio 1 centrado en el origen) por medio del cual se describirán características de las funciones trigonométricas. Se recuerda a los estudiantes los triángulos notables para facilitar el cálculo de las razones de 30°, 45° y 60°.

Propósito:

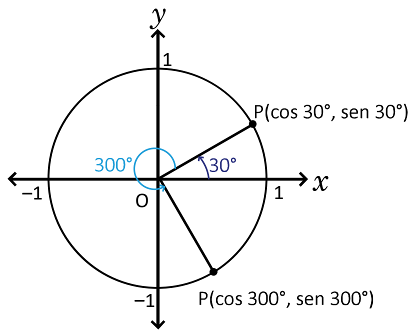
El Problema inicial permite al estudiante visualizar la posición en el plano de los valores del seno y coseno de un ángulo. En el numeral 1 de los Problemas el estudiante debe ubicar el ángulo con un transportador para luego señalar el punto solicitado, en el numeral 2 el estudiante debe reconocer las coordenadas de los puntos correspondientes a los ángulos dados.

Solución de problemas:

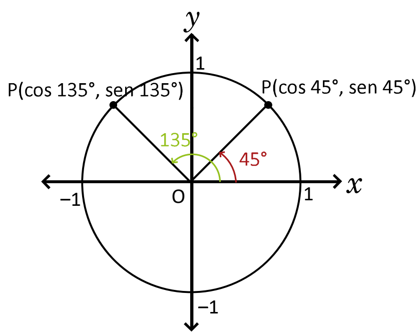
1a) $\theta = 120°$, $\theta = 210°$



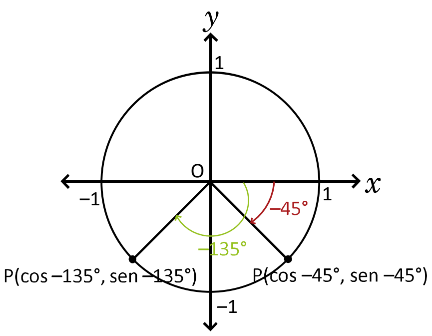
1b) $\theta = 30°$, $\theta = 300°$



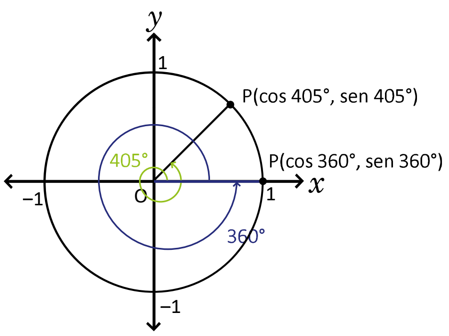
1c) $\theta = 45°$, $\theta = 135°$



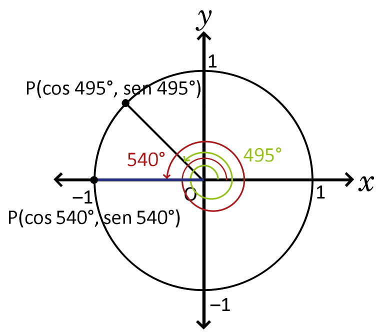
1d) $\theta = -45°$, $\theta = -135°$

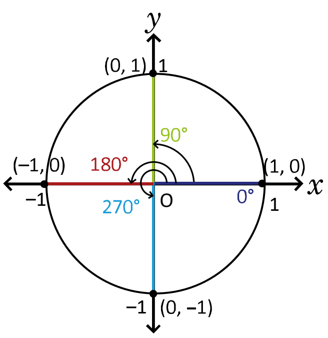


1e) $\theta = 360°$, $\theta = 405°$



1f) $\theta = 495°$, $\theta = 540°$





2a) P(cos 0°, sen 0°) = P(1, 0)
$\Rightarrow$ cos 0° = 1 y sen 0° = 0

2b) P(cos 90°, sen 90°) = P(0, 1)
$\Rightarrow$ cos 90° = 0 y sen 90° = 1

2c) P(cos 180°, sen 180°) = P(–1, 0)
$\Rightarrow$ cos 180° = –1 y sen 180° = 0

2d) P(cos 270°, sen 270°) = P(0, –1)
$\Rightarrow$ cos 270° = 0 y sen 270° = –1

3.3 Periodicidad de las funciones seno y coseno en el círculo trigonométrico

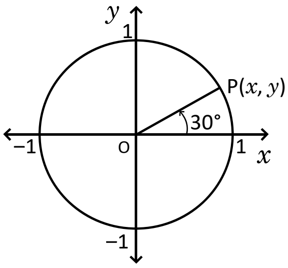
Problema inicial

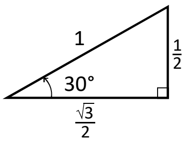
Grafica los siguientes puntos en el CT y determina sus coordenadas:

a) P(cos 30°, sen 30°)   b) P(cos 390°, sen 390°)

Solución

a)

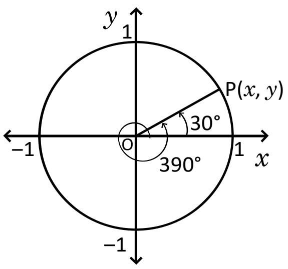




$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto, $P(\cos 30°, \text{sen } 30°) = P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b)



Se descompone el ángulo 390° = 30° + 360°.

El ángulo de referencia es 30°, así se tiene que

$\text{sen } 390° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ y $\cos 390° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto, $P(\cos 390°, \text{sen } 390°) = P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

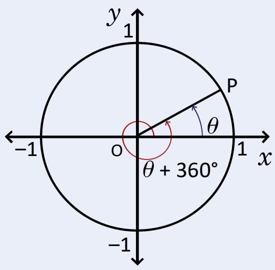
Conclusión

Sea θ un ángulo cualquiera y sea $\alpha = \theta + 360°$. Se cumple que al dibujar los ángulos θ y α, en posición estándar, tienen el mismo lado terminal en el CT.

Así se cumple que $P(\cos \theta, \text{sen } \theta) = P(\cos(\theta + 360°), \text{sen}(\theta + 360°))$.

Una función f es **periódica** si existe un valor t tal que para todo x se cumple que $f(x) = f(x + t)$. Por lo que las funciones seno y coseno son periódicas pues cumplen las siguientes propiedades:

$\cos(\theta \pm 360°) = \cos \theta$ $\text{sen}(\theta \pm 360°) = \text{sen } \theta$



Ejemplo

Determina el valor de sen(–330°).

$\text{sen}(-330°) = \text{sen}(-330° + 360°) = \text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, aplicando la periodicidad.

Por lo tanto, $\text{sen}(-330°) = \frac{1}{2}$.

Problemas

1. Utiliza la periodicidad de las funciones trigonométricas para calcular los siguientes valores:

a) sen 405°   b) cos 420°   c) sen(–300°)

d) cos(–675°)   e) sen 1080°   f) cos 630°

g) sen(–900°)   h) cos(–630°)   i) sen 540°

2. Utiliza las fórmulas del seno y coseno de una suma para demostrar las siguientes propiedades:

a) $\cos(\theta + 360°) = \cos \theta$ b) $\text{sen}(\theta + 360°) = \text{sen } \theta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$
$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$

Indicador de logro:

3.3 Utiliza la periodicidad para evaluar las funciones seno y coseno en ángulos mayores a 360° y menores a 0°.

Secuencia:

Ahora se utiliza el círculo trigonométrico para observar la periodicidad de las funciones trigonométricas seno y coseno por lo que es necesario que los estudiantes recuerden las razones de los ángulos 30°, 45° y 60°; se puede hacer referencia a la clase anterior.

Propósito:

En el Problema inicial se observa la periodicidad para un ángulo particular utilizando el recurso del círculo trigonométrico, en los Problemas se probará por medio de la fórmula de suma de ángulos.

Solución de problemas:

1a) $\text{sen } 405° = \text{sen}(45° + 360°) = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1b) $\cos 420° = \cos(60° + 360°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

1c) $\text{sen}(-300°) = \text{sen}(-300° + 360°) = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1d) $\cos(-675°) = \text{sen}(-675° + 360° \times 2) = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1e) $\text{sen } 1\,080° = \text{sen}(3(360°)) = 0$

1f) $\cos 630° = \cos 270° = 0$

1g) $\text{sen}(-900°) = \text{sen } 180° = 0$

1h) $\cos(-630°) = \cos(-630° + 360° \times 2) = \cos 90° = 0$

1i) $\text{sen } 540° = \text{sen } 180° = 0$

2a) $\cos(\theta + 360°) = \cos \theta \cos 360° - \text{sen } \theta \text{ sen } 360° = \cos \theta$

2b) $\text{sen}(\theta + 360°) = \text{sen } \theta \cos 360° + \cos \theta \text{ sen } 360° = \text{sen } \theta$

3.4 Periodicidad de la tangente en el círculo trigonométrico

Problema inicial

Para cada uno de los ángulos:

1. $\theta = 30°$ 2. $\theta = -30°$

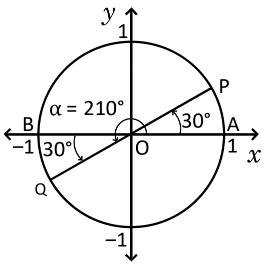
P'($-x$, $-y$) es el punto simétrico de P(x, y) respecto al origen.

Realiza lo siguiente:

a) Grafica el punto Q simétrico al punto P(cos θ, sen θ) respecto al origen y escribe sus coordenadas.
b) Determina el ángulo α en posición estándar que corresponde al punto Q.
c) Cálcula el valor de tan α.

Solución

1.



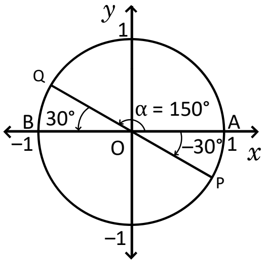
a) Se prolonga el segmento $\overline{OP}$ hasta cortar nuevamente al CT. Este punto de corte es Q pues $\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$. Sus coordenadas son Q(–cos 30°, –sen 30°) por ser simétrico al punto P.

b) Sean los puntos A(1, 0) y B(–1, 0). Por ángulos opuestos por el vértice se cumple que ∢BOQ = ∢AOP = 30°. Por lo tanto, α = 180° + 30° = 210°.

c) Se tiene el punto Q(–cos 30°, –sen 30°), entonces:

$$\tan 210° = \frac{-\text{sen } 30°}{-\cos 30°} = \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2.



a) Se grafica el punto Q y sus coordenadas son Q(–cos 30°, –sen 30°) por ser simétrico al punto P, respecto al origen.

b) Sean los puntos A(1, 0) y B(–1, 0). Por ángulos opuestos por el vértice se cumple que ∢QOB = ∢AOP = 30°. Por lo tanto, α = 180° – 30° = 150°.

c) Se tiene el punto Q(cos(–30°), –sen(–30°)), entonces:

$$\tan 150° = \frac{-\text{sen}(-30°)}{-\cos(-30°)} = \frac{\text{sen}(-30°)}{\cos(-30°)} = \tan(-30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

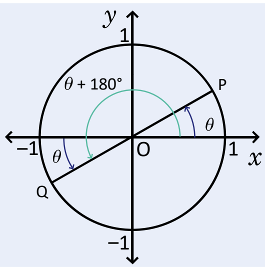
Conclusión

Sea θ un ángulo cualquiera, entonces:

$$Q(\cos(\theta + 180°), \text{sen}(\theta + 180°)) = Q(-\cos\theta, -\text{sen }\theta).$$

Así, $\tan(\theta + 180°) = \frac{-\text{sen }\theta}{-\cos\theta} = \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$.

Por lo tanto, la propiedad de **periodicidad** de la tangente está dada por la expresión: $\tan(\theta \pm 180°) = \tan\theta$.



Problemas

1. Utiliza la periodicidad de la función tangente para calcular los siguientes valores:

a) tan 225° b) tan 210° c) tan 240° d) tan 180°

e) tan(–150°) f) tan(–135°) g) tan(–120°) h) tan(–300°)

2. Utiliza la fórmula de la tangente de una suma para demostrar la propiedad $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Unidad 5

Indicador de logro:

3.4 Utiliza la periodicidad para calcular la tangente de ángulos mayores a 180° y menores a 0°.

Secuencia:

Utilizando el círculo trigonométrico se observa ahora la periodicidad de la tangente para un ángulo dado, en este punto se marca una de las diferencias entre las funciones seno y coseno y la función tangente.

Propósito:

En el Problema inicial para establecer la periodicidad de la función tangente se hace la relación entre la simetría respecto al origen para dos puntos en el círculo trigonométrico y los ángulos correspondientes a dichos puntos.

Solución de problemas:

1a) $\tan 225° = \tan(180° + 45°) = \tan 45° = 1$

1b) $\tan 210° = \tan(180° + 30°) = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1c) $\tan 240° = \tan 60° = \sqrt{3}$

1d) $\tan 180° = \tan 0° = 0$

1e) $\tan(-150°) = \tan(-150° + 180°) = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1f) $\tan(-135°) = \tan(-135° + 180°) = \tan 45° = 1$

1g) $\tan(-120°) = \tan(-120° + 180°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

1h) $\tan(-300°) = \tan(-300° + 2(180°)) = \tan 60° = \sqrt{3}$

2. $\tan(\theta + 180°) = \frac{\tan\theta + \tan 180°}{1 - \tan\theta \tan 180°} = \frac{\tan\theta + 0}{1 - (\tan\theta)(0)} = \frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta$

En el problema 1 a) se descompone el ángulo como suma de dos ángulos, uno de los cuales debe ser 180°, otra forma en que puede realizarse es calcular la tangente del ángulo restándole 180°. En los literales e) al h) se suma 180°, o un múltiplo de este, hasta obtener un ángulo cuya tangente es conocida.

Los estudiantes pueden referirse a los triángulos notables de la clase 3.2 de esta unidad.

3.5 Función seno

Problema inicial

1. Completa la siguiente caja de valores y grafica la función $y = \text{sen}\ \theta$.

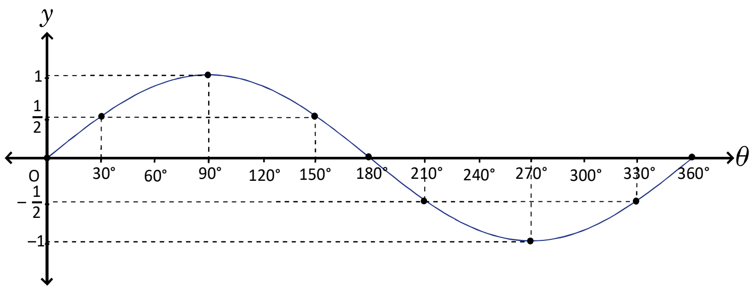
θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	300°	360°
sen θ									

2. Determina su dominio y rango.

Solución

1.

θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	–1	$-\frac{1}{2}$	0

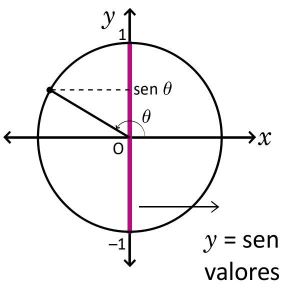


2. Dominio. La variable θ puede tomar el valor de cualquier ángulo.

Por lo tanto, el dominio de la función $y = \text{sen}\ \theta$ es $\mathbb{R}$.

Rango. Del CT se tiene que el valor del seno de cualquier ángulo puede tomar valores en el intervalo [–1, 1].

Por lo tanto, el rango de la función $y = \text{sen}\ \theta$ es [–1, 1].



y = sen θ toma valores en [–1, 1]

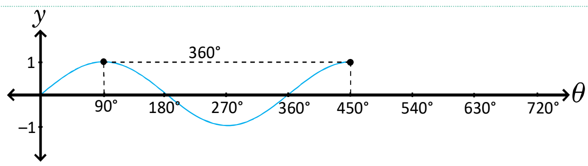
Conclusión

La función $f(\theta) = \text{sen}\ \theta$ tiene dominio $D_f = \mathbb{R}$ y rango $R_f = [-1, 1]$.

La función $f(\theta) = \text{sen}\ \theta$ es una función periódica, es decir, existe un valor α tal que $f(\theta + \alpha) = f(\theta)$ para todo valor de θ. Se llama **periodo** de la función f al valor más pequeño $\alpha > 0$ tal que $f(\theta + \alpha) = f(\theta)$. El periodo de la función seno es 360°. En general se cumple que sen $(\theta + 360°n)$ = sen θ para todo ángulo θ y para todo n entero.

Problemas

1. La siguiente figura muestra la función seno graficada en el intervalo [0°, 450°]. Utiliza la periodicidad de la función para completar la gráfica hasta el ángulo 720°.



2. Grafica la función $f(\theta) = \text{sen}\ \theta$, en el intervalo [–360°, 0°].

Indicador de logro:

3.5 Grafica la función seno utilizando la periodicidad.

Secuencia:

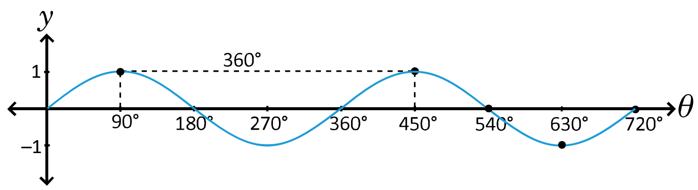
Se dibuja la gráfica de la función seno por medio de la ubicación de puntos en el plano y se estudian además su dominio y rango.

Propósito:

Los valores de los ángulos utilizados en la tabla permitirá ubicar puntos en el plano fácilmente. En los Problemas se debe utilizar la periodicidad para completar o dibujar las gráficas. El estudiante debe ser capaz de reconocer que la gráfica se "repite" en cada intervalo de 360°.

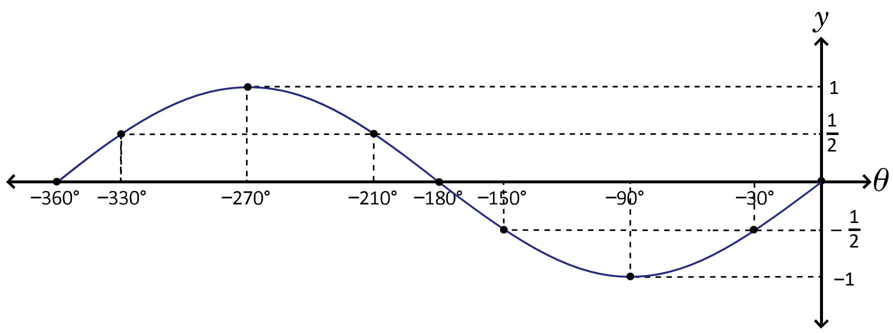
Solución de problemas:

1.



Para graficar funciones trigonométricas se sugiere marcar el eje x cada 30°, 45° o 60°.

2.



3.6 Función coseno

Problema inicial

1. Completa la siguiente caja de valores y grafica la función $y = \cos \theta$.

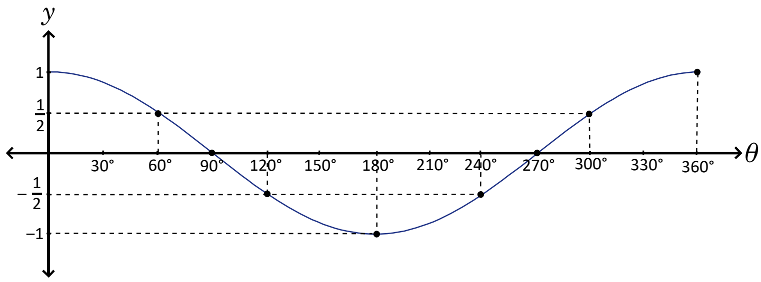
θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos \theta$									

2. Determina su dominio y rango.

Solución

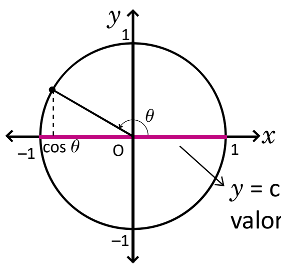
1.

θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos \theta$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1



2. Dominio. La variable θ puede tomar el valor de cualquier ángulo. Por lo tanto, el dominio de la función $y = \cos \theta$ es $\mathbb{R}$.

   Rango. Del CT se tiene que el valor del coseno de cualquier ángulo puede tomar valores en el intervalo $[-1, 1]$. Por lo tanto, el rango de la función $y = \cos \theta$ es $[-1, 1]$.



$y = \cos \theta$ toma valores en $[-1, 1]$

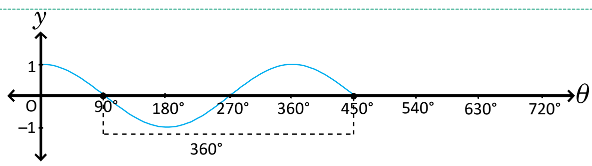
Conclusión

La función $f(\theta) = \cos \theta$ tiene dominio $D_f = \mathbb{R}$ y rango $R_f = [-1, 1]$.

La función $f(\theta) = \cos \theta$ es una función periódica. El periodo de la función coseno es 360°. En general se cumple que $\cos(\theta + 360°n) = \cos \theta$ para todo ángulo θ y para todo n entero.

Problemas

1. La siguiente figura muestra la función coseno graficada en el intervalo [0°, 450°], utiliza la periodicidad de la función para completar la gráfica hasta el ángulo 720°.



2. Grafica la función $f(\theta) = \cos \theta$, en el intervalo $[-360°, 0°]$.

Indicador de logro:

3.6 Grafica la función coseno utilizando la periodicidad.

Secuencia:

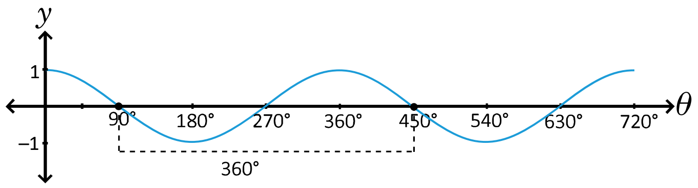
De igual forma que la función seno, se gráfica la función coseno por medio de la ubicación de puntos en el plano y se estudian además su dominio y rango.

Propósito:

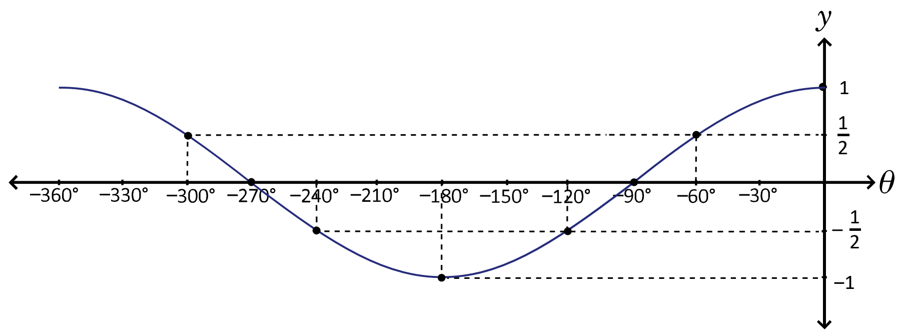
Ya que se ha dibujado la función seno, se seguirá un proceso similar para graficar la función coseno. Se debe observar la similitud y la diferencia entre ambas funciones observando sus gráficas.

Solución de problemas:

1.



2.



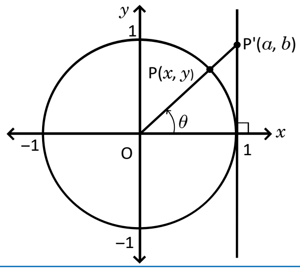
3.7 La tangente en el círculo trigonométrico

Problema inicial

Se traza la recta $x = 1$ y se dibuja un ángulo θ con lado terminal $\overline{OP}$, donde P(x, y) es un punto en el CT. Luego el segmento OP se prolonga hasta el punto P' que está en la recta $x = 1$.

1. Determina las coordenadas del punto P'(a, b) en función de θ.

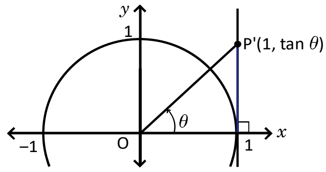
2. ¿Para cuáles valores de θ, la función $y = \tan\theta$ no está definida?



Solución

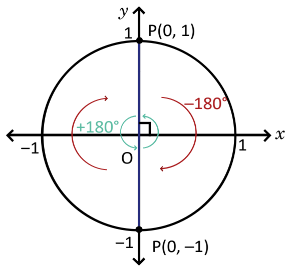
1. Se tiene que $a = 1$, ya que P' es un punto de la recta $x = 1$.
   Utilizando la definición de tangente se tiene que $\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{b}{1} = b$.

   Por lo tanto, P'(a, b) = P'(1, $\tan\theta$).



2. Como $\tan\theta = \frac{y}{x}$, no está definida si $x = 0$. Este valor corresponde a los ángulos $\theta = 90°$ y $\theta = 270°$, cuyos puntos en el CT son (0, 1) y (0, –1) respectivamente.

   También $x = 0$, si se suma o resta 180° de estos ángulos. Por lo tanto, todos estos valores se pueden escribir así: $90° + 180°n$, donde n es un número entero.

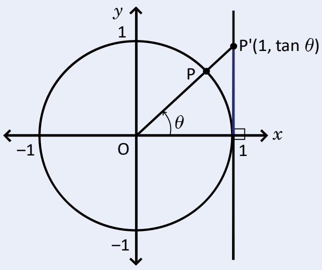


Conclusión

La tangente de un ángulo θ puede representarse en el círculo trigonométrico de la siguiente manera:

1. Se dibuja el punto P correspondiente al ángulo θ en el CT.
2. Se prolonga el segmento $\overline{OP}$ (O es el origen) hasta cortar a la recta $x = 1$.
3. Se llama P' al punto de corte. La coordenada en y de P' es igual a $\tan\theta$.

La función $\tan\theta$ no está definida para aquellos ángulos de la forma:
$\theta = 90° + 180°n$ donde n es un número entero.



Problemas

Representa el valor de la tangente de los siguientes ángulos, utilizando la figura de la conclusión:

a) $\theta = 30°$ b) $\theta = 60°$ c) $\theta = 135°$

d) $\theta = –45°$ e) $\theta = –120°$ f) $\theta = –150°$

Indicador de logro:

3.7 Representa el valor de la tangente de un ángulo utilizando el círculo trigonométrico.

Secuencia:

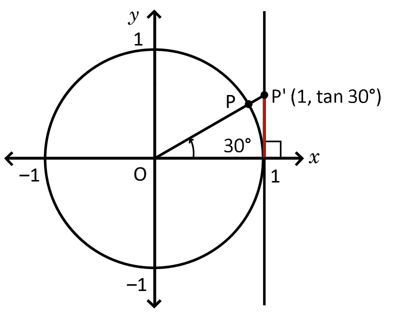
Se ha visto la representación por coordenadas de las razones seno y coseno de un ángulo en el círculo trigonométrico, ahora se representa la tangente para un ángulo dado como la coordenada de un punto en la recta $x = 1$.

Propósito:

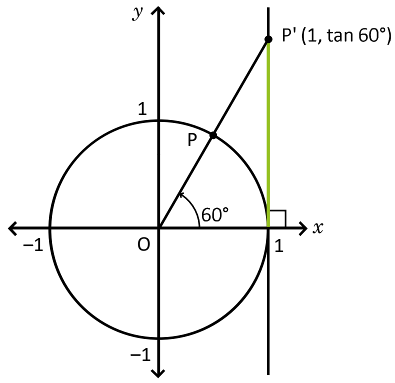
El Problema inicial permite al estudiante reconocer el valor de la tangente de un ángulo como la coordenada en y del punto P' de la figura dada y quedará definido de manera implícita el dominio de esta función.

Solución de problemas:

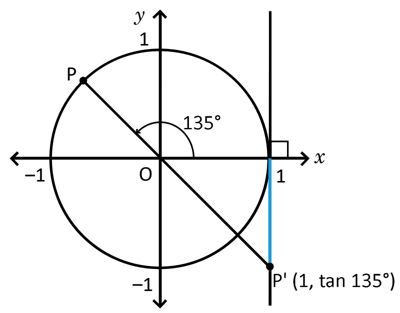
a) $\theta = 30°$



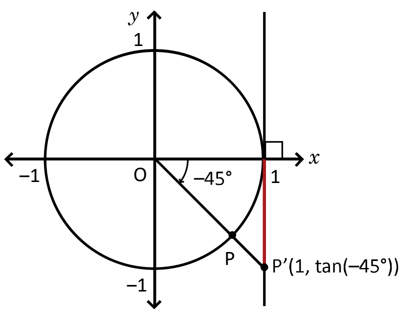
b) $\theta = 60°$



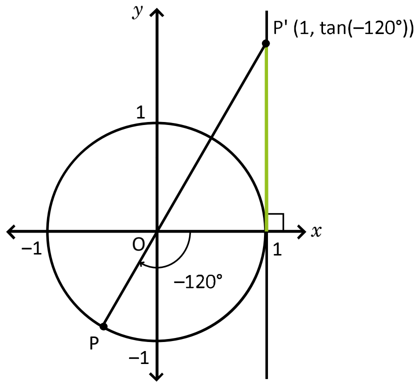
c) $\theta = 135°$



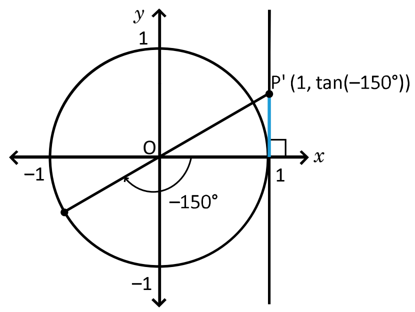
d) $\theta = -45°$



e) $\theta = -120°$



f) $\theta = -150°$



3.8 Gráfica de la función tangente

Problema inicial

1. ¿Qué sucede con el valor de tan θ, si θ toma valores cercanos a 90° y –90°? Utiliza las siguientes tablas.

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ					

θ	–88°	–89°	–89.5°	–89.9°	–89.99°
tan θ					

2. Completa la siguiente tabla y grafica la función y = tan θ en el intervalo]–90°, 90°[.

θ	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°
tan θ							

3. Determina el dominio de la función y = tan θ.
4. ¿Cuál es el rango de la función y = tan θ?

Solución

1. Para ángulos cercanos a 90°.

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ	28.6...	57.2...	114.5...	572.9...	5 729.5...

El valor de tan θ se vuelve cada vez mayor cuando θ toma valores muy cercanos a 90°.

Para ángulos cercanos a –90°.

θ	–88°	–89°	–89.5°	–89.9°	–89.99°
tan θ	–28.6...	–57.2...	–114.5...	–572.9...	–5 729.5...

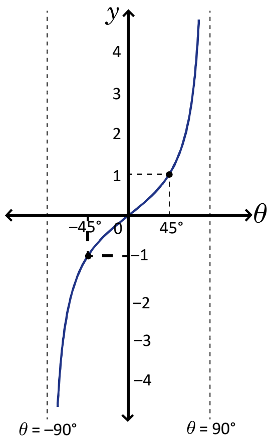
El valor de tan θ se vuelve cada vez menor cuando θ toma valores muy cercanos a –90°.

Se observa que θ = 90° y θ = –90° son asíntotas verticales.

2. La tabla queda de la siguiente manera:

θ	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°
tan θ	–1.7...	–1	–0.5...	0	0.5...	–1	1.7...

Al graficar se obtiene la figura de la derecha.



3. En la clase anterior se vio que la función y = tan θ, no está definida para los valores θ = 90° + 180°n, con n entero. Por lo tanto, el dominio es: $\mathbb{R}$ – {90° + 180° n | n es entero}.

4. A partir de la gráfica se obtiene que el rango de y = tan θ es $\mathbb{R}$.

Conclusión

La función $f(\theta)$ = tan θ tiene como dominio el conjunto $\mathbb{R}$ – {90° + 180°n | n es entero} y su rango es $\mathbb{R}$. Además, las rectas θ = 90° + 180°n, donde n es un número entero, son asíntotas verticales de la gráfica de la función tangente.

La función $f(\theta)$ = tan θ es una función periódica. El periodo de la función tangente es 180°, y por tanto, en general, tan (θ + 180°n) = tan θ para todo n entero.

Problemas

Utiliza la periodicidad de la tangente para graficar la función $f(\theta)$ = tan θ en el intervalo]–270°, 270°[.

Unidad 5

Indicador de logro:

3.8 Grafica la función tangente utilizando la periodicidad.

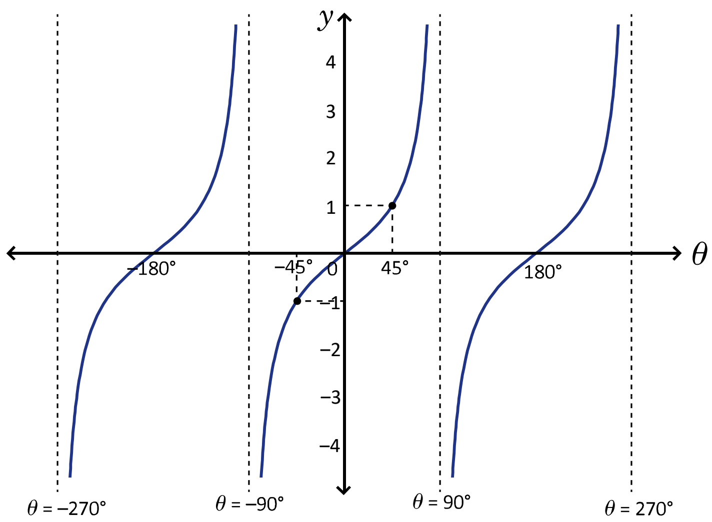
Secuencia:

Ahora se gráfica la función tangente y se describen sus características; en clases anteriores se estableció la diferencia respecto a la periodicidad de las funciones seno y coseno.

Propósito:

El Problema inicial describe algunas características de la función tangente como las asíntotas que posee, así como su dominio, que se obtiene con lo visto en la clase anterior, y el rango, que se obtiene a partir de la observación de la gráfica.

Solución de problemas:



3.9 Periodo y amplitud de las funciones trigonométricas

Problema inicial

1. Grafica en un mismo plano cartesiano las funciones $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = 2sen θ en el intervalo [0°, 360°].

θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ					
2sen θ					

2. a) Grafica la función $g_1(\theta)$ = cos θ en el intervalo [0°, 360°] luego, grafica $g_2(\theta)$ = cos 2θ en el intervalo [0°, 180°], utiliza la siguiente tabla.

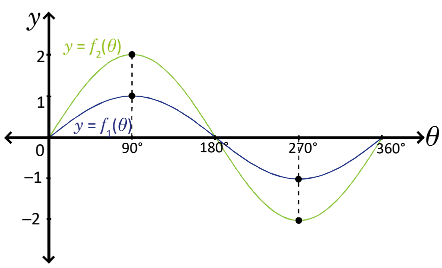
θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ					
cos 2θ					

b) Comprueba que $g_2(\theta + 180°) = g_2(\theta)$ y completa la gráfica hasta el ángulo 360°.

Solución

1. Completando la tabla.

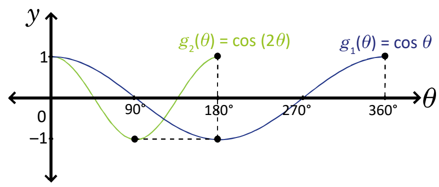
θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ	0	1	0	–1	0
2sen θ	0	2	0	–2	0



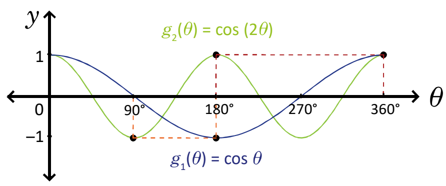
Cada punto de $f_2(\theta)$ = 2sen θ se obtiene multiplicando por 2 la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

2. a) Completando la tabla.

θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ	0°	90°	180°	270°	360°
cos 2θ	1	0	–1	0	1



b) $g_2(\theta + 180°) = \cos(2\theta + 360°) = \cos 2\theta = g_2(\theta)$



Cada punto de la gráfica de $g_2(\theta)$ = cos 2θ se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ la coordenada en θ de los puntos de la gráfica de $g_1(\theta)$ = cos θ.

Definición

Se llama **amplitud** de la función trigonométrica $f(\theta)$ = A sen θ al valor |A| y es el máximo valor que puede tomar la función. En este caso, el rango de la función es [–|A|, |A|]. Esta función se obtiene multiplicando por A todas las coordenadas en y de la función sen θ.

La función $f(\theta)$ = sen Bθ, donde B es un número real diferente de 0, cumple que sen (Bθ + 360°) = sen Bθ $\Leftrightarrow$ sen $B\left(\theta + \frac{360°}{B}\right)$ = sen Bθ $\Leftrightarrow f\left(\theta + \frac{360°}{B}\right) = f(\theta)$.

Así, el **periodo** de la función $f(\theta)$ = sen Bθ es $\frac{360°}{|B|}$ (se utiliza |B|, porque el periodo es positivo).

Estas definiciones también se aplican a las funciones $f(\theta)$ = Acos θ y $f(\theta)$ = cos Bθ.

Problemas

Grafica, en el intervalo [0, 360°], las siguientes funciones utilizando la amplitud y periodicidad.

a) $f(\theta)$ = 3sen θ b) $f(\theta)$ = –2cos θ c) $f(\theta)$ = sen 3θ d) $f(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}$

Indicador de logro:

3.9 Grafica funciones trigonométricas del tipo y = Asen θ y y = sen Bθ.

Secuencia:

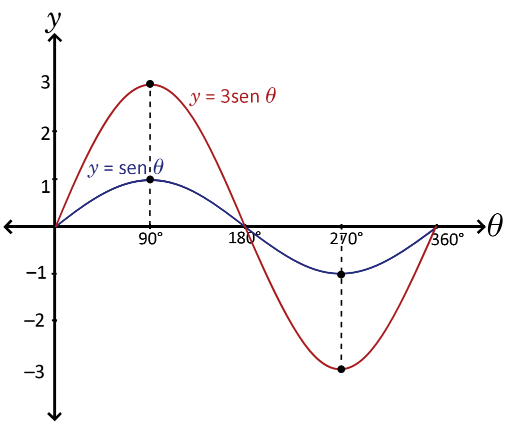
En primer año se estudió el comportamiento de varias funciones en las que la variable o la función misma son multiplicadas por un número real. Ahora, se estudia el efecto que tiene esto en las funciones trigonométricas en relación al periodo y el rango.

Propósito:

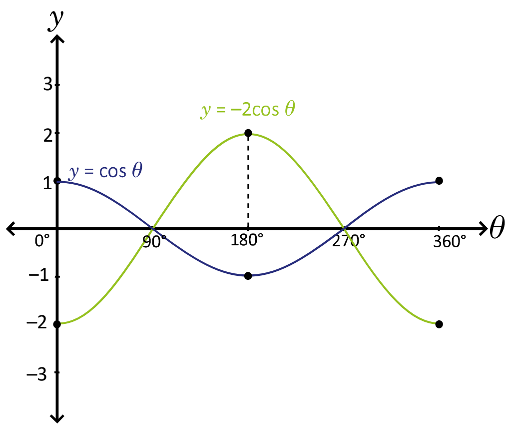
Así como se estudiaron los desplazamientos se grafican las funciones ubicando puntos en el plano y se realiza una comparación entre estas para observar cómo cambia el periodo y la amplitud. En los Problemas debe verificarse la utilización de la Conclusión.

Solución de problemas:

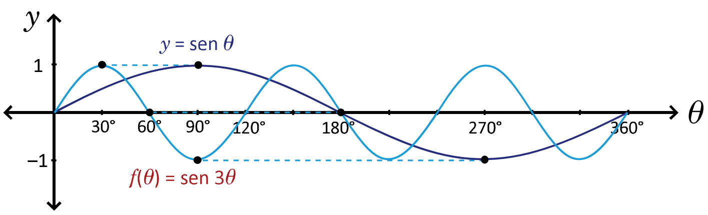
a) $f(\theta)$ = 3sen θ



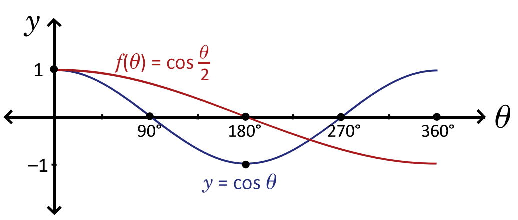
b) $f(\theta)$ = –2cos θ



c) $f(\theta)$ = sen 3θ



d) $f(\theta) = \cos \frac{\theta}{2}$



El estudiante también puede presentar su gráfica sin dibujar la función base.

3.10 Desplazamiento vertical de las funciones trigonométricas

Problema inicial

En cada literal grafica las funciones en un mismo plano cartesiano.

a) $f_1(\theta) = \text{sen}\,\theta$ y $f_2(\theta) = \text{sen}\,\theta + 1$; [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ + 1						

b) $g_1(\theta) = \text{sen}\,\theta$ y $g_2(\theta) = \text{sen}\,\theta - 1$; [0°, 450°]

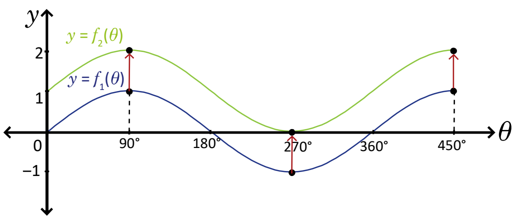
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ – 1						

Solución

Observa que las funciones sen(θ + 1°) y sen θ + 1 son distintas.

a) Se completa la tabla.

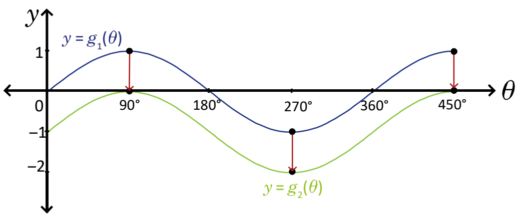
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen (θ) + 1	1	2	1	0	1	2



Cada punto de $f_2(\theta) = \text{sen}\,\theta + 1$ es un desplazamiento de 1 unidad hacia arriba de un punto de la gráfica de $f_1(\theta) = \text{sen}\,\theta$.

b) Se completa la tabla.

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ – 1	–1	0	–1	–2	–1	0



Cada punto de $g_2(\theta) = \text{sen}\,\theta - 1$ es un desplazamiento de 1 unidad hacia abajo de un punto de la gráfica de $g_1(\theta) = \text{sen}\,\theta$.

Conclusión

La gráfica de $f(\theta) = \text{sen}\,\theta + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la gráfica de la función sen θ.

- Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo.

Dada la función $f(\theta) = \text{sen}\,\theta + k$ con dominio $\mathbb{R}$, su rango es el intervalo $[-1 + k, 1 + k]$.

Estas reglas también se aplican a la función $f(\theta) = \cos\theta + k$ como desplazamiento vertical de la función cos θ.

En general la gráfica de $f(x) + k$ es un desplazamiento vertical de la gráfica de $f(x)$: hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones, en el intervalo [0, 360°], utilizando los desplazamientos:

a) $f(\theta) = \cos\theta + 1$

b) $f(\theta) = \text{sen}\,\theta + 2$

c) $f(\theta) = \cos\theta - 2$

d) $f(\theta) = \text{sen}\,\theta - 3$

147

Unidad 5

Indicador de logro:

3.10 Grafica funciones trigonométricas del tipo y = sen $\theta + k$.

Secuencia:

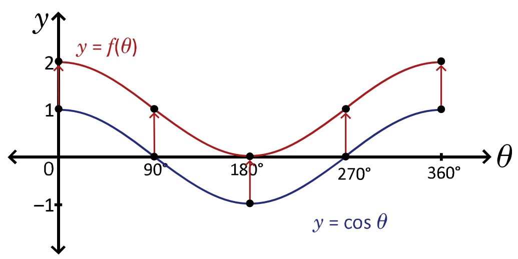
En esta clase se grafican aquellas funciones que son desplazamientos verticales de la función seno y coseno y se describe también el rango de la función desplazada.

Posibles dificultades:

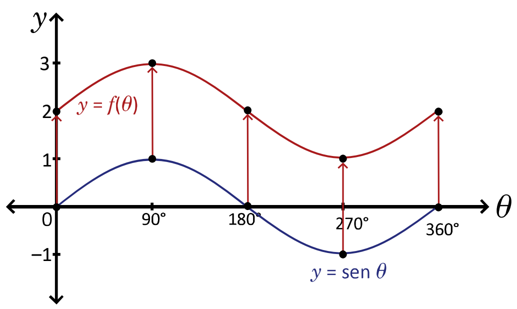
Se debe tener claro que el valor de k se suma después de calcular el valor de sen θ, en esto radica el hecho de que la función y = sen $\theta + k$, se puede graficar como un desplazamiento vertical.

Solución de problemas:

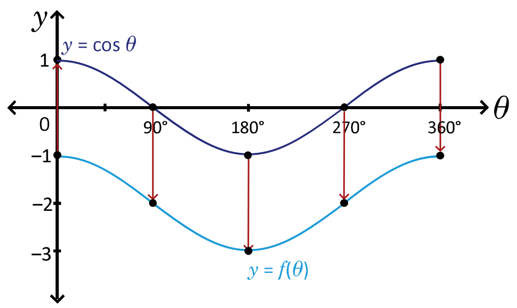
a) $f(\theta) = \cos\theta + 1$



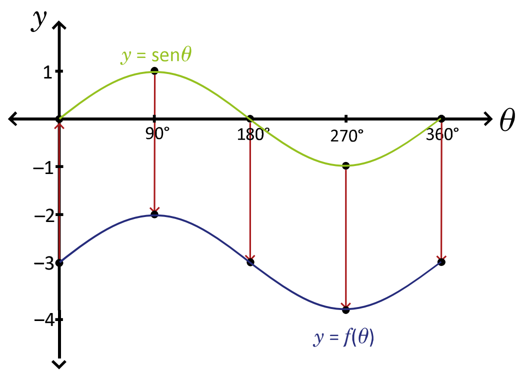
b) $f(\theta)$ = sen $\theta + 2$



c) $f(\theta) = \cos\theta - 2$



d) $f(\theta)$ = sen $\theta - 3$



3.11 Desplazamiento horizontal de las funciones trigonométricas

Problema inicial

En los siguientes literales grafica las funciones en un mismo plano cartesiano, en el intervalo dado.

a) $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = sen$(\theta - 90°)$; [0°,450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ						
sen$(\theta - 90°)$						

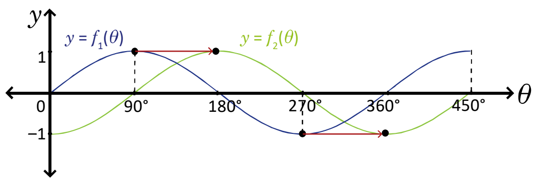
b) $g_1(\theta)$ = cos θ y $g_2(\theta)$ = cos$(\theta + 90°)$; [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°
cos θ							
cos$(\theta + 90°)$							

Solución

a) Se completa la tabla.

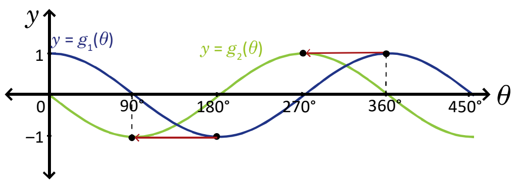
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ	0	1	0	–1	0	1
sen$(\theta - 90°)$	–1	0	1	0	–1	0



Cada punto de $f_2(\theta)$ = sen$(\theta - 90°)$ es un desplazamiento de 90° hacia la derecha de un punto de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

b) Se completa la tabla.

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
cos θ	1	0	–1	0	1	0
cos$(\theta + 90°)$	0	–1	0	1	0	–1



Cada punto de $g_2(\theta)$ = cos$(\theta + 90°)$ es un desplazamiento de 90° hacia la izquierda de un punto de la gráfica de $g_1(\theta)$ = cos θ.

Conclusión

La gráfica de $f(\theta)$ = sen$(\theta - \alpha)$ es un desplazamiento horizontal de α unidades de la gráfica de sen θ.

- Si $\alpha > 0$ el desplazamiento es hacia la derecha.
- Si $\alpha < 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda.

Estas reglas también se aplican a la función $f(\theta)$ = cos$(\theta - \alpha)$ como desplazamiento de la función cos θ.

En general, la gráfica de $f(x - h)$ es un desplazamiento horizontal de h unidades de la gráfica de $f(x)$:

- Hacia la derecha si $h > 0$.
- Hacia la izquierda si $h < 0$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones, en el intervalo [0, 360°], utilizando los desplazamientos:

a) $f(\theta)$ = cos$(\theta - 45°)$

b) $f(\theta)$ = cos$(\theta - 90°)$

c) $f(\theta)$ = sen$(\theta - (-30°))$

d) $f(\theta)$ = sen$(\theta + 90°)$

Indicador de logro:

3.11 Grafica funciones trigonométricas del tipo y = sen(θ – α).

Secuencia:

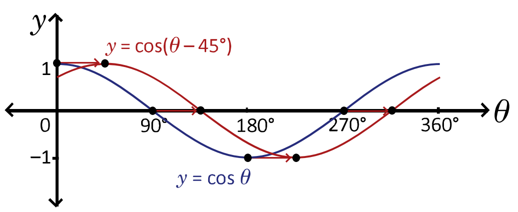
Ahora se grafican las funciones que son desplazamientos horizontales de alguna de las funciones seno o coseno. Hasta aquí se han tratado por separado los desplazamientos, el periodo y la amplitud.

Propósito:

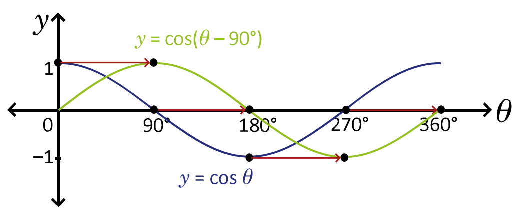
El estudiante debe ser capaz de dibujar la función seno y coseno como gráfica auxiliar para luego dibujar la gráfica desplazada. Dependiendo del dominio que tenga el estudiante podrá dibujar la gráfica sin necesidad de la auxiliar.

Solución de problemas:

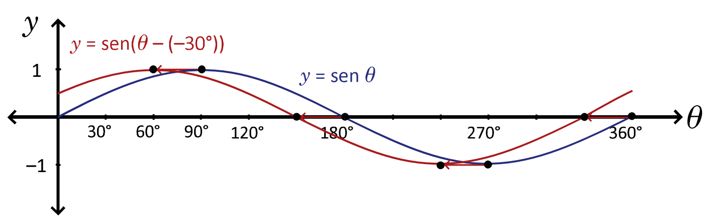
a) $f(\theta)$ = cos(θ – 45°)



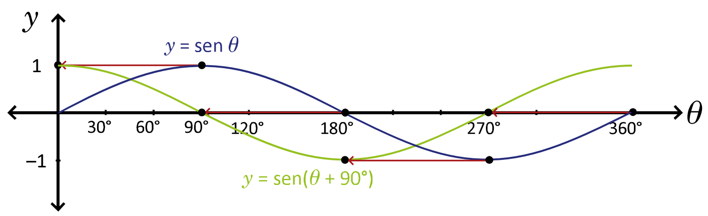
b) $f(\theta)$ = cos(θ – 90°)



c) $f(\theta)$ = sen(θ – (–30°))



d) $f(\theta)$ = sen(θ + 90°)



Lección 3

3.12 Forma general de las funciones trigonométricas

Problema inicial

Grafica la función $f(\theta) = 2\text{sen}\,(3\theta + 90°)$ en el intervalo [0°, 360°] realizando los siguientes pasos:

1. Considera las funciones $f_1(\theta) = \text{sen}\,3\theta$, $f_2(\theta) = 2\text{sen}\,3\theta$ y $f(\theta) = 2\text{sen}(3\theta + 90°)$, luego completa la Tabla 1.
2. Completa la Tabla 2.
3. Grafica en el mismo plano cartesiano las funciones $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$, en el intervalo [0, 120°].
4. Utiliza la periodicidad para completar la gráfica de $f_2(\theta)$ hasta el intervalo [0°, 360°].
5. Grafica en otro plano cartesiano las funciones $f_2(\theta)$ y $f(\theta)$. Utiliza la Tabla 2.

Tabla 1

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$					
$f_2(\theta)$					

Tabla 2

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$					
$f(\theta)$					

Observa que
$f(\theta) = 2\text{sen}(3\theta + 90°) = 2\text{sen}\,3(\theta - (-30°))$.

Solución

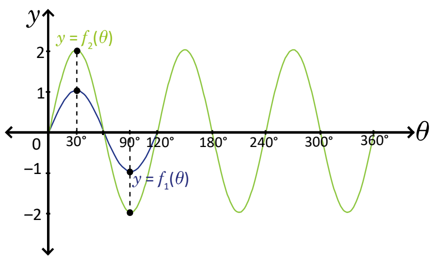
1. Se completa la tabla 1.

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$	0	1	0	–1	0
$f_2(\theta)$	0	2	0	–2	0

2. Se completa la tabla 2.

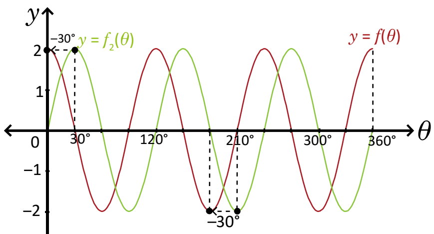
θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$	0	2	0	–2	0
$f(\theta)$	2	0	–2	0	2

3 y 4. Se grafican las funciones f_1 y f_2.



El periodo de f_1 es $\frac{360°}{3} = 120°$.

5. Se grafican las funciones $f_2(\theta) = 2\text{sen}\,3\theta$ y $f(\theta) = 2\text{sen}\,3(\theta - (-30°))$.



La gráfica de $f(\theta)$ es un desplazamiento de 30° hacia la izquierda de la gráfica de $f_2(\theta) = 2\text{sen}\,3\theta$.

Conclusión

Una función de la forma $f(\theta) = A\text{sen}\,B(\theta - \alpha)$, con $A \neq 0$ y $B \neq 0$, tiene las siguientes características:

1. Tiene amplitud $|A|$, por lo que su rango es $[-|A|, |A|]$.
2. Tiene periodo $\frac{360°}{|B|}$ y es un desplazamiento horizontal de α unidades respecto a la función $A\text{sen}\,B\theta$.

Para graficar una función de la forma $f(\theta) = A\text{sen}\,B(\theta - \alpha)$ se pueden realizar los siguientes pasos:

1. Se grafica la función $\text{sen}\,B\theta$ en el intervalo $\left[0, \frac{360°}{|B|}\right]$.
2. Se grafica la función $A\text{sen}\,B\theta$ y se utiliza la periodicidad para completar el intervalo en el que se graficará.
3. Se efectúa el desplazamiento horizontal de α unidades para obtener $f(\theta) = A\text{sen}\,B(\theta - \alpha)$.

Problemas

Grafica cada función, en el intervalo [0, 360°] utilizando los desplazamientos, amplitud y periodo:

a) $f(\theta) = 2\text{sen}(\theta - 30°)$ b) $f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°)$ c) $f(\theta) = -\text{sen}(4\theta + 240°)$

Indicador de logro:

3.12 Grafica las funciones trigonométricas del tipo y = Asen B(θ – α).

Secuencia:

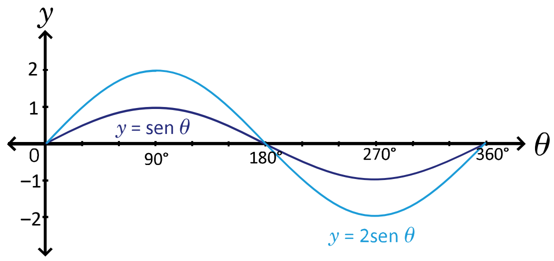
En esta clase se grafican las funciones trigonométricas en las que es necesario identificar amplitud, el periodo y desplazamientos verticales u horizontales.

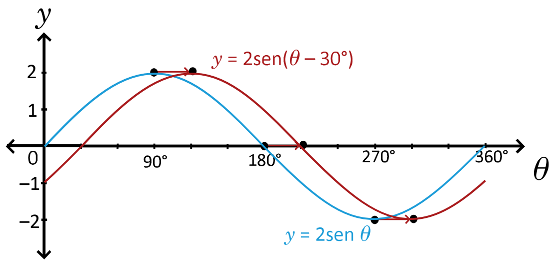
Propósito:

En la Solución se han utilizado dos dibujos con el fin de no saturar la gráfica, cada estudiante evaluará si este proceso le es factible. En el caso que dibujen todas las gráficas en un mismo plano debe resaltarse con color la gráfica de la función dada.

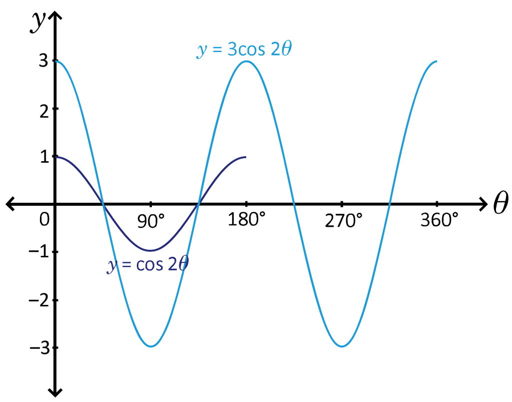
Solución de problemas:

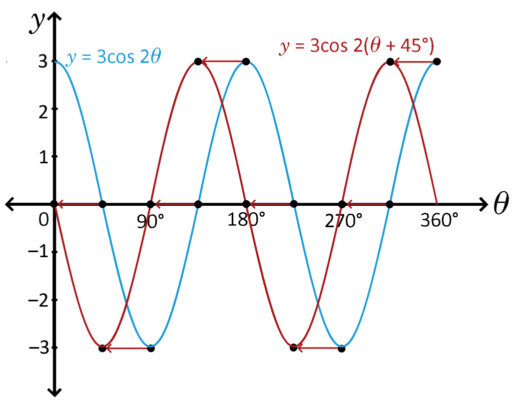
a) $f(\theta) = 2\text{sen}(\theta - 30°)$





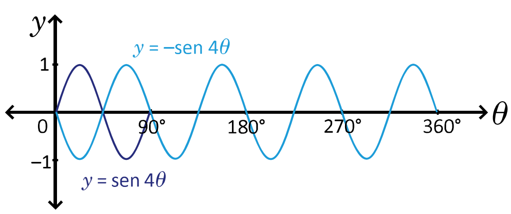
b) $f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°)$

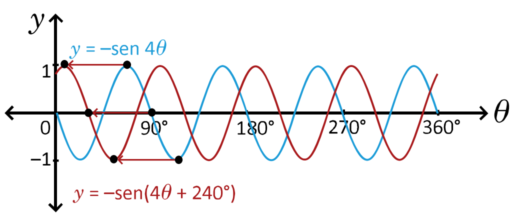




En b) se puede graficar la función que se obtiene aplicando identidades trigonométricas.
$f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°) = 3\text{sen}(2\theta + 90°) = –3\text{sen } 2\theta$

c) $f(\theta) = –\text{sen}(4\theta + 240°) = –\text{sen } 4(\theta + 60°) = –\text{sen } 4(\theta – (–60°))$





El literal c) se puede graficar hasta 180° y utilizar marcas en el eje x cada 30° para visualizar el desplazamiento de 60° a la izquierda utilizando dos cuadrados del cuaderno.

3.13 Sistema circular de ángulos

Problema inicial

1. Encuentra la longitud del arco del CT cuyo ángulo central es 45°.

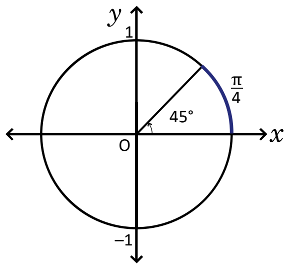
2. Encuentra el ángulo central del CT cuya longitud es $\frac{\pi}{6}$.

En una circunferencia de radio r, la longitud del arco subtendido por un ángulo central θ está dado por $2\pi r\frac{\theta}{360^\circ}$.

Solución

1. El radio del CT es $r = 1$. La longitud del arco subtendido por el ángulo de 45° está dado por: $2\pi(1)\frac{45^\circ}{360^\circ} = \overset{1}{\cancel{2}}\pi\,\frac{1}{\underset{4}{\cancel{8}}}$.

   Por lo tanto, la longitud del arco es $\frac{\pi}{4}$.



2. Sea α el ángulo central tal que $2\pi\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}$.

   Se despeja $\alpha = \frac{\pi}{6}\left(\frac{360^\circ}{2\pi}\right) = 30^\circ$.

   Por lo tanto, el ángulo que subtiende un arco de longitud $\frac{\pi}{6}$ es 30°.

Definición

En el círculo trigonométrico se define: **1 radián** como el ángulo que subtiende un arco de longitud 1.

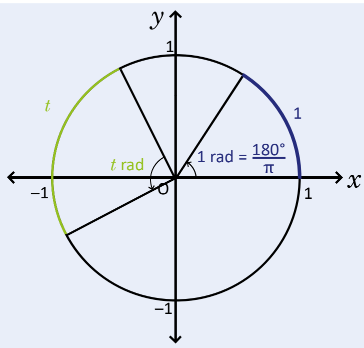
Así t **radianes** es el ángulo que subtiende un arco de longitud t y se representa como t rad (o solo t).

El ángulo θ, con $0 \leq \theta \leq 360^\circ$, subtiende un arco de longitud $\frac{\theta}{180^\circ}\pi$, entonces el ángulo θ, con $0 \leq \theta \leq 360^\circ$, tiene un valor de $\frac{\theta}{180^\circ}\pi$ rad.

Esta definición se extiende a cualquier ángulo de la siguiente manera: si θ es un ángulo cualquiera, entonces su valor en radianes está dado por

$$\frac{\theta}{180^\circ}\pi \text{ rad.}$$

Si se tiene la medida de un ángulo t en radianes, su valor θ en grados está dado por $\theta = \frac{180^\circ}{\pi}t$.



El sistema en el que se escriben los ángulos en grados se denomina **sistema sexagesimal de ángulos**.

Ejemplo

a) Expresar en radianes el ángulo 120°.

$$120^\circ = \frac{120^\circ}{180^\circ}\pi \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

b) Escribe en grados el valor de $\frac{\pi}{5}$.

$$\frac{\pi}{5} = \frac{180^\circ}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{5}\right) = 36^\circ$$

Problemas

1. Se tienen los siguientes ángulos en grados, determina su valor en radianes:

a) 60°	b) 15°	c) 10°	d) 270°
e) 135°	f) 150°	g) 210°	h) 315°

2. Se tiene los siguientes ángulos en radianes, determina su valor en grados:

a) 2π rad	b) π rad	c) $\frac{\pi}{2}$ rad	d) $\frac{5\pi}{12}$ rad
e) 1 rad	f) $\frac{2\pi}{9}$ rad	g) $\frac{5\pi}{4}$ rad	h) $\frac{9\pi}{5}$ rad

Indicador de logro:

3.13 Convierte ángulos del sistema sexagesimal al sistema circular y viceversa.

Secuencia:

El estudio de las funciones trigonométricas se ha realizado utilizando los valores de los ángulos en el sistema sexagesimal, pues el estudiante está acostumbrado a este sistema con el cual se ha trabajado desde la educación básica, además se facilita la construcción de las gráficas ya que se evita el uso de fracciones. La introducción del sistema circular o radial se realiza en esta clase.

Propósito:

En esta clase se relaciona la longitud de un arco de círculo con el ángulo escrito en grados, de esta forma se introduce el radián y se explica la conversión de valores en el sistema sexagesimal y el radial.

Solución de problemas:

1a) $60° = \frac{60°}{180°}\pi = \frac{\pi}{3}$ rad

1b) $15° = \frac{15°}{180°}\pi = \frac{\pi}{12}$ rad

1c) $10° = \frac{\pi}{18}$ rad

1d) $270° = \frac{3\pi}{2}$ rad

1e) $135° = \frac{3\pi}{4}$ rad

1f) $150° = \frac{5\pi}{6}$ rad

1g) $210° = \frac{7\pi}{6}$ rad

1h) $315° = \frac{7\pi}{4}$ rad

2a) 2π rad $= 2\pi\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 360°$

2b) π rad $= 180°$

2c) $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$

2d) $\frac{5\pi}{12}$ rad $= 75°$

2e) 1 rad $= \frac{180°}{\pi} \approx 57.3°$

2f) $\frac{2\pi}{9}$ rad $= 40°$

2g) $\frac{5\pi}{4}$ rad $= 225°$

2h) $\frac{9\pi}{5}$ rad $= 324°$

3.14 Practica lo aprendido

1. Dibuja el círculo trigonométrico y grafica el punto P(cos θ, sen θ) para cada valor de θ.
   a) $\theta = 60°$ b) $\theta = 150°$ c) $\theta = 240°$ d) $\theta = 330°$

2. Utiliza la representación del seno y coseno en el CT para demostrar la identidad $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

3. Utiliza la periodicidad de las funciones trigonométricas para calcular los siguientes valores.
   a) sen 750° b) cos 765° c) tan 600°
   d) sen(–660°) e) cos(–690°) f) tan(–495)

4. Realiza lo que se pide:
   a) Demuestra que la función f: $[-90°, 90°] \to [-1, 1]$; $\theta \to \text{sen}\,\theta$, es biyectiva.
   b) Restringe la función coseno para que sea biyectiva. Utiliza la gráfica de la clase 3.6.

5. Utiliza la representación de la función tangente en el CT para demostrar la identidad $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

6. Realiza los siguientes problemas:
   a) Traza la recta $y = 1$, que es tangente al CT en el punto (0,1).
   b) Sea θ un ángulo en el primer cuadrante. Dibuja los puntos R(0,1), P(cos θ, sen θ) y Q el punto de intersección de la recta $y = 1$ con la prolongación del segmento OP.
   c) Demuestra que $OQ = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$.
   d) Determina las coordenadas del punto Q(a, b)
   e) Demuestra que $1 + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = \dfrac{1}{\text{sen}^2\theta}$.

7. Determina el periodo de las siguientes funciones y grafícalas en el intervalo dado.
   a) $\tan(\theta - 90°)$; [0, 360°] b) $\tan 2\theta$; [0, 270°]

8. Determina el periodo y la amplitud de las siguientes funciones, luego grafícalas en el intervalo dado.
   a) $f(\theta) = \text{sen}\,5\theta$; [0°, 360°] b) $f(\theta) = \cos\dfrac{\theta}{3}$; [0°, 1 080°]
   c) $f(\theta) = 4\cos\theta$; [0°, 360°] d) $f(\theta) = \dfrac{1}{2}\text{sen}\,\theta$; [0°, 360°]

9. Grafica las siguientes funciones utilizando desplazamientos, amplitud y periodo. Además determina su dominio y rango.
   a) $f(\theta) = 2\cos(6\theta - 120°)$ b) $f(\theta) = 4\text{sen}(2\theta + 120°)$
   c) $f(\theta) = -2\cos(4\theta + 180°)$ d) $f(\theta) = \dfrac{1}{2}\text{sen}(3\theta - 225°)$

10. Reescribe los ángulos en el sistema sexagesimal al sistema circular y viceversa.
    a) 20° b) 50° c) 140° d) 345°
    e) 500° f) –150° g) $\frac{\pi}{8}$ rad h) $\frac{4\pi}{9}$ rad
    i) $\frac{5\pi}{3}$ rad j) $\frac{\pi}{180}$ rad k) 3π rad l) $-\frac{\pi}{2}$ rad

11. Si un arco circular de 9 centímetros subtiende el ángulo central de 45° en una circunferencia, ¿cuál es la longitud del radio de la circunferencia?

12. El radio de una circunferencia es 5 cm, determina la medida del ángulo central, en radianes, que subtiende un arco de 12 cm.

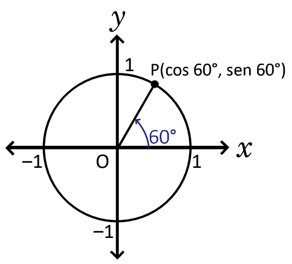
Unidad 5

Indicador de logro:

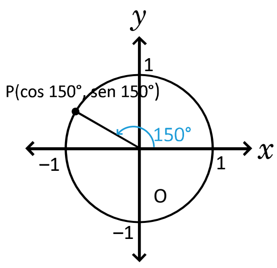
3.14 Resuelve problemas utilizando funciones trigonométricas.

Solución de problemas:

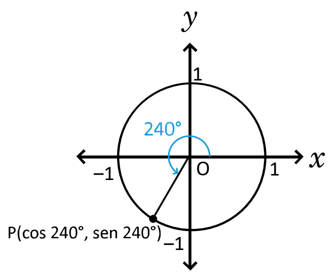
1a) θ = 60°



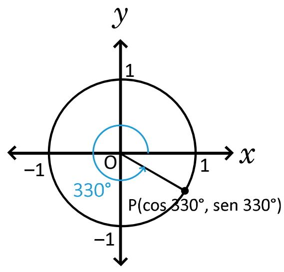
1b) θ = 150°



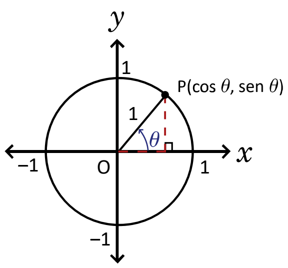
1c) θ = 240°



1d) θ = 330°



2.



d(P, O) = 1, para cada valor de θ

$\Rightarrow \sqrt{(\text{sen }\theta - 0)^2 + (\cos\theta - 0)^2} = 1$

$\Rightarrow (\text{sen }\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$

$\Rightarrow \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$

3a) sen 750° = sen 30° = $\frac{1}{2}$

3b) cos 765° = cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

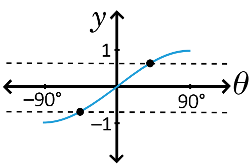
3c) tan 600° = tan 60° = $\sqrt{3}$

3d) sen(–660°) = sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3e) cos (–690°) = cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3f) tan (–495°) = tan 45° = 1

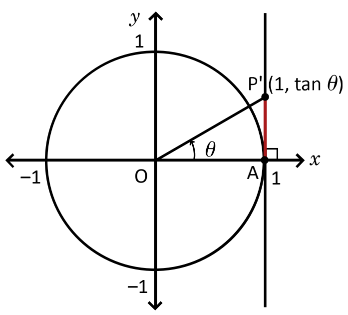
4a)



Al trazar rectas horizontales sobre la gráfica de f se obtiene un único punto de intersección por lo que f es inyectiva. Además R_f = [–1, 1] por lo que f es sobreyectiva. Por lo tanto, f es biyectiva.

4b) g: [0, 180°] ⟶ [–1, 1]; x ⟶ cos x

5.



Si se supone que –90° < θ < 90° $\Rightarrow \cos\theta = \frac{\text{OA}}{\text{OP'}} = \frac{1}{\text{OP'}} \Rightarrow \text{OP'} = \frac{1}{\cos\theta}$

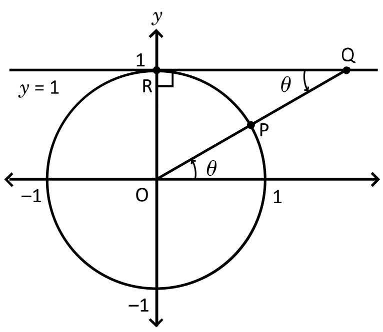
$\Rightarrow d(\text{P', O}) = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \sqrt{(1-0)^2 + (\tan\theta - 0)^2} = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

Luego por la periodicidad de la tangente y la identidad cos(θ + 180°) = –cos θ,

para todo $\theta \neq 90° + 180°n$, donde n es un número entero, se cumple que

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$.

6a) y 6b)



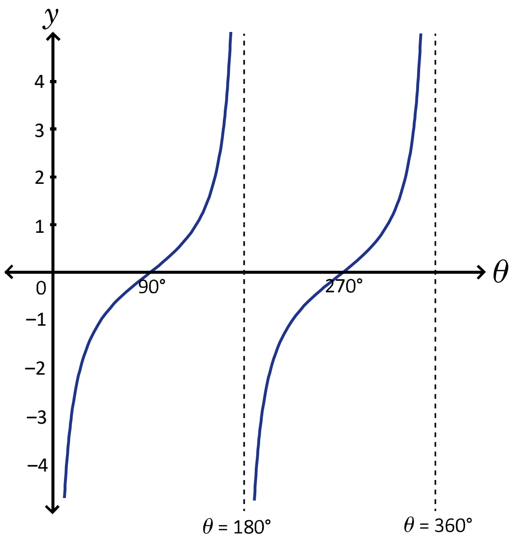
6c) $\text{sen }\theta = \frac{\text{OR}}{\text{OQ}} = \frac{1}{\text{OQ}} \Rightarrow \text{OQ} = \frac{1}{\text{sen }\theta}$

6d) Sea Q(a, b) $\Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \text{Q}(a, b) = \text{Q}\left(\frac{1}{\tan\theta}, 1\right)$

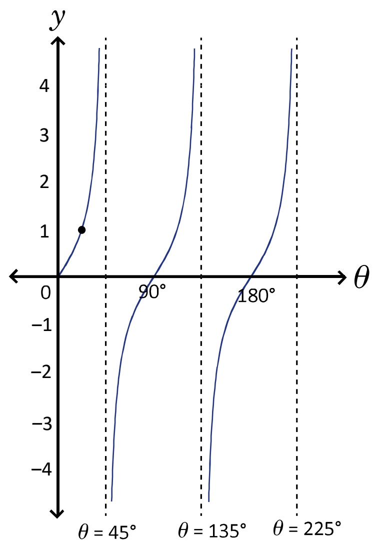
6e) $d(\text{Q, O}) = \frac{1}{\text{sen }\theta} \Rightarrow \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{\tan\theta} - 0\right)^2} = \frac{1}{\text{sen }\theta}$

$\Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^2 = \frac{1}{\text{sen}^2\,\theta} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}.$

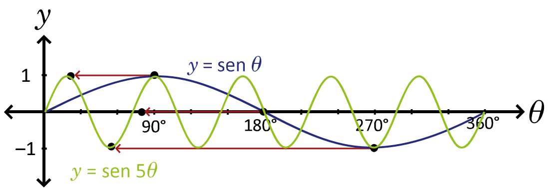
7a) $\tan(\theta - 90°)$; $[0, 360°]$; periodo: $180°$



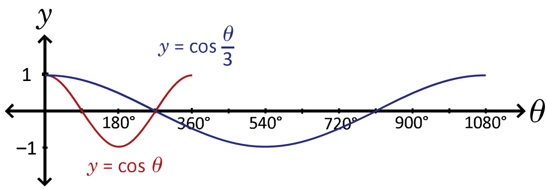
7b) $\tan 2\theta$; $[0, 270°]$; periodo: $90°$



8a) Amplitud: 1 Periodo: $72°$



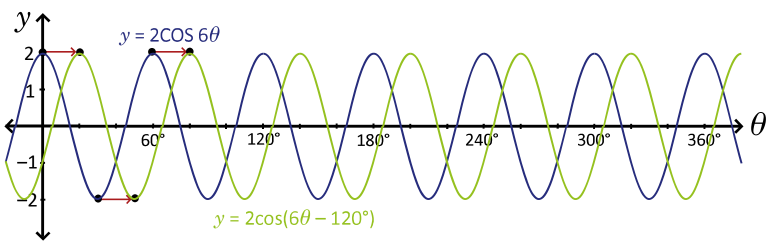
8b) Amplitud: 1 Periodo: $1080°$



8c) Amplitud: 4 Periodo: $360°$

8d) Amplitud: $\frac{1}{2}$ Periodo: $360°$

9a)

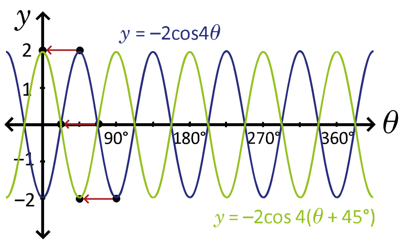


Amplitud: 2
Periodo: $60°$
Dominio: $\mathbb{R}$
Rango: $[-2, 2]$

9b) $f(\theta) = 4\text{sen}(2\theta + 120°)$

Amplitud: 4
Periodo: $180°$
Dominio: $\mathbb{R}$
Rango: $[-4, 4]$

9c)



Amplitud: 2
Periodo: $90°$
Dominio: $\mathbb{R}$
Rango: $[-2, 2]$

9d) $f(\theta) = \frac{1}{2}\text{sen}(3\theta - 225°)$

Amplitud: $\frac{1}{2}$ Periodo: $120°$

Dominio: $\mathbb{R}$ Rango: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

10a) $20° = 20°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{\pi}{9}$

10b) $50° = \frac{5\pi}{18}$

10c) $140° = \frac{7\pi}{9}$

10d) $345° = \frac{23\pi}{12}$

10e) $500° = \frac{25\pi}{9}$

10f) $-150° = -\frac{5\pi}{6}$

10g) $\frac{\pi}{8}$ rad $= \frac{\pi}{8}\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 22.5°$

10h) $\frac{4\pi}{9} = 80°$

10i) $\frac{5\pi}{3}$ rad $= 300°$

10j) $\frac{\pi}{180}$ rad $= 1°$

10k) 3π rad $= 540°$

10l) $-\frac{\pi}{2}$ rad $= -90°$

11. $2\pi r \frac{45°}{360°} = 9 \Rightarrow r = \frac{36}{\pi}$cm.

12. $5\theta = 12$ cm $\Rightarrow \theta = \frac{12}{5}$rad

3.15 Problemas de la unidad

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.
   a) $\log_2(x^2 - 8) = 3$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$ c) $\log_3 x = -\frac{1}{2}$
   d) $2^{3x+2} = 256$ e) $2^x = 3^{x-2}$ f) $2^{x+5} = 3^{x-2}$

2. Utiliza desplazamientos horizontales y verticales para graficar las siguientes funciones:
   a) $f(x) = \log_3(x - 1)$ b) $f(x) = \log_2 x + 2$ c) $f(x) = \log_3(x - 1) - 1$ d) $f(x) = \log_4(x + 2) - 3$

3. Para cada función del problema anterior determina: dominio, rango, asíntotas y su función inversa.

4. **Interés compuesto.** Si una cantidad de dinero C se invierte durante t años, con un interés del r% anual, recapitalizable (que se reinvierte) n veces al año. El dinero que se obtiene al final de los t años está dado por la fórmula $D(t) = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$.

   María realiza un depósito a plazo de \$500, en una Cooperativa de Ahorro. El interés anual del depósito es del 4%. El dinero se recapitaliza 4 veces al año (cada tres meses).
   a) Sustituye los valores conocidos en la fórmula $D(t) = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$, para obtener una fórmula que dé el dinero acumulado por María después de t años.
   b) ¿Cuánto dinero habrá acumulado María después de 2 años?
   c) ¿Cuántos años deben transcurrir para que María acumule al menos \$750?

5. **Crecimiento poblacional.** El crecimiento de una población a lo largo del tiempo está dado por la siguiente función exponencial: $P(t) = C(1 + r)^t$. Donde C es la población inicial, r es la tasa de crecimiento y t la cantidad de años transcurridos. La población de El Salvador para el año 2017 se estimó en 6 172 011 con una tasa de crecimiento poblacional de 0.3%. Utilizando la información anterior resuelve los siguientes problemas:
   a) Si la tasa de crecimiento se mantiene igual, ¿cuál será, aproximadamente, la población en El Salvador en el año 2030?
   b) ¿En qué año la población superará los 7 millones de habitantes?

6. Justifica la veracidad de la siguiente proposición: para todo número natural n se cumple que si 2^n tiene k dígitos entonces 2^{n+1} tiene k dígitos o 2^{n-1} tiene k dígitos.

7. Restringe la función tangente para que sea una función biyectiva y grafícala.

8. Grafica las funciones inversas de las funciones trigonométricas utilizando las funciones restringidas del problema 4 del Practica lo aprendido 3.14 y el problema anterior.

   Utiliza los ángulos en el sistema circular.

9. Demuestra que para todo ángulo θ se cumple que
   a) $\text{sen}^2\theta \leq 1$ b) $|\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq 2$

   Utiliza la desigualdad triangular.

   c) $(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \text{sen}\,2\theta$
   d) $|\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}$ Utiliza el literal anterior.
   e) $\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \leq 1$, $\theta \neq 90° + 180°n$, donde n es un número entero.

10. Aproximación del valor de π. Con los siguientes polígonos inscritos en el círculo de radio 1, calcula el cociente del perímetro del polígono entre el diámetro del círculo:
    a) Octágono regular b) Dodecágono regular

El método de exhaución fue usado satisfactoriamente por Arquímedes (287-212 a. C.) para hallar la fórmula exacta del área del círculo. El método consiste es inscribir polígonos regulares en el círculo para aproximar su área. Con este método también realizó aproximaciones del cociente del perímetro de la circunferencia por su diámetro, es decir, de la constante π.
Dunham, W. *(2004) Viaje a través de los genios*.

Indicador de logro:

3.15 Resuelve problemas utilizando funciones logarítmicas y trigonométricas.

Solución de problemas:

1a) $\log_2(x^2 - 8) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 8 = 2^3 \Leftrightarrow x = \pm 4$

1b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$

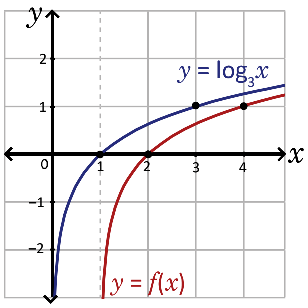
1c) $\log_3 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

1d) $2^{3x+2} = 256 \Leftrightarrow 2^{3x+2} = 2^8 \Leftrightarrow 3x + 2 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

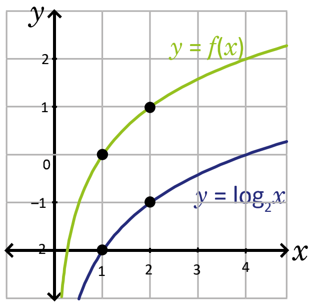
1e) $2^x = 3^{x-1}$, $x = \dfrac{\log 3}{\log 3 - \log 2} = 2.70951...$

1f) $2^{x+5} = 3^{x-2}$, $x = \dfrac{2\log 3 + 5\log 2}{\log 3 - \log 2} = 13.96657...$

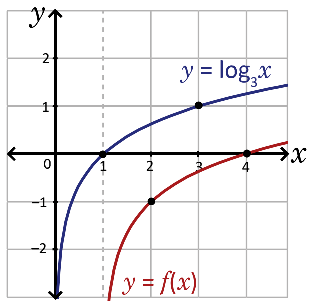
2a) $f(x) = \log_3(x - 1)$



2b) $f(x) = \log_2 x + 2$



2c) $f(x) = \log_3(x - 1) - 1$



3a) $D_f =]1, \infty[$, $R_f = \mathbb{R}$, Asíntotas: $x = 1$

Función inversa: si $y = f^{-1}(x) \Rightarrow f(y) = x \Rightarrow \log_3(y - 1) = x \Rightarrow y - 1 = 3^x \Rightarrow y = 3^x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 3^x + 1$.

3b) $D_f =]0, \infty[$, $R_f = \mathbb{R}$
Asíntotas: $x = 0$
$f^{-1}(x) = 2^{x-2}$

3c) $D_f =]1, \infty[$, $R_f = \mathbb{R}$
Asíntotas: $x = 1$
$f^{-1}(x) = 3^{x+1} + 1$

3d) $D_f =]-2, \infty[$, $R_f = \mathbb{R}$
Asíntotas: $x = -2$
$f^{-1}(x) = 4^{x+3} - 2$

4a) $D(t) = 500\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{4t}$

4b) \$541.43

4c) $500\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{4t} \geq 750 \Rightarrow \left(\frac{101}{100}\right)^{4t} \geq \frac{750}{500} \Rightarrow \log\left(\frac{101}{100}\right)^{4t} \geq \log\frac{3}{2} \Rightarrow 4t\log\frac{101}{100} \geq \log\frac{3}{2} \Rightarrow t \geq \dfrac{\log\frac{3}{2}}{4\log\frac{101}{100}} = 10.18...$

Deben transcurrir 11 años.

5a) $t = 2030 - 2017 = 13$.
$P(13) = 6\,172\,011(1 + 0.003)^{13} = 6\,417\,100$.

La población y la tasa de crecimiento poblacional se obtuvieron del archivo The World Factbook 2017.

5b) $6\,172\,011(1+0.003)^t \geq 7\,000\,000 \Rightarrow 1.003^t \geq \frac{7\,000\,000}{6\,172\,011} \Rightarrow \log 1.003^t \geq \log\frac{7\,000\,000}{6\,172\,011} \Rightarrow t \geq \dfrac{\log\frac{7\,000\,000}{6\,172\,011}}{\log 1.003} \geq 42.02...$

La población superará los 7 millones de habitantes en el año 2060.

6. Si 2^n tiene k dígitos entonces $k - 1 \leq \log 2^n < k$,
Si la parte decimal de $\log 2^n$ es menor a $1 - \log 2$ entonces $k - 1 \leq \log 2^n + \log 2 < k$ es decir $k - 1 \leq \log 2^{n+1} < k$ entonces 2^{n+1} tiene k dígitos.

Si la parte decimal de $\log 2^n$ es mayor o igual que $\log 2$ entonces $k - 1 \leq \log 2^n - \log 2 < k$ es decir $k - 1 \leq \log 2^{n-1} < k$ entonces 2^{n-1} tiene k dígitos.

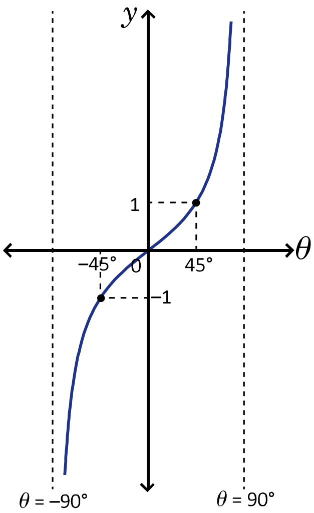
Y ya que $\log 2 < 1 - \log 2$, se abarcan todos los posibles valores de la parte decimal de $\log 2^n$.

Otra solución:
Si 2^n tiene k dígitos $\Leftrightarrow 2^n = a \times 10^{k-1}$, con $1 \leq a < 10$.

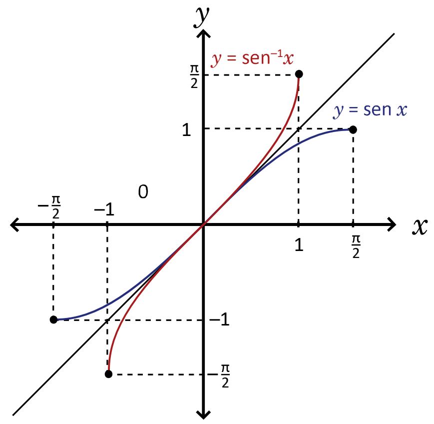
Si $1 \leq a < 5 \Rightarrow 2^{n+1} = (2a) \times 10^{k-1}$ con $2 \leq 2a < 10$
$\Leftrightarrow 2^{n+1}$ tiene k dígitos.

Si $5 \leq a < 10 \Rightarrow 2^{n-1} = \left(\frac{a}{2}\right) \times 10^{k-1}$ con $\frac{5}{2} \leq \frac{a}{2} < 5$
$\Leftrightarrow 2^{n-1}$ tiene k dígitos.

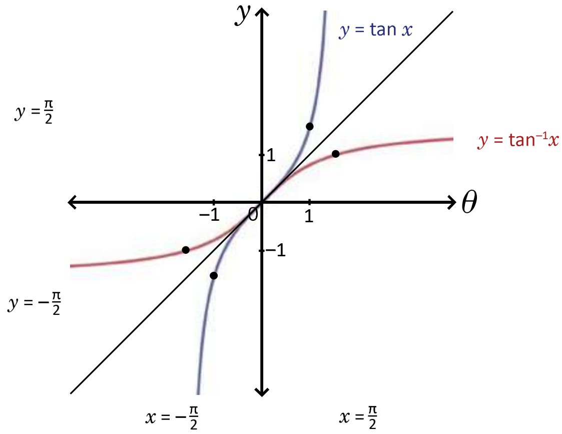
7. $f:]-90°, 90°[\rightarrow \mathbb{R}$
$\theta \rightarrow \tan\theta$



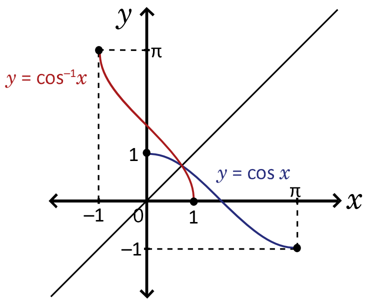
8. $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ $\quad f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$x \rightarrow \text{sen } x \qquad x \rightarrow \text{sen}^{-1}x$



8. $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$x \rightarrow \tan x \qquad x \rightarrow \tan^{-1}x$



8. $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ $\quad f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
$x \rightarrow \cos x \qquad x \rightarrow \cos^{-1}x$



Puede mostrar a los estudiantes la notación de las funciones trigonométricas inversas.

9a) Si $0 \leq \text{sen } \theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \text{sen}^2\theta \leq \text{sen } \theta$
$\Rightarrow 0 \leq \text{sen}^2\theta \leq \text{sen } \theta \leq 1$
$\Rightarrow \text{sen}^2\theta \leq 1$

Si $-1 \leq \text{sen } \theta < 0 \Rightarrow 0 < -\text{sen } \theta \leq 1$
$\Rightarrow 0 \leq (-\text{sen } \theta)^2 \leq -\text{sen } \theta$
$\Rightarrow 0 \leq \text{sen}^2\theta \leq -\text{sen } \theta \leq 1$
$\Rightarrow \text{sen}^2\theta \leq 1$

Otra solución: Para todo θ se cumple que $0 \leq |\text{sen } \theta| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\text{sen}^2\theta| \leq |\text{sen } \theta| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \text{sen}^2\theta \leq 1$.

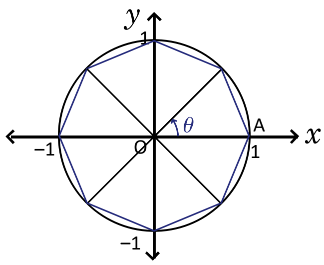
9b) $|\text{sen } \theta + \cos\theta| \leq |\text{sen } \theta| + |\cos\theta| \leq 1 + 1$
$\Rightarrow |\text{sen } \theta + \cos\theta| \leq 2$

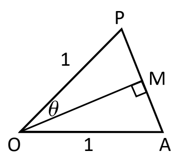
9c) $(\text{sen } \theta + \cos\theta)^2 = \text{sen}^2\theta + 2\text{sen } \theta\cos\theta + \cos^2\theta$
$= (\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + 2\text{sen } \theta\cos\theta$
$= 1 + \text{sen } 2\theta$

9d) $(\text{sen } \theta + \cos\theta)^2 = 1 + \text{sen } 2\theta \leq 1 + 1$
$\Rightarrow 0 \leq (\text{sen } \theta + \cos\theta)^2 \leq 2$
$\Rightarrow \sqrt{(\text{sen } \theta + \cos\theta)^2} \leq \sqrt{2}$
$\Rightarrow |\text{sen } \theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}$

9e) $\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \leq 1 \Leftrightarrow 2\tan\theta \leq 1 + \tan^2\theta$
$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - 2\tan\theta + \tan^2\theta$
$\Leftrightarrow 0 \leq (1 - \tan\theta)^2$

10a)





$\theta = \frac{360°}{8} = 45°$ Sea OM bisectriz del ΔOAM $\Rightarrow \measuredangle$MOA = 22.5°
ΔOAP es isósceles $\Rightarrow$ AP = 2AM y $\measuredangle$AMO = 90°

En el ΔOAM se tiene: $\frac{\text{AM}}{\text{OA}} = \text{sen } 22.5° \Rightarrow \text{AM} = \text{sen } 22.5°$

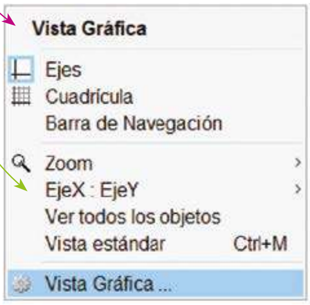
Así AP = 2sen 22.5° $\Rightarrow$ Si p es el perímetro de la circunferencia
$\frac{p}{2} = \frac{8\text{AP}}{2} = 4\text{AP} = 8\text{sen } 22.5° = 3.06146...$

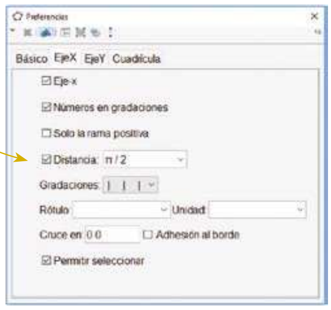
4.1 Práctica en GeoGebra: funciones trigonométricas

Con el desarrollo de esta práctica aprenderás sobre las gráficas de las funciones trigonométricas en GeoGebra y sus propiedades: amplitud, periodo y desplazamientos.

Práctica

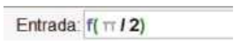
1. Cambiar la numeración del eje.
   a) Clic derecho en la Vista Gráfica.
   b) Selecciona Vista Gráfica 
   c) Selecciona EjeX.
   d) Selecciona el cuadro Distancia.
   e) Selecciona en el cuadro desplegable π / 2.





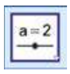
2. Gráfica de funciones trigonométricas.
   a) Función Seno. Escribe en la barra de Entrada sen x.

   b) Evaluando valores en la función seno. Cuando se evalúan ángulos en grados en las funciones trigonométricas debe colocarse el símbolo de grados correspondiente. Escribe en la barra de Entrada a = f(90°), b = f(90), c = f(π / 2). Observa que en b = *f*(90) el programa evalúa 90 radianes.

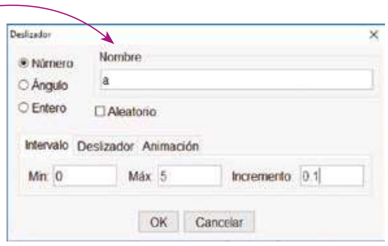


3. Amplitud de las funciones trigonométricas.
   Grafica la función $g(x) = 2\text{sen } x$. Escribe en la barra de entrada g(x) = 2*f(x).

4. El comportamiento de la función $f(x) = a\text{sen}(x)$ con $a > 0$.
   Creación de un deslizador.
   a) En la barra de herramientas selecciona Deslizador.

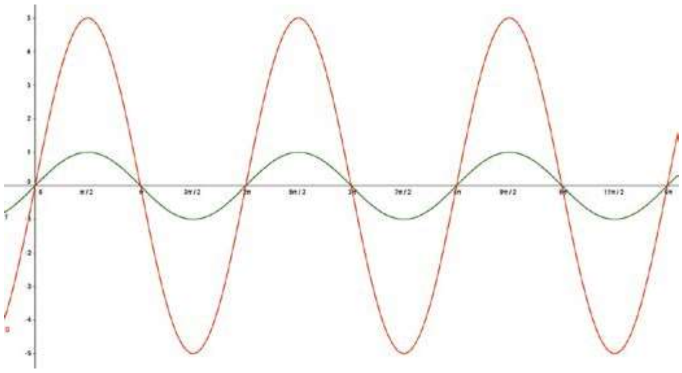


   b) Clic en la Vista Gráfica.
   c) Aparecerá un cuadro en el que debe colocarse el nombre al deslizador, en este caso **a**. Coloca en mínimo 0 y en máximo 5. Incremento 0.1, y clic en Ok.



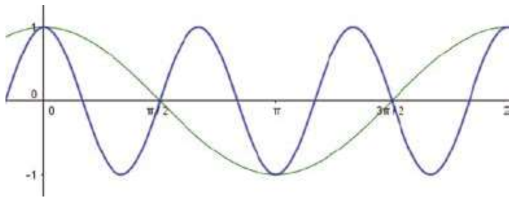
   d) Dibuja la función $f(x) = \text{sen } x$.
   e) Dibuja la función $g(x) = a\text{sen } x$.
   f) Selecciona el punto del deslizador y observa que a medida que se mueve hacia la derecha la función se dilata, mientras que hacia la izquierda se contrae.
   g) Haz clic derecho sobre el deslizador e inicia animación.

Unidad 5



5. Periodo

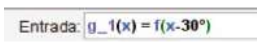
a) Grafica la función $f(x)$=cos x.
b) Grafica la función cos $3x$. Escribe en la barra de Entrada g(x)=f(3x).
c) Grafica la función cos $\frac{x}{3}$. Escribe en la barra de Entrada h(x)=f(x/3).

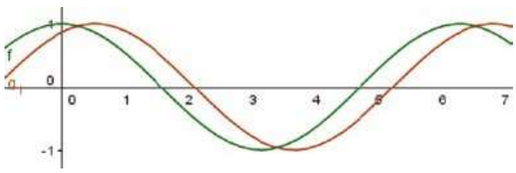


6. Desplazamientos verticales u horizontales.

a) Grafica la función $f(x)$=cos x.
b) Grafica la función $g_1(x)$ = cos $(x - 30°)$.
c) Grafica la función $h_1(x)$ = cos $(x + 60°)$.
d) Grafica la función $g_2(x)$ = cos(x) + 3.
e) Grafica la función $h_2(x)$ = cos$(x) - 2$.

Para escribir subíndice en GeoGebra se utiliza guion bajo como se muestra a continuación.





Actividades

1. Grafica las funciones del problema 8 de la clase 3.14.
2. Grafica las funciones del problema 9 de la clase 3.14.
3. Crea un deslizador **B**, con mínimo 0, máximo 5 e incremento 0.1. Luego grafica las funciones $f(x)$ = sen x y $g(x)$ = sen Bx. Observa el comportamiento de la función g a medida que el valor de **B** aumenta o disminuye.
4. Realiza una animación utilizando deslizadores para desplazamiento vertical y horizontal.

Indicador de logro:

4.1 Identifica la variación de las funciones trigonométricas al cambiar su periodo, amplitud y al realizar desplazamientos.

Secuencia:

Ya que se han estudiado los desplazamientos de las funciones trigonométricas y se ha introducido el concepto de radián, ahora se utilizará GeoGebra para graficar funciones, así como para visualizar con animaciones la manera en que cambia una función al realizar un desplazamiento o cambiar su amplitud o periodo.

Propósito:

Se cambia la escala en el eje x para observar los ángulos en radianes, sin embargo en la barra de entrada se escribirán los valores en grados (°) pues el programa lo convierte automáticamente. El estudiante debe interpretar las animaciones para corroborar lo aprendido.

Solución de problemas:

1a) Escribe en la barra de entrada sen (5x).

1b) Escribe en la barra de entrada cos (x/3).

1c) Escribe en la barra de entrada 4cos x.

1d) Escribe en la barra de entrada (1/2)sen x.

No es necesario que los estudiantes grafiquen la función en el intervalo dado en los Problemas.

2a) Escribe en la barra de entrada 2cos (6x – 120°).

2b) Escribe en la barra de entrada 4sen (2x + 120°).

2c) Escribe en la barra de entrada –2cos (4x + 180°).

2d) Escribe en la barra de entrada (1/2)sen(3x – 225°).

Fe de errata:
En el numeral 2 de la sección de “Actividades” del libro de texto, la referencia al problema 10 es un error, debe ser al problema 9.

3. En la barra de herramientas selecciona Deslizador. Clic en la Vista Gráfica. Nombra B al deslizador. Coloca en mínimo 0 y en máximo 5. Incremento 0.1, y clic en Ok. Escribe en la barra de entrada f(x) = sen x. Escribe en la barra de entrada g(x) = sen Bx. Selecciona el punto del deslizador y observa cómo cambia la función a medida que se mueve hacia la derecha y hacia la izquierda. Haz clic derecho sobre el deslizador e inicia animación.

4. Horizontal: En la barra de herramientas selecciona Deslizador. Clic en la Vista Gráfica. Nombra k al deslizador. Coloca en mínimo –90° y en máximo 90°. Incremento 0.1° y clic en Ok. Escribe en la barra de entrada f(x) = sen x. Escribe en la barra de entrada g(x) = sen (x – k). Haz clic derecho sobre el deslizador e inicia animación.

Vertical: En la barra de herramientas selecciona Deslizador. Clic en la Vista Gráfica. Nombra c al deslizador. Con mínimo -5 y máximo 5. Incremento 0.1 y clic en Ok. Escribe en la barra de entrada f(x) = cos x. Escribe en la barra de entrada g(x) = cos x + c. Haz clic derecho sobre el deslizador e inicia animación.

Lección 4

4.2 Práctica en GeoGebra: construcción de las funciones seno y coseno

Es posible construir las funciones trigonométricas observando su comportamiento en el círculo trigonométrico. A continuación se graficará la función seno.

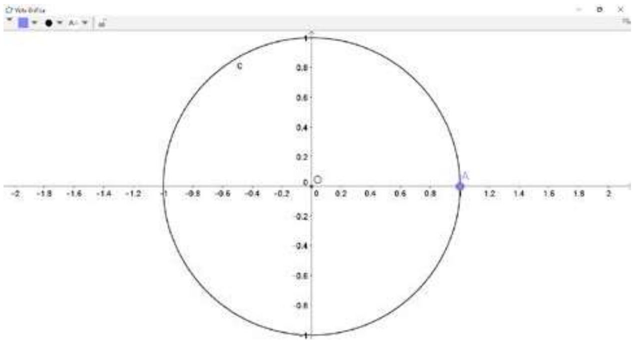
Práctica

1. Dibujar el círculo trigonométrico.

    a) Selecciona en la Barra de Herramientas la opción Circunferencia (centro, punto).

    b) Selecciona los puntos O(0, 0) como centro y A(1, 0) como punto.



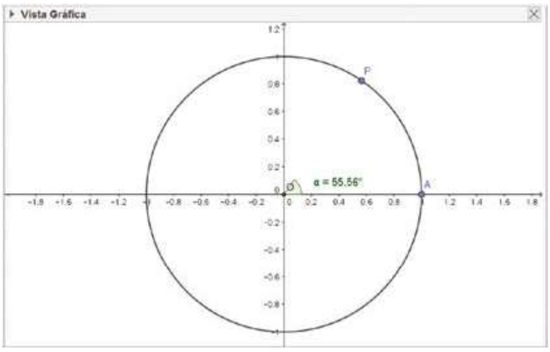
2. Dibujar el ángulo.

    a) Selecciona un punto P en el CT.

    b) Selecciona en la Barra de Herramientas: Ángulo, tres puntos o dos rectas.

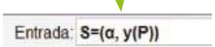
    

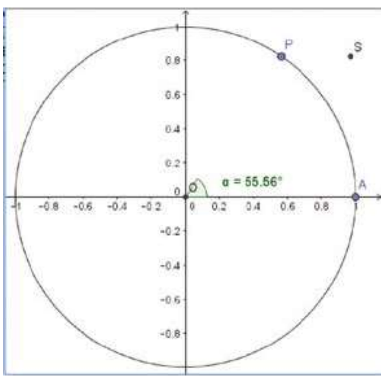
    c) Selecciona los puntos A, O y P, en ese orden. El ángulo se nombra automáticamente como α.



3. Punto de construcción. Este punto tendrá como coordenada en x el ángulo α en radianes (el programa lo convierte automáticamente) y como coordenada en y la coordenada en y del punto P (es decir sen α).

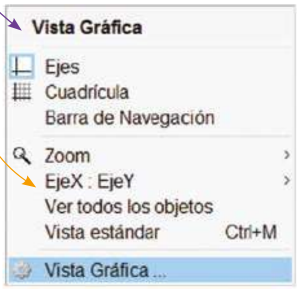
    a) En la barra de Entrada escribe S = (α, y(P)) y presiona Enter.

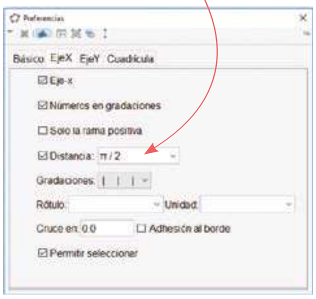


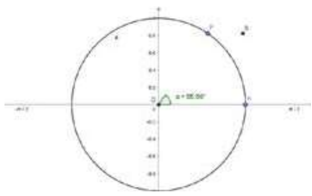


Unidad 5

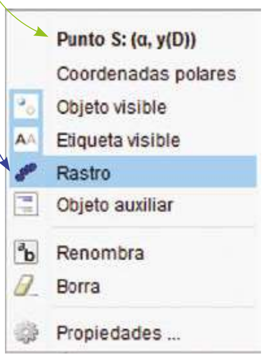
4. Cambiar la numeración del eje x.
   a) Clic derecho en la Vista Gráfica (ningún elemento debe estar seleccionado).
   b) Clic en Vista Gráfica.
   c) Clic en EjeX.
   d) Clic en el cuadro Distancia y selecciona la opción π / 2. Luego salir.

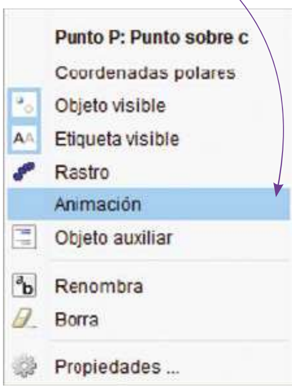


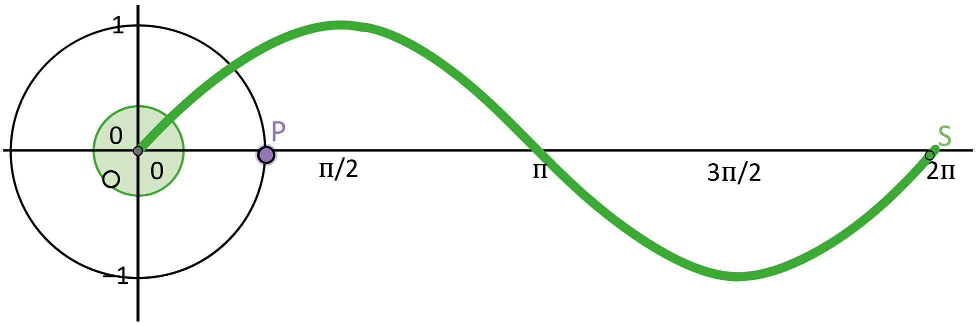




5. Graficando la función seno.
   a) Selecciona el punto S y dar clic derecho.
   b) Clic en rastro.
   c) Selecciona el punto P, clic derecho y luego inicia la animación.







Actividades

Construye la función coseno a partir del círculo trigonométrico.

Indicador de logro:

4.2 Utiliza las herramientas del software para construir las funciones seno y coseno a partir del círculo trigonométrico.

Secuencia:

Se graficó la función seno a partir de la ubicación de puntos en el plano cartesiano, ahora el estudiante observará cómo se obtiene la gráfica de las funciones seno y coseno a partir del círculo trigonométrico utilizando las coordenadas de cada punto.

Propósito:

Observar la utilidad del círculo trigonométrico para obtener de manera dinámica la gráfica de las funciones seno y coseno.

Solución de problemas:

Pasos para resolver el problema:

1. Dibujar el círculo trigonométrico (ver Practica).

2. Dibujar el ángulo (ver Práctica).

3. Punto de construcción. Este punto tendrá como coordenada en x el ángulo α en radianes (el programa lo convierte automáticamente) y como coordenada en y la coordenada en x del punto P (es decir cos α). Escribir en la barra de entrada R = (α, x(P)) y presiona enter.

4. Cambiar la numeración del eje x (ver Práctica).

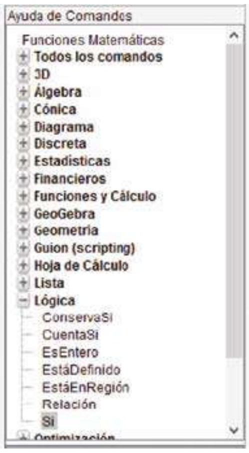
5. Graficando la función coseno.
   a) Selecciona el punto R y dar clic derecho.
   b) Clic en rastro.
   c) Selecciona el punto P, clic derecho y luego inicia la animación.

4.3 Práctica en GeoGebra: construcción de la función tangente

De igual manera que las funciones seno y coseno, la función tangente se puede dibujar a partir del círculo trigonométrico. Sin embargo, se tiene la dificultad que el ángulo al recorrer los valores $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ en el CT, la función debe evaluarse en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Para realizar esto se explicará la utilidad de la función **Si** del bloque de lógica.

Práctica

1. Clic en el botón Ayuda de Comandos, que se encuentra a la derecha de la barra de entrada. Se desplegará el panel de comandos.



2. Selecciona la función Si del bloque de lógica. En este comando deben ingresarse 2 o 3 datos separados por coma.

Si[<Condición>, <Entonces>, <Si no>]

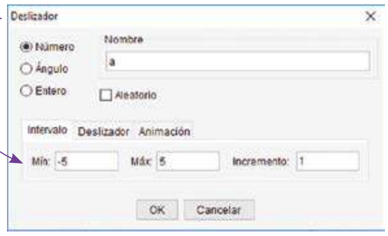
Condición: Se introduce una condición en la que está involucrada una variable, puede ser una igualdad, una desiguladad, entre otras.

Entonces: Es el valor que el comando devolverá si la condición es verdadera.

Si no: Es el valor que el comando devolverá si la condición no es verdadera.

3. Se creará un número **b** a partir de un deslizador **a**, de tal manera que si el valor de **a** es negativo entonces el valor de **b** será 0 y si el valor de **a** es positivo entonces **b** tomará el valor de **a**.

a) Crea un deslizador con nombre **a**, de -5 a 5 e incremento 1.



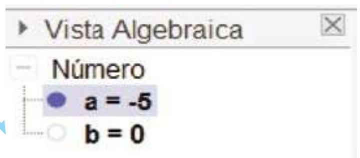
b) Escribe en la barra de Entrada **b =**, luego pegar el comando Si del bloque de lógica.

Entrada: b=Si[]

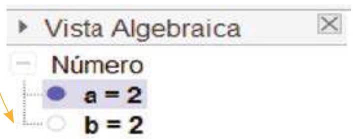
c) Se debe evaluar si **a** es negativo por lo que la condición a ingresar es **a**<0. El valor que el comando devolverá es 0 si se cumple **a**<0. El valor que el comando devolverá es **a** si no se cumple que **a**<0.

Entrada: **b=Si[a<0, 0, a]**

En el caso que **a** sea negativo **b** tomará el valor de 0.



En el caso que a sea positivo **b** tomará el valor de **a**.



Unidad 5

157

4. Dibujar el Círculo Trigonométrico:
   a) Selecciona en la Barra de Herramientas la opción Circunferencia (centro, punto).

   b) Selecciona los puntos O(0, 0) como centro y A(1, 0) como punto.
   c) Grafica la recta $x = 1$.

5. Dibujar el ángulo:
   a) Coloca el punto A(1, 0).
   b) Selecciona un punto P en el CT.
   c) Selecciona en la Barra de Herramientas: Ángulo, tres puntos o dos rectas.

   d) Selecciona los puntos A, O y P, en ese orden. El ángulo se nombra automáticamente como α.

6. Representación de la tangente.
   a) Traza la recta que pasa por los puntos O y P.

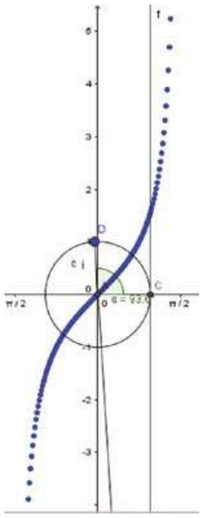
   b) Nombra Q al punto de intersección de la recta trazada y la recta $x = 1$.
   c) Oculta la recta trazada.

7. Punto de construcción. Este punto tendrá como coordenada en x el ángulo α en radianes (el programa lo convierte automáticamente) y como coordenada en y la coordenada en y del punto Q (es decir tan α).

   a) Construye el ángulo θ. Entrada: **θ = Si[α > 3* π /2 , α - 2 π , α]**

   b) Nombra T al punto de construcción.
      En la barra de Entrada escribe T = (θ, y(Q)) y presiona Enter. Entrada: **T = (θ, y(Q))**

8. Gráfica de la función.
   a) Cambia la numeración del eje x en términos de π.
   b) Selecciona el punto T, clic derecho y clic en Rastro.
   c) Seleciona el punto P, clic derecho y luego iniciar Animación.



Actividades

Construye la función cotangente a partir del círculo trigonométrico.

Indicador de logro:

4.3 Utiliza las herramientas del software para construir la función tangente a partir del círculo trigonométrico.

Secuencia:

La función tangente también se graficará en GeoGebra por medio de su representación en el círculo trigonométrico, introduciendo una herramienta de GeoGebra: la función Si.

Propósito:

La función Si se introduce para poder graficar la función tangente como se graficó en la clase, en dicha gráfica el intervalo posee valores negativos.

Solución de problemas:

Para la representación de la cotangente se construirá la figura del problema 6 de la clase 3.14, en la cual RQ = cot θ.

1. Dibujar el círculo trigonométrico.
   a) El punto O(0, 0) es el centro y A(1, 0) el punto de la circunferencia.
   b) Grafica la recta $y = 1$.

2. Dibujar el ángulo.
   a) Selecciona un punto P en el CT en el primer cuadrante.
   b) Construye el ángulo con los puntos A, O y P, selecciónalos en ese orden. El ángulo se nombra automáticamente como α.

3. Representación de la cotangente.
   a) Traza la recta que pasa por los puntos O y P.
   b) Nombra Q al punto de intersección de la recta trazada y la recta $y = 1$.
   c) Oculta la recta trazada.

4. Punto de construcción. Este punto tendrá como coordenada en x el ángulo α en radianes (el programa lo convierte automáticamente) y como coordenada en y la coordenada en x del punto Q (es decir cot α).

   En la barra de Entrada escribir U = (α, x(Q)) y presiona Enter.

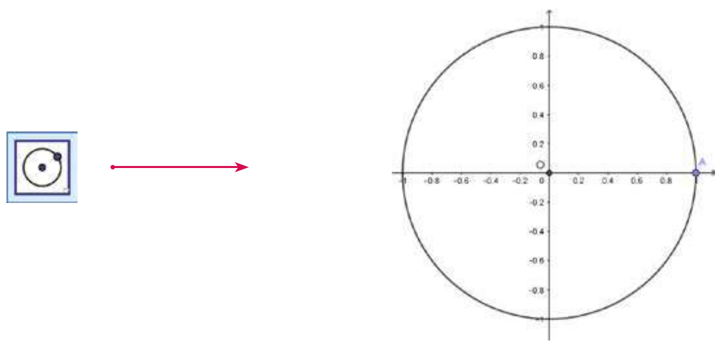
5. Gráfica de la función.
   a) Cambia la numeración del eje x en términos de π.
   b) Dar rastro al punto U y luego dar Animación al punto P.

4.4 Práctica en GeoGebra: el método de exhaución

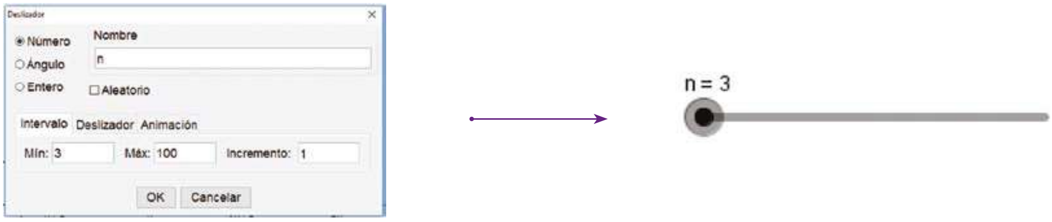
Se construirá un polígono inscrito en el círculo trigonométrico para observar la aproximación que tiene el área del polígono, a medida que sus lados aumentan, respecto al área del círculo.

Práctica

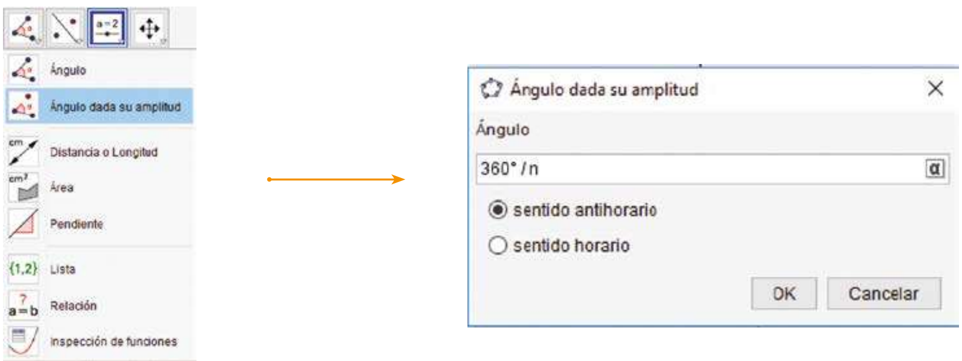
1. Construcción del círculo trigonométrico.
   El centro debe ser O(0, 0) y A(1, 0) el punto.



2. Construir un deslizador para el número de lados de un polígono regular con nombre n.
   Mínimo 3, máximo 100 e incremento 1.



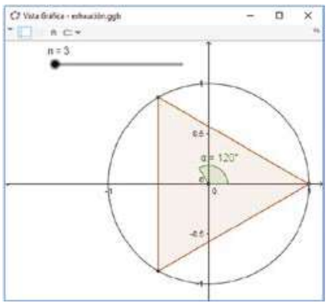
3. Construcción del ángulo central α dada su amplitud.
   a) Selecciona los puntos A, 0 y como amplitud 360° /n. Clic en OK.
   b) Aparecerá otro punto en el CT. Dar el nombre B.



4. Contrucción del polígono regular.
   a) Selecciona la opción Polígono regular y escoge los puntos A y B.

Unidad 5

b) En el cuadro que aparecerá a continuación, escribe el número de vértices n.



Aparecerá automáticamente el valor del área del polígono construido.

poligono1 = 1.29904

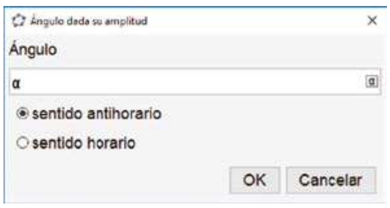
5. Calcular el área del círculo, con el comando Área del bloque de Geometría. Observa cómo se aproxima el área del polígono regular a la del círculo a medida que se incrementa el número de lados.

6. Determinar los perímetros del polígono y de la circunferencia.
   Perímetro del polígono — Entrada: perpoligono=Perímetro[poligono1]
   Perímetro de la circunferencia — Entrada: percircunferencia=Perímetro[c]

7. Comparar los perímetros del polígono y la circunferencia cuando aumenta el número de lados del polígono.

8. La constante π se define como el cociente del perímetro del círculo entre su radio. Utiliza la contrucción realizada para obtener una aproximación del valor de π.

9. Construcción de un polígono regular que circunscriba al Círculo trigonométrico.
   Construye un segmento OO_1 de longitud dada, con longitud $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. El punto O_1 se debe colocar en el eje x.



10. Construir el ángulo central β dada su amplitud.
    a) Selecciona los puntos O_1, O y como amplitud α. Clic en OK.
    b) Cambia el nombre al punto resultante por O_2.

11. Construir el polígono regular utilizando los puntos O_1 y O_2. El número de lados debe ser n.

Actividades

Efectúa las 3 aproximaciones realizadas en los problemas anteriores (área, perímetro y el valor π) con el polígono construido en el numeral 10.

Indicador de logro:

4.4 Explica el método de exhaución en el círculo trigonométrico por medio de un software para aproximar el valor de π.

Secuencia:

En sexto grado se estudió el valor de la constante π, que es útil para determinar el área y el perímetro de un círculo. En esta clase se utiliza el método de exhaución con ayuda de GeoGebra para determinar el área del círculo trigonométrico en el que se refleja el valor de π.

Propósito:

Al desarrollar la práctica el estudiante determina el área del círculo a partir de aproximaciones por medio de polígonos regulares y a la vez aproxima el valor de un número irracional.

Solución de problemas:

El polígono que circunscribe a la circunferencia se puede construir sobre la misma Práctica desarrollada, de esta manera pueden compararse los valores del área, perímetro y π con el polígono inscrito. Para realizar las aproximaciones basta desarrollar los pasos 5, 6 y 8 utilizando los valores del nuevo polígono.