Unidad 6. Sucesiones aritméticas y geométricas

Competencia de la unidad

Establecer el término general de una sucesión aritmética y geométrica para calcular términos o sumas parciales, utilizando las propiedades de estas sucesiones.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo	Primer año de bachillerato	Segundo año de bachillerato
Unidad 4: Ecuación (9°) • Ecuación cuadrática • Aplicaciones de la ecuación cuadrática	**Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos** • Productos notable y factorización • División de polinomios • Ecuación cuadrática y números complejos	**Unidad 4: Funciones trascendentales I** • Potencia y raíz n-ésima • Funciones y ecuaciones exponenciales
		Unidad 6: Sucesiones aritméticas y geométricas • Sucesiones aritméticas • Suceciones geométricas

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Sucesiones aritméticas	1	1. Patrones
	1	2. Patrones generalizados
	1	3. Sucesiones aritméticas: definición
	1	4. Sucesiones aritméticas: término general
	1	5. Sucesiones aritméticas: suma parcial, parte 1
	1	6. Sucesiones aritméticas: suma parcial, parte 2
	1	7. Sucesiones aritméticas: problemas
2. Sucesiones geométricas	1	1. Sucesiones geométricas: definición
	1	2. Sucesiones geométricas: término general
	1	3. Sucesiones geométricas: suma parcial, parte 1
	1	4. Sucesiones geométricas: suma parcial, parte 2
	1	5. Sucesiones geométricas: problemas
	1	6. Practica lo aprendido
	1	7. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la unidad 6
	2	Prueba del tercer periodo

14 horas clase + prueba de la unidad 6 + prueba del tercer periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Sucesiones aritméticas
La unidad inicia con la identificación de patrones de figuras y numéricos para introducir la definición de término general de una sucesión. Luego, se define una sucesión aritmética, se define su término general, se calculan sumas parciales, conocidas como series aritméticas, y se resuelven problemas diversos que requieren del uso de sucesiones aritméticas.

Lección 2: Sucesiones geométricas
Se define una sucesión geométrica y su término general, se calculan sumas parciales, conocidas como series geométricas, además, se resuelven problemas diversos que requieren del uso de sucesiones geométricas.

Lección 1 Sucesiones aritméticas

1.1 Patrones

Problema inicial

Observa las siguientes secuencias de figuras y números. Responde lo pedido en cada caso.

a) Determina en la Figura 4 y la Figura 6 si la secuencia se va formando de igual manera.

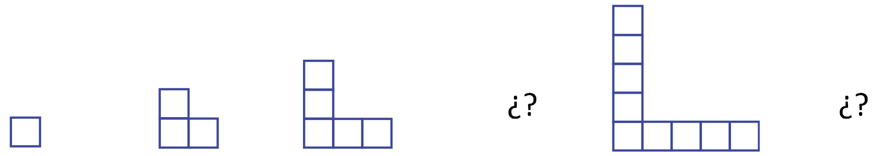


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6

b) ¿Cuál figura corresponde a la Figura 7 si la secuencia se va formando de la misma manera?

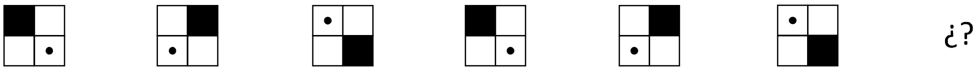


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6 Figura 7

c) Determina el número faltante y la regla que se ha utilizado para generar la secuencia.

2	3	5	8	12	17	23	¿?
Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5	Posición 6	Posición 7	Posición 8

Solución

a) Puede observarse que cada figura se obtiene agregando dos cuadrados a la figura anterior, acomodándolos en forma de L. Entonces, la Figura 4 y la Figura 6 son las que muestran las figuras de la derecha.

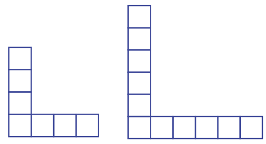


Figura 4 Figura 6

b) Si se considera que el cuadrado grande va rotando 90° en el sentido horario respecto a su centro, la Figura 2 se obtiene rotando una vez la Figura 1, la Figura 3 se obtiene rotando una vez la Figura 2, la Figura 4 se obtiene rotando dos veces la Figura 3, la Figura 5 se obtiene rotando una vez la Figura 4 y la Figura 6 se obtiene rotando una vez la Figura 5. Por lo tanto, la Figura 7 se obtiene rotando dos veces la Figura 6, por lo que la Figura 7 es .

c) Puede observarse que

	+1	+2	+3	+4	+5	+6
2	3	5	8	12	17	23
Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5	Posición 6	Posición 7

Entonces, el siguiente número deberá ser 23 + 7 = 30.

Para generar un número se suma el número anterior y su posición.

Conclusión

Un **patrón** matemático es una secuencia de números o figuras que satisfacen cierta regla y con la cual puede generarse cualquier elemento de la secuencia.

Problemas

Observa las siguientes secuencias de figuras y números. Responde lo pedido en cada caso.

a) Determina las figuras 5, 6 y 7 que corresponden a la secuencia e identifica la regla que se ha utilizado para generarla.

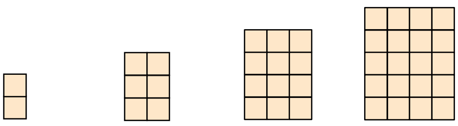


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

b) ¿Cuál figura corresponde a la Figura 7?

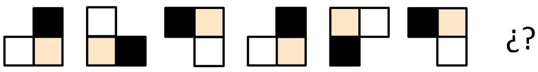


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6 Figura 7

c) Determina el número faltante y la regla que se ha utilizado para generar la secuencia.

2	6	12	20	30	42	¿?

Indicador de logro:

1.1 Identifica patrones numéricos o de figuras y establece la regla que los genera.

Secuencia:

Se inicia la unidad con la identificación de patrones, ya sean numéricos o de figuras y se busca una regla que los genera. Se establece la definición de patrón numérico.

Propósito:

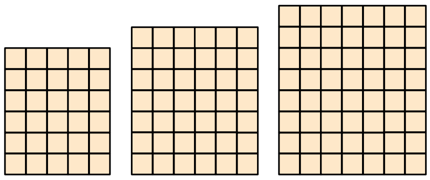
En la unidad 4 de séptimo grado se abordan los patrones numéricos. Esta clase tiene el objetivo de recordar los patrones y la forma de determinar un elemento en particular de este.

Solución de problemas:

a) Se observa primero el número de elementos de cada figura.

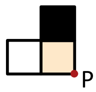
Figura 1: $2 = 1 \times 2$ Figura 2: $6 = 2 \times 3$ Figura 3: $12 = 3 \times 4$ Figura 4: $20 = 4 \times 5$

El número de elementos que tiene cada figura puede obtenerse multiplicando el número de columnas por el número de filas que tiene. Además, el número de la figura corresponde con el número de columnas que tiene. Por otra parte, el número de filas es siempre una unidad mayor que el número de columnas.



Por lo dicho anteriormente, la Figura 5, Figura 6 y Figura 7 son como se muestra a la derecha.

b) De la Figura 1 se toma el punto P, como muestra la figura. Se realizan rotaciones (o giros) con respecto a este punto.



Si se rota la Figura 1 un ángulo de 90°, se obtiene la Figura 2. Al rotar la Figura 2, un ángulo de 180° se obtiene la Figura 3. Se rota la Figura 3 un ángulo de 90°, se obtiene la Figura 4. Se rota la Figura 4 un ángulo de 180°, se obtiene la Figura 5. Continuando de la misma forma, la Figura 7 se obtiene girando 180° la Figura 6. Entonces, se obtiene la figura mostrada a la derecha.

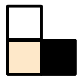


Figura 7

c) Se identifica primero cada elemento con su posición.

2	6	12	20	30	42
Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5	Posición 6

Al buscar una relación entre los elementos y sus posiciones se pueden identificar dos formas de generar el patrón.

Forma 1. El elemento puede obtenerse sumándole al número anterior el doble de su posición.

Posición 1: 2
Posición 2: $2 + 2 \times \mathbf{2} = \mathbf{6}$
Posición 3: $6 + 2 \times \mathbf{3} = \mathbf{12}$
Posición 4: $12 + 2 \times \mathbf{4} = \mathbf{20}$
Posición 5: $20 + 2 \times \mathbf{5} = \mathbf{30}$

Entonces, a la Posición 7 le corresponde
$42 + 2 \times 7 = 56$.

Forma 2. El elemento puede obtenerse multiplicando el número de posición por su consecutivo.

Posición 1: $1 \times 2 = 2$
Posición 2: $2 \times 3 = 6$
Posición 3: $3 \times 4 = 12$
Posición 4: $4 \times 5 = 20$
Posición 5: $5 \times 6 = 30$

Entonces, a la Posición 7 le corresponde
$7 \times 8 = 56$.

1.2 Patrones generalizados

Problema inicial

Observa la siguiente secuencia:

3	6	9	12	15	18	21	¿?	¿?	...
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	

a) ¿Cuál es la regla que se ha utilizado para generar la secuencia?
b) ¿Cuáles son los números que corresponden a las posiciones 8 y 9?
c) ¿Cuál sería el número correspondiente a la posición 20? ¿y a la posición 100?
d) ¿Cuál sería el número correspondiente a una posición cualquiera n?

Solución

a) Al observar la secuencia se puede determinar que todos los números son múltiplos de 3, por lo que la regla utilizada es multiplicar por 3 el número de posición en la que se encuentra.

b) Por el resultado del literal a, en las posiciones 8 y 9 corresponden los números 3(8) = 24 y 3(9) = 27.

c) Como el número se obtiene multiplicando la posición por 3, entonces 3(20) = 60 es el número que corresponde a la posición 20 y 3(100) = 300 es el número que corresponde a la posición 100.

d) El número que corresponderá a la posición n es $3n$.

La sucesión también puede generarse sumando 3 al número anterior.

Definición

A una secuencia de números que sigue cierta regla también se le conoce como **sucesión**. En una sucesión, sus elementos tienen un orden y habitualmente se denotan por a_n, donde n representa la posición que ocupa dicho elemento. Por ejemplo, en la sucesión del Problema inicial, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_7 = 21$, $a_n = 3n$.

A cada elemento de una sucesión se le llama **término** y al término que ocupa la n-ésima posición (con n un número natural) se le llama **término general**. Por ejemplo, $a_n = 3n$ es el término general del Problema inicial.

Una sucesión es **finita** si tiene una cantidad finita de elementos. Caso contrario, se dice que la sucesión es **infinita**.

Al escribir una sucesión se hace en orden, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, donde los puntos suspensivos indican que la sucesión sigue.

En algunas ocasiones no es posible encontrar el término general, en una forma simple, que describa una sucesión.

Ejemplo

Determina el término general de la siguiente sucesión y calcula los términos 20, 41 y 101.

$$-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$$

Observa que la sucesión va alternando signo en sus términos, y en cada posición impar su signo es negativo y en cada posición par, su signo es positivo. Nota que esto puede escribirse como:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Unidad 6

163

Lección 1

Además, los valores absolutos de los números que componen la sucesión son todos consecutivos y coinciden con su posición dentro de la sucesión, por lo tanto, el término general es $a_n = (-1)^n\, n$.

Por lo tanto, los términos 20, 41 y 101 son $a_{20} = (-1)^{20}\, 20 = 20$, $a_{41} = -41$ y $a_{101} = -101$.

Problemas

1. Para cada sucesión, encuentra el término general y los términos que se piden.

   a) 2, 4, 6, 8, ... ¿cuál es el término 42?

   b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... ¿cuál es el término 21?

   c) 1, 4, 9, 16, 25, ... ¿cuál es el término 11?

   d) 1, 8, 27, 64, 125, ... ¿cuál es el término 8?

   e) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}...$ ¿cuál es el término 954?

   f) 2, 0, 2, 0, 2, ... ¿cuál es el término 10?, ¿y el 55?

2. Enlista los primeros cinco términos de la sucesión que tiene término general a_n, en cada uno de los siguientes casos:

   a) $a_n = 3n + 1$

   b) $a_n = 4n - 2$

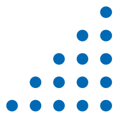
   c) $a_n = -n + 2$

   d) $a_n = n^2 - 3$

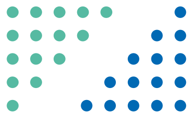
3. Observa el siguiente proceso: sea T_5 el número de elementos de la Figura 5, en la siguiente sucesión:

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

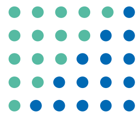
- Se reordenan los elementos de la figura 5.



- Se duplica la figura.



- Se unen las dos figuras iguales formando un rectángulo de 5 × 6 elementos.



Por lo tanto, $2T_5 = 5(6)$.

Generaliza el proceso anterior para determinar el término general T_n de la sucesión.

Una de las sucesiones más famosas es la conocida Sucesión de Fibonacci.

Fibonacci fue un matemático italiano que nació en Pisa, alrededor de 1175. Su nombre verdadero era Leonardo de Pisa pero comúnmente se le conocía como Fibonacci, nombre que representa la versión corta de Filius Bonaccio, que significa hijo de Bonaccio.

La sucesión de Fibonacci es de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Los primeros términos de la sucesión de Fibonacci son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...; es decir, los términos de la sucesión de Fibonacci pueden determinarse sumando los dos términos anteriores.

Esta sucesión tuvo su primera aparición cuando se planteó el problema que involucraba la reproducción de un par de conejos, con la hipótesis que estos eran inmortales, se volvían adultos al cabo de un mes, y que de cada pareja de conejos nacía una pareja de conejos (un macho y una hembra).

Indicador de logro:

1.2 Determina el término general de una sucesión.

Secuencia:

Se define una sucesión y la forma de representarla mediante una fórmula. Se define además, el término de una sucesión.

Propósito:

El Problema inicial tiene como objetivo identificar la regla general de una secuencia para luego definir el término general y la forma de denotar una sucesión.
El Ejemplo tiene como objetivo utilizar la notación definida en la Conclusión y calcular algunos términos específicos de una sucesión utilizando su término general.

Solución de problemas:

En cada una de las soluciones, n representa un número natural.

1a) Se observa que 2 = 2(1), 4 = 2(2), 6 = 2(3), 8 = 2(4), por tanto, $a_n = 2n$. Luego, $a_{42} = 2(42) = 84$.

1b) Se observa que la sucesión está compuesta por todos los números impares positivos. Todo número impar positivo puede escribirse como $2n - 1$, que tiene el valor de 1 cuando $n = 1$. Entonces $a_n = 2n - 1$. Luego, $a_{21} = 2(21) - 1 = 41$.

1c) La sucesión está compuesta por los cuadrados de los números naturales: $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, ... Por tanto, $a_n = n^2$. Luego, $a_{11} = 11^2 = 121$.

1d) La sucesión está compuesta por los cubos de los números naturales: $1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $64 = 4^3$, ... Por tanto, $a_n = n^3$. Luego, $a_8 = 8^3 = 512$.

1e) Se puede observar que la sucesión está formada por fracciones, donde el numerador es siempre 1 y los denominadores son los números naturales. Por tanto, $a_n = \frac{1}{n}$. Luego, $a_{954} = \frac{1}{954}$.

1f) Se observa que los términos de la sucesión son siempre 2 si la posición es impar, y siempre es 0 si la posición es par. Hay dos formas de definir la sucesión: Entonces,

Forma 1. $$a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Forma 2. $a_n = 1 - (-1)^n$

Luego, $a_{10} = 0$ y $a_{55} = 2$.

2a) $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 10$, $a_4 = 13$, $a_5 = 16$.

2b) $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 10$, $a_4 = 14$, $a_5 = 18$.

2c) $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = -2$, $a_5 = -3$.

2d) $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 6$, $a_4 = 13$, $a_5 = 22$.

3. Con los puntos de la Figura n, que tiene T_n elementos, se puede formar, al reordenarlos, un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen n puntos cada uno.

Al duplicar el triángulo, se tiene $2T_n$ elementos. Al ubicar ambos triángulos rectángulos se obtiene un rectángulo cuyos lados están formados por n y $n + 1$ puntos. Pero el número de elementos del rectángulo es $n(n + 1)$, entonces, $2T_n = n(n + 1)$.

Por lo tanto, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.3 Sucesiones aritméticas: definición

Problema inicial

Observa la siguiente secuencia y responde:

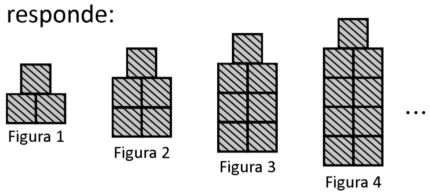


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 ...

a) Enlista el número de elementos de los primeros 10 términos de la sucesión.
b) ¿Cuál es la regla que se ha utilizado para generar la sucesión?
c) Si a un término se le resta su término anterior, ¿qué se puede observar si se hace en repetidas ocasiones?
d) Si sumas los términos 1 y 10, 2 y 9, 3 y 8 y así sucesivamente, ¿qué sucede?

Solución

a) Se puede elaborar una tabla para enlistar los elementos que tiene cada figura.

Término	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
Número de elementos	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

b) Si se observan las figuras, se han ido añadiendo dos cuadrados respecto a la figura anterior.

c) Al tomar un término y restarle su anterior se puede observar que el resultado siempre es el mismo cuando se hace varias veces. En este caso resulta ser 2.

$a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$
$a_5 - a_4 = 11 - 9 = 2$
$a_9 - a_8 = 19 - 17 = 2$

d) Obsérvese que los términos 1 y 10, 2 y 9, 3 y 8, 4 y 7, y 5 y 6, a pares siempre están a una misma distancia de los extremos. Puede observarse que al sumar términos que están a igual distancia de los extremos, el resultado es siempre el mismo: 24.

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21

11 + 13 = 24
9 + 15 = 24
7 + 17 = 24
5 + 19 = 24
3 + 21 = 24

Definición

A la sucesión donde sus términos pueden obtenerse sumando un mismo número al término anterior se llama **sucesión aritmética**.

Una sucesión aritmética tiene la propiedad que al restarle a un término su anterior siempre se obtendrá el mismo resultado. A este resultado se le llama **diferencia**.

Otra de las propiedades de una sucesión aritmética finita es que al sumar términos que están a una misma distancia de los extremos el resultado es el mismo.

Un detalle importante que hay que resaltar sobre las sucesiones aritméticas es que la diferencia puede ser un número cualquiera, esto es, puede ser un número entero, racional, decimal o irracional.

Problemas

Identifica si cada sucesión es una sucesión aritmética. En caso de serlo, determina su diferencia.

a) 5, 11, 17, 23, 29, 35, ...
b) −3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, ...
c) 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, ...
d) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \ldots$
e) −4, −4, −4, −4, −4, −4, ...
f) 11, 7, 3, −1, −5, −9, ...

165

Unidad 6

Indicador de logro:

1.3 Determina si una sucesión es aritmética utilizando su definición.

Secuencia:

Se inicia la clase con el análisis de una secuencia de figuras y el número de elementos de cada una de ellas. Se establece la definición de una sucesión aritmética y la diferencia de una sucesión de este tipo.

Solución de problemas:

a) Se observa que 11 – 5 = 17 – 11 = 23 – 17 = 29 – 23 = 35 – 29 = 6. Como la diferencia obtenida es siempre la misma, la sucesión es aritmética, donde su diferencia es 6.

b) Se observa que 0 – (–3) = 3 – 0 = 6 – 3 = 9 – 6 = 12 – 9 = 15 – 12 = 3. Como la diferencia obtenida es siempre la misma, la sucesión es aritmética, donde su diferencia es 3.

c) Se observa que 2 – 1 = 1, mientras que 7 – 5 = 2. Como ambas diferencias son distintas, la sucesión no es aritmética.

d) Se observa que $\frac{5}{2} - 2 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2} - 3 = 4 - \frac{7}{2} = \frac{9}{2} - 4 = 5 - \frac{9}{2} = \frac{11}{2} - 5 = \frac{1}{2}$. Como la diferencia obtenida es siempre la misma, la sucesión es aritmética, donde su diferencia es $\frac{1}{2}$.

e) Al hacer la diferencia de cualesquiera dos términos consecutivos, se tiene que –4 – (–4) = 0. Por tanto, la sucesión es aritmética con diferencia igual a 0.

f) Al realizar las restas se obtiene que 7 – 11 = 3 – 7 = –1 – 3 = –5 – (–1) = –9 – (–5) = –4. Por tanto, la sucesión es aritmética, con diferencia igual a –4.

1.4 Sucesiones aritméticas: término general*

Problema inicial

Encuentra el término general de la sucesión aritmética del Problema inicial de la clase 1.3.

Solución

Obsérvese primero que si a_{n-1} es un término cualquiera, a_n es el término que le sigue. Como cada figura se obtiene sumando dos cuadrados a la figura anterior, se tiene que

$$\underbrace{5 = 3 + 2}_{a_2 = a_1 + 2}, \quad \underbrace{7 = 5 + 2}_{a_3 = a_2 + 2}, \quad \underbrace{9 = 7 + 2}_{a_4 = a_3 + 2}, \quad \ldots \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

Se tiene entonces que

$$a_2 = a_1 + 2, \quad a_3 = a_2 + 2, \quad a_4 = a_3 + 2, \quad a_5 = a_4 + 2, \ldots, \quad a_{n-2} = a_{n-3} + 2, \quad a_{n-1} = a_{n-2} + 2 \ , \quad a_n = a_{n-1} + 2$$

Se necesita encontrar una fórmula en términos de la posición que ocupa en la sucesión. Nótese entonces que,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2 \\ &= a_{n-2} + (2 + 2) \\ &= a_{n-3} + (2 + 2 + 2) \\ &= a_{n-4} + (2 + 2 + 2 + 2) \end{aligned}$$

Si se continúa de ese modo
$$\begin{aligned} a_n &= a_4 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-4}) = (a_3 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-4}) \\ &= a_3 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-3}) = (a_2 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-3}) \\ &= a_2 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}) = (a_1 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}) \\ &= a_1 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-1}) \end{aligned}$$

Observa que $4 = n - (n - 4)$.

Se tiene entonces que a_n es igual al primer término más $n - 1$ veces 2, es decir, el término general de la sucesión es $a_n = a_1 + 2(n - 1)$.

Conclusión

En una sucesión aritmética, si d es su diferencia, su término general está dado por $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Ejemplo

Calcula los términos 4, 12, 17 y 99 de la sucesión aritmética $a_n = -2 + 6(n - 1)$ y determina cuál es el término a_1 y su diferencia.

Para calcular los términos que se piden, se sustituye la n por la posición del término. Así,

$a_4 = -2 + 6(4 - 1) = -2 + 6(3) = -2 + 18 = 16$

$a_{12} = -2 + 6(12 - 1) = -2 + 6(11) = 64$

$a_{17} = -2 + 6(17 - 1) = -2 + 6(16) = 94$

$a_{99} = -2 + 6(99 - 1) = -2 + 6(98) = 586$

Además, $a_1 = -2$ y su diferencia es $d = 6$.

En muchas ocasiones, el término general de una sucesión aritmética se presenta en la forma $a_n = a_1 - d + dn$. Por ejemplo, $a_n = -2 + 6(n - 1)$ puede escribirse como $a_n = -8 + 6n$.

Problemas

1. Establece el término general de las sucesiones aritméticas de los problemas de la Clase 1.3.

2. Determina los términos 1, 7, 11, 20 y 100 de cada una de las siguientes sucesiones aritméticas:

a) $a_n = 5 + 4(n - 1)$ b) $a_n = -1 + 7(n - 1)$ c) $a_n = 2 - 3(n - 1)$

d) $a_n = -4 - (n - 1)$ e) $a_n = \frac{1}{2} - (n - 1)$ f) $a_n = 5 - \frac{1}{3}(n - 1)$

g) $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(n - 1)$ h) $a_n = -0.6 + 2(n - 1)$ i) $a_n = -0.4 - 0.7(n - 1)$

Indicador de logro:

1.4 Establece el término general de una sucesión aritmética y lo utiliza para calcular algunos términos de esta.

Secuencia:

En esta clase se deduce el término general de una sucesión aritmética mediante un caso particular. Luego se generaliza para una diferencia d cualquiera. Además, se calculan algunos términos de sucesiones aritméticas utilizando su término general.

Propósito:

El Ejemplo tiene como objetivo utilizar el término general de una sucesión aritmética para calcular algunos términos de esta.
Con respecto a la sección de Problemas, el problema 1 es para establecer el término general de sucesiones aritméticas, mientras que el problema 2 es para calcular términos específicos utilizando el término general.

Solución de problemas:

1a) $a_n = 5 + 6(n - 1) = -1 + 6n$

1b) $a_n = -3 + 3(n - 1) = -6 + 3n$

1c) No es sucesión aritmética

1d) $a_n = 2 + \frac{1}{2}(n - 1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n$

1e) $a_n = -4$

1f) $a_n = 11 - 4(n - 1) = 15 - 4n$

2a) $a_n = 5 + 4(n - 1)$: $a_1 = 5, a_7 = 29, a_{11} = 45, a_{20} = 81, a_{100} = 401$

2b) $a_n = -1 + 7(n - 1)$: $a_1 = -1, a_7 = 41, a_{11} = 69, a_{20} = 132, a_{100} = 692$

2c) $a_n = 2 - 3(n - 1)$: $a_1 = 2, a_7 = -16, a_{11} = -28, a_{20} = -55, a_{100} = -295$

2d) $a_n = -4 - (n - 1)$: $a_1 = -4, a_7 = -10, a_{11} = -14, a_{20} = -23, a_{100} = -103$

2e) $a_n = \frac{1}{2} - (n - 1)$: $a_1 = \frac{1}{2}, a_7 = -\frac{11}{2}, a_{11} = -\frac{19}{2}, a_{20} = -\frac{37}{2}, a_{100} = -\frac{197}{2}$

2f) $a_n = 5 - \frac{1}{3}(n - 1)$: $a_1 = 5, a_7 = 3, a_{11} = \frac{5}{3}, a_{20} = -\frac{4}{3}, a_{100} = -28$

2g) $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(n - 1)$: $a_1 = \frac{1}{4}, a_7 = \frac{19}{4}, a_{11} = \frac{31}{4}, a_{20} = \frac{29}{2}, a_{100} = \frac{149}{2}$

2h) $a_n = -0.6 + 2(n - 1)$: $a_1 = -0.6, a_7 = 11.4, a_{11} = 19.4, a_{20} = 37.4, a_{100} = 197.4$

2i) $a_n = -0.4 - 0.7(n - 1)$: $a_1 = -0.4, a_7 = -4.6, a_{11} = -7.4, a_{20} = -13.7, a_{100} = -69.7$

Lección 1

1.5 Sucesiones aritméticas: suma parcial, parte 1*

Problema inicial

Resuelve cada literal.

a) ¿Cuánto vale la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30$? Busca una forma de calcularla sin sumar término a término.

b) Si se tienen los números 1, 2, 3, ..., $n - 3$, $n - 2$ y $n - 1$, ¿cuánto vale la suma de todos ellos?

c) ¿Cuánto vale la suma S_n de los primeros n términos de la sucesión $a_n = a_1 + d(n - 1)$?

d) En la sucesión aritmética $a_n = 1 + 2n$, ¿cuánto vale la suma de los primeros 10 términos?

Para el literal a, considera también la suma $30+29+28+\cdots+3+2+1$.

Solución

a) Si se realiza la suma

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & + \cdots + & \boxed{28} & + & \boxed{29} & + & \boxed{30} \\ + & \boxed{30} & + & \boxed{29} & + & \boxed{28} & + \cdots + & \boxed{3} & + & \boxed{2} & + & \boxed{1} \\ \hline & 31 & + & 31 & + & 31 & + \cdots + & 31 & + & 31 & + & 31 \end{array} \quad \text{------------------ (1)}$$

el resultado es el mismo. En la suma $1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29 + 30$ hay 30 términos, por lo que en la suma (1) se está sumando 30 veces el número 31, por lo tanto es igual a 31(30).

Por otra parte, la suma en (1) se obtuvo sumando $1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30$ dos veces, por lo que la suma pedida es igual a $\frac{31(30)}{2}$. Al simplificar, se obtiene

$$\frac{31(30)}{2} = \frac{31(\overset{15}{\cancel{30}})}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 31(15) = 465.$$

Por lo tanto, $1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29 + 30 = 465$.

b) Si se utiliza la misma técnica utilizada en la parte a), se tendría

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & + \cdots + & \boxed{n-3} & + & \boxed{n-2} & + & \boxed{n-1} \\ + & \boxed{n-1} & + & \boxed{n-2} & + & \boxed{n-3} & + \cdots + & \boxed{3} & + & \boxed{2} & + & \boxed{1} \\ \hline & n & + & n & + & n & + \cdots + & n & + & n & + & n \end{array} \quad \text{------------------ (2)}$$

La suma en (2) tiene $n - 1$ términos, por lo que vale $n(n - 1)$. Pero nuevamente, se ha sumado dos veces $1 + 2 + 3 + \cdots + n - 3 + n - 2 + n - 1$, por lo que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n - 3 + n - 2 + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

c) Se colocan los n términos en el nuevo orden

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 \overset{+d}{+} a_2 \overset{+d}{+} a_3 + \cdots + a_{n-2} \overset{+d}{+} a_{n-1} \overset{+d}{+} a_n \\ S_n = & a_n \overset{-d}{+} a_{n-1} \overset{-d}{+} a_{n-2} + \cdots + a_3 \overset{-d}{+} a_2 \overset{-d}{+} a_1 \\ \hline 2S_n = & (a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + (a_{n-2} + a_3) + \cdots + (a_3 + a_{n-2}) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n) \end{array}$$

En el último renglón, todas las parejas tienen el mismo valor $a_1 + a_n$ porque en cada suma el primer sumando va aumentando por d y el segundo por $-d$.

Como hay n parejas se tiene $2S_n = n(a_1 + a_n)$. Por lo tanto $S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.

Si se sustituye $a_n = a_1 + (n - 1)d$, se tiene que $S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n - 1)d]$.

d) Se quieren sumar 10 términos de la sucesión $a_n = 1 + 2n$, entonces se calcula el primer y décimo término

$$a_1 = 1 + 2(1) = 3,$$
$$a_{10} = 1 + 2(10) = 21.$$

Así, la suma de los 10 primeros términos es:

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}(10)(3 + 21) = 5(24) = 120.$$

Definición

La notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$ es una forma abreviada de escribir la suma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ y se lee "la sumatoria de a_i desde i igual 1 hasta i igual n".

Bajo esta notación, la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética está dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)];\text{ con } d \text{ la diferencia de la sucesión.}$$

A esta suma se le conoce como **suma parcial** de una sucesión o **serie**, que en este caso se trata de una sucesión aritmética.

El símbolo Σ es una letra griega que corresponde a la letra mayúscula sigma. Cuando se utiliza para representar una suma se hace referencia a él como "el símbolo de sumatoria".

Problemas

1. Para cada caso, calcula lo que se pide.
   a) La suma de los primeros 21 términos de la sucesión $a_n = -6 + 6n$.
   b) La suma de los primeros 28 términos de la sucesión $a_n = 11 - (n - 1)$.
   c) La suma de los primeros 77 términos de la sucesión $a_n = -4 + 5(n - 1)$.
   d) La suma de los primeros 33 términos de la sucesión $a_n = 0.5 + 2(n - 1)$.

2. Dos flechas se encuentran dentro de un triángulo y un pentágono de modo que apuntan a los vértices de estos. A continuación se muestran cuatro figuras de la secuencia en la que giran las flechas:

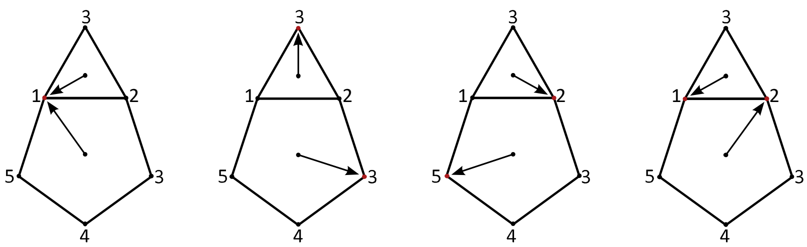


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Si las flechas siguen siempre el mismo movimiento, determina el número de figura en la cual las flechas habrán apuntado un mismo vértice por trigésima vez.

Indicador de logro:

1.5 Calcula la suma parcial de una sucesión aritmética.

Secuencia:

Luego de haber establecido el término general de una sucesión aritmética, se deduce la fórmula para calcular la suma parcial de esta.

Propósito:

Primero se calcula la suma de Gauss para los primeros 30 enteros positivos en a) y luego la suma de los primeros $n-1$ enteros positivos en b), esto último para establecer la fórmula de la suma de Gauss.
Luego, en c) se calcula la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética cualquiera, esta parte para establecer la fórmula de la suma parcial, y por último se calcula la suma parcial para una sucesión en particular, mediante el uso de la fórmula establecida en c).

Solución de problemas:

Hay que motivar al estudiante a hacer simplificaciones antes de realizar multiplicaciones. Por otra parte, estos problemas no requieren del uso de la calculadora.

1a) Para $a_n = -6 + 6n$, se tiene que $a_1 = 0$ y $a_{21} = 120$. Entonces,

$$S_{21} = \sum_{i=1}^{21} a_i = \frac{1}{2}(21)(a_1 + a_{21}) = \frac{1}{2}(21)(0 + 120) = 21(60) = 1\,260.$$

1b) Para $a_n = 11 - (n-1)$ se tiene que $a_1 = 11$ y $a_{28} = -16$. Entonces,

$$S_{28} = \sum_{i=1}^{28} a_i = \frac{1}{2}(28)(a_1 + a_{28}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{28})(11 - 16) = 14(-5) = -70.$$

1c) Para $a_n = -4 + 5(n-1)$ se tiene que $a_1 = -4$ y $a_{77} = 376$. Entonces,

$$S_{77} = \sum_{i=1}^{77} a_i = \frac{1}{2}(77)(a_1 + a_{77}) = \frac{1}{2}(77)(-4 + 376) = \frac{1}{2}(77)(372) = 77(186) = 14\,322.$$

1d) Para $a_n = 0.5 + 2(n-1)$ se tiene que $a_1 = 0.5$ y $a_{33} = 64.5$. Entonces,

$$S_{33} = \sum_{i=1}^{33} a_i = \frac{1}{2}(33)(a_1 + a_{33}) = \frac{1}{2}(33)(0.5 + 64.5) = \frac{1}{2}(33)(65) = 1\,072.5.$$

2. Se denota con un par ordenado los números hacia los que apuntan ambas flechas, (a, b), donde a denota el número al que apunta la flecha del triángulo y b denota el número al que apunta la flecha del pentágono. Se enlistan algunos elementos de la secuencia para identificar el patrón.

Fig. 1:	$\boxed{(1, 1)}$	Fig. 11:	(3, 1)
Fig. 2:	(3, 3)	Fig. 12:	(2, 3)
Fig. 3:	(2, 5)	Fig. 13:	(1, 5)
Fig. 4:	(1, 2)	Fig. 14:	(3, 2)
Fig. 5:	(3, 4)	Fig. 15:	(2, 4)
Fig. 6:	(2, 1)	Fig. 16:	$\boxed{(1, 1)}$
Fig. 7:	(1, 3)	Fig. 17:	(3, 3)
Fig. 8:	(3, 5)	Fig. 18:	(2, 5)
Fig. 9:	$\boxed{(2, 2)}$	Fig. 19:	(1, 2)
Fig. 10:	(1, 4)	Fig. 20:	(3, 4)

Los elementos encerrados son los que cumplen que ambas flechas han apuntado al mismo vértice. En la Figura 9, las flechas han apuntado al mismo vértice en dos ocasiones; luego, de la Figura 10 a la 24 hay 15 figuras, y además las flechas han apuntado al mismo vértice en dos ocasiones. Luego, en la Figura $a_n = 9 + 15(n-1)$, las flechas han apuntado $2n$ veces al mismo vértice.

Por lo tanto, en la Figura a_{15} las flechas habrán apuntado por trigésima vez (30 veces) al mismo vértice. Es decir, en la Figura

$$9 + 15(14) = 219.$$

1.6 Sucesiones aritméticas: suma parcial, parte 2

Problema inicial

¿Cuántos términos de la sucesión $a_n = 5 + 2(n - 1)$ deben sumarse para obtener 1 845?

Solución

Como la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética es $\frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)]$ se tiene que

$$a_1 = 5 \text{ y } \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}n\left[2(5) + 2(n-1)\right] = \frac{1}{2}n\left[10 + 2(n-1)\right] = 5n + n(n-1) = n^2 + 4n = 1\,845.$$

Se ha obtenido una ecuación de grado 2 donde la incógnita es n. Como se desea saber cuántos términos deben sumarse para obtener 1 845, hay que determinar las soluciones de dicha ecuación.

Resolviendo,

$$n(n+4) = 1\,845 \;\Rightarrow\; n^2 + 4n - 1\,845 = 0 \;\Rightarrow\; (n+45)(n-41) = 0.$$

De aquí se tiene que $n = -45$ o $n = 41$. Pero por ser n una posición de la sucesión, este no puede ser negativo, por lo tanto, se deben sumar 41 términos de la sucesión $a_n = 5 + 2(n-1)$ para obtener 1 845.

Conclusión

Para determinar el número de términos que deben sumarse de una sucesión aritmética para obtener un resultado específico, debe resolverse la ecuación cuadrática que resulta de igualar la fórmula de la suma parcial con el total que se desea.

Problemas

1. Determina el número de términos que deben sumarse en cada sucesión aritmética para obtener el resultado indicado.

a) $a_n = -1 + (n-1)$; suma parcial 434

b) $a_n = 3 + 4(n-1)$; suma parcial 1 081

c) $a_n = -3 + 3(n-1)$; suma parcial 270

d) $a_n = 5 - 2(n-1)$; suma parcial -391

e) $a_n = -4 - 7(n-1)$; suma parcial -129

f) $\sum_{i=1}^{n}\left[-100 + 4(i-1)\right] = 0$

217 es múltiplo de 7.

1 081 y 391 son múltiplos de 23.

2. ¿Cuántos términos de la sucesión aritmética 2, 8, 14, ... hay que sumar para obtener 1 064?

Carl Friedrich Gauss fue un matemático, físico, astrónomo y geodesta alemán, nació el 30 de abril de 1777 y falleció el 23 de febrero de 1855. Es considerado el príncipe de los matemáticos y desde sus años tempranos mostró extraordinarias pruebas de su habilidad mental. De niño, después de haberle preguntado a varios miembros de su familia sobre la pronunciación de las letras del alfabeto, aprendió a leer por su cuenta.

Gauss ingresó a la escuela cuando alcanzó los 7 años de edad, donde eventualmente se incorporó al curso de Aritmética, estudios en los cuales la mayoría de pupilos permanecían hasta los 15 años, que era la edad en la que terminaban sus estudios obligatorios. En dicho curso ocurrió un evento digno de mencionar, ya que fue de gran influencia para la futura vida de Gauss: en una ocación Büttner, el director de la escuela, quien también era su maestro de Aritmética, dió a la clase el ejercicio de escribir todos los números del 1 al 100 y sumarlos. El problema apenas había sido asignado, cuando Gauss puso la tableta donde escribía sobre la mesa y dijo: ¡Aquí está!, mientras los demás pupilos aún estaban calculando, multiplicando y sumando; en ese momento Büttner vió la tableta de Gauss y encontró escrito un solo número, que era la respuesta correcta.

Gauss estaba en posición de explicar al profesor cómo llegó a este resultado y dijo: “100+1=101, 99+2=101, 98+3=101, etc., y así tenemos tantos pares como hay en 100. Así, la respuesta es 50 × 101, o 5 050”.

Dunnington, G. W., Gray, J., Fritz-Egbert Dohse. *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*. The Mathematical Association of America.

169

Indicador de logro:

1.6 Calcula el número de términos que deben sumarse de una sucesión aritmética si se conoce la suma parcial.

Secuencia:

Luego de haber calculado la suma parcial de sucesiones aritméticas se hace el proceso inverso: conociendo la suma parcial de una sucesión aritmética, se desea encontrar el número de términos que hay que sumar para obtener dicha suma.

Solución de problemas:

En este caso es preferible utilizar la fórmula $S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)]$.

1a) Para $a_n = -1 + (n-1)$ se tiene que $a_1 = -1$ y $d = 1$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}n[2(-1) + (n-1)] = \frac{1}{2}n(n-3) = 434 \Rightarrow n^2 - 3n - 868 = 0 \Rightarrow (n-31)(n+28) = 0.$$

Entonces, $n = 31$ o $n = -28$. Por lo tanto, hay que sumar 31 términos para obtener una suma de 434.

1b) Para $a_n = 3 + 4(n-1)$ se tiene que $a_1 = 3$ y $d = 4$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2(3) + 4(n-1)] = \frac{1}{2}n(4n+2) = 1081 \Rightarrow 2n^2 + n - 1081 = 0 \Rightarrow (2n+47)(n-23) = 0.$$

Entonces, $n = -\frac{47}{2}$ o $n = 23$. Por lo tanto, hay que sumar 23 términos para obtener una suma de 1081.

1c) Para $a_n = -3 + 3(n-1)$ se tiene que $a_1 = -3$ y $d = 3$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2(-3) + 3(n-1)] = \frac{1}{2}n(3n-9) = 270 \Rightarrow n^2 - 3n - 180 = 0 \Rightarrow (n+12)(n-15) = 0.$$

Entonces, $n = -12$ o $n = 15$. Por lo tanto, hay que sumar 15 términos para obtener una suma de 270.

1d) Para $a_n = 5 - 2(n-1)$ se tiene que $a_1 = 5$ y $d = -2$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2(5) - 2(n-1)] = n(-n+6) = -391 \Rightarrow n^2 - 6n - 391 = 0 \Rightarrow (n+17)(n-23) = 0.$$

Entonces, $n = -17$ o $n = 23$. Por lo tanto, hay que sumar 23 términos para obtener una suma de -391.

1e) Para $a_n = -4 - 7(n-1)$ se tiene que $a_1 = -4$ y $d = -7$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2(-4) - 7(n-1)] = \frac{1}{2}n(-7n-1) = -129 \Rightarrow 7n^2 + n - 258 = 0 \Rightarrow (7n+43)(n-6) = 0.$$

Entonces, $n = -\frac{43}{7}$ o $n = 6$. Por lo tanto, hay que sumar 6 términos para obtener una suma de -129.

1f) En este caso, la sucesión está dada por $a_n = -100 + 4(n-1)$ se tiene que $a_1 = -100$ y $d = 4$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2(-100) + 4(n-1)] = \frac{1}{2}n(-204 + 4n) = 0 \Rightarrow 2n(n-51) = 0.$$

Entonces, $n = 0$ o $n = 51$. Por lo tanto, hay que sumar 51 términos para que la suma sea 0.

2. Se observa que la sucesión es aritmética, cuyo primer término es $a_1 = 2$ y su diferencia es $d = 6$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2(2) + 6(n-1)] = n(3n-1) = 1064 \Rightarrow 3n^2 - n - 1064 = 0 \Rightarrow (3n+56)(n-19) = 0.$$

Entonces, $n = -\frac{56}{3}$ o $n = 19$. Por lo tanto, hay que sumar 19 términos para que la suma sea 1064.

1.7 Sucesiones aritméticas: problemas

Problema inicial

Determina la diferencia de una sucesión aritmética cuyo tercer término es 27 y cuyo quinto término es 35. Calcula el primer término y el término general de la sucesión.

Solución

Si a_n es la sucesión aritmética con diferencia d entonces $a_n = a_1 + d(n-1)$.

De los datos, se tiene que $a_3 = 27$ y $a_5 = 35$. Pero

$$a_3 = a_1 + d(3-1) = a_1 + 2d = 27,$$
$$a_5 = a_1 + d(5-1) = a_1 + 4d = 35.$$

Luego,

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 = 35 - 27 = a_1 + 4d - a_1 - 2d &= 2d \\ \Rightarrow 8 &= 2d \\ \Rightarrow d &= 4 \end{aligned}$$

Sustituyendo $d = 4$ en la primera ecuación $a_1 + 2(4) = 27 \Rightarrow a_1 = 27 - 8 = 19$.
Entonces, el primer término y el término general de la sucesión son

$$a_1 = 19 \text{ y } a_n = 19 + 4(n-1) = 15 + 4n.$$

Conclusión

En ocasiones se conocen algunos datos de una sucesión aritmética, y para determinar el término general de esta, se utiliza la definición de sucesión aritmética y los datos conocidos.

Si se conocen dos términos de la sucesión aritmética, para determinar el término general se resuelve el sistema de ecuaciones lineales que resulta de aplicar la definición del término general en cada término conocido.

Problemas

1. El segundo término de una sucesión aritmética es 12 y el cuarto término es 22. Determina el término general de la sucesión.

2. El quinto término de una sucesión aritmética es –11 y el décimo término es –26. Calcula el séptimo término.

3. De una sucesión aritmética se sabe que $a_9 = -5$ y que $a_{15} = 31$. Calcula a_{20}.

4. El octavo término de una sucesión aritmética es 8 y el vigésimo es 44. Determina el término general de la sucesión.

5. Calcula la suma de los primeros 10 términos de la sucesión aritmética que tiene por séptimo término a –25 y cuyo noveno término es –35.

6. Se tiene que $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 219$ y $a_7 = 34$. Determina el término general a_n de la sucesión aritmética.

7. Dada la sucesión aritmética $a_1 = 43$, $a_2 = 37$, ... , ¿cuál es el primer entero n tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i < 0$?

Indicador de logro:

1.7 Resuelve problemas sobre sucesiones aritméticas si se conocen algunos datos de estas.

Secuencia:

La clase contiene una variedad de problemas que se resuelven mediante sucesiones aritméticas. El tipo de problema más habitual es el de calcular el término general si se conocen dos términos no consecutivos de la sucesión.

Solución de problemas:

1. De los datos, se tiene que $a_2 = 12$ y $a_4 = 22$. Se obtiene el sistema de ecuaciones mostrado.

Al resolverlo se tiene que $a_1 = 7$ y $d = 5$. Por lo tanto,

$$a_n = 7 + 5(n - 1) = 5n + 2.$$

$$\begin{cases} a_1 + d = 12 \\ a_1 + 3d = 22 \end{cases}$$

2. De los datos, se tiene que $a_5 = -11$ y $a_{10} = -26$. Se obtiene el sistema de ecuaciones mostrado.

Al resolverlo se tiene que $a_1 = 1$ y $d = -3$. Luego, el séptimo término es $a_7 = 1 - 3(6) = -17$.

$$\begin{cases} a_1 + 4d = -11 \\ a_1 + 9d = -26 \end{cases}$$

3. De los datos se obtiene el sistema de ecuaciones mostrado; al resolverlo se tiene que $a_1 = -53$ y $d = 6$.

Luego, $a_{20} = -53 + 6(19) = 61$.

$$\begin{cases} a_1 + 8d = -5 \\ a_1 + 14d = 31 \end{cases}$$

4. De los datos se tiene que $a_8 = 8$ y $a_{20} = 44$. Se obtiene el sistema de ecuaciones mostrado.

Al resolverlo se tiene que $a_1 = -13$ y $d = 3$. Por lo tanto,

$$a_n = -13 + 3(n - 1) = 3n - 16.$$

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 8 \\ a_1 + 19d = 44 \end{cases}$$

5. Basta con calcular el primer término y la diferencia. Con los datos del problema se tiene el sistema de ecuaciones mostrado, que al resolverlo se obtiene que $a_1 = 5$ y $d = -5$.

$$\begin{cases} a_1 + 6d = -25 \\ a_1 + 8d = -35 \end{cases}$$

Luego,

$$S_{10} = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n - 1)] = \frac{1}{2}(10)[2(5) - 5(10 - 1)] = -175.$$

También se puede calcular la diferencia de forma más sencilla. Del séptimo término al noveno hay una distancia de $2d$. Así,

$$2d = a_9 - a_7 = -35 + 25 = -10.$$

Entonces, $d = -5$.

6. Por la propiedad de las sucesiones aritméticas, se tiene que $a_5 + a_{10} = a_6 + a_9 = a_7 + a_8$. Entonces,

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 3(a_7 + a_8) = 219 \Rightarrow a_7 + a_8 = 73.$$

Pero $a_7 = 34$, por lo que $a_8 = 73 - a_7 = 73 - 34 = 39$. Luego, $d = a_8 - a_7 = 39 - 34 = 5$; además,

$$a_7 = a_1 + 5(6) \Rightarrow a_1 = 34 - 30 = 4.$$

Por lo tanto, $a_n = 4 + 5(n - 1) = 5n - 1$.

7. Primero se tiene que $d = a_2 - a_1 = 37 - 43 = -6$. Luego, $\sum_{i=1}^{n} a_i = \ n[2a_1 + (n - 1)d] = \frac{1}{2}n(92 - 6n) < 0$.

Es decir, $n(92 - 6n) < 0$. De aquí se tiene que $n < 0$ o bien $92 - 6n < 0$. Pero n es un entero positivo, por lo que $n < 0$ no es posible. Por lo tanto, $92 - 6n < 0$, es decir, $n > \frac{92}{6} = \frac{46}{3} \approx 15.3$.

Por lo tanto, el primer entero que hace que $\sum_{i}^{n} a_i$ sea menor que cero es $n = 16$.

Lección 2 Sucesiones geométricas

2.1 Sucesiones geométricas: definición*

Problema inicial

a) Si el área del cuadrado en la Figura 1 es 1, determina el área sombreada si cada cuadrado se ha dividido en cuatro cuadrados iguales.

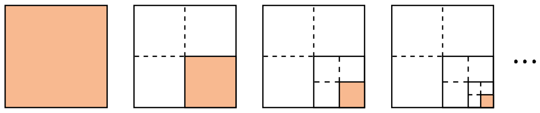


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

b) ¿Qué regla se puede establecer para encontrar el valor del área sombreada en cada figura?
c) De acuerdo al literal b), enlista los 7 primeros términos de la sucesión.
d) Si se divide un término entre su anterior, ¿qué se observa? Realiza este procedimiento al menos tres veces.

Solución

a) Si el área sombreada en la Figura 1 es 1, al haberse dividido en cuatro partes iguales, el área sombreada en la Figura 2 representa la cuarta parte respecto al área sombreada del cuadrado de la Figura 1, es decir, el área sombreada es igual a $\frac{1}{4}$.

De igual forma, el área sombreada en la Figura 3 es la cuarta parte del cuadrado que está sombreado en la Figura 2, por lo que el área sombreada es $\frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{16}$.

Continuando con el mismo análisis, el área sombreada en la Figura 4 es la cuarta parte del cuadrado que está sombreado en la Figura 3, es decir que el área sombreada es $\frac{1}{16} \div 4 = \frac{1}{64}$.

b) Para encontrar el área sombreada en una figura se puede dividir entre 4 el valor del área sombreada de la figura anterior.

c) Se puede elaborar una tabla para enlistar los elementos que tiene cada figura.

Término	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Valor del área	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{4096}$

d) Al dividir un término entre su anterior se tiene

$$a_2 \div a_1 = \frac{1}{4} \div 1 = \frac{1}{4} \qquad a_7 \div a_6 = \frac{1}{4\,096} \div \frac{1}{1\,024} = \frac{1}{4} \qquad a_5 \div a_4 = \frac{1}{256} \div \frac{1}{64} = \frac{1}{4}$$

Se puede observar entonces que siempre se obtiene el mismo resultado: $\frac{1}{4}$.

Conclusión

Una sucesión donde sus términos pueden obtenerse multiplicando por un mismo número el término anterior se llama **sucesión geométrica**.

Una sucesión geométrica tiene la propiedad que al dividir un término entre su anterior, el resultado siempre es el mismo. A este resultado se le llama **razón**.

Problemas

Determina si las siguientes sucesiones son geométricas. En caso de serlo, especifica la razón.

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... b) 1, 3, 9, 27, 81, ...
c) 3, −6, 12, −24, 48, −96, ... d) −1, −2, −4, −6, −8, −10, ...

Indicador de logro:

2.1 Determina si una sucesión es geométrica utilizando su definición.

Secuencia:

Se inicia la clase con el análisis de una secuencia de figuras en las cuales se analiza el área sombreada de cada una de ellas, relacionándola con el área de la figura anterior. La sucesión de las áreas resulta ser una sucesión geométrica. Se establece la definición de una sucesión geométrica y su razón.

Solución de problemas:

a) Se observa que $4 \div 2 = 2$, pero $6 \div 4 = \frac{3}{2} \neq 2$. Como la razón no es la misma en ambas, la sucesión no es geométrica.

b) Se observa que $3 \div 1 = 9 \div 3 = 27 \div 9 = 81 \div 27 = 3$. Como la razón es siempre la misma, la sucesión es geométrica, con razón igual a 3.

c) Se observa que $-6 \div 3 = 12 \div (-6) = -24 \div 12 = 48 \div (-24) = -96 \div 48 = -2$. Como la razón es siempre la misma, la sucesión es geométrica, con razón igual a -2.

d) Se observa que $-10 \div (-8) = \frac{5}{4}$, $-8 \div (-6) = \frac{4}{3}$. Como la razón no es la misma, la sucesión no es geométrica.

2.2 Sucesiones geométricas: término general*

Problema inicial

Encuentra el término general de la sucesión geométrica de la clase 2.1.

Solución

Se sabe que si a_{n-1} es el término $n-1$, a_n es el siguiente término. Como cada término de la sucesión geométrica se obtiene multiplicando por $\frac{1}{4}$ el término anterior, se tiene que

$$\underbrace{\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times 1}_{a_2=\frac{1}{4}\times a_1},\quad \underbrace{\frac{1}{16}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}_{a_3=\frac{1}{4}\times a_2},\quad \underbrace{\frac{1}{64}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}}_{a_4=\frac{1}{4}\times a_3},\ \ldots,\ a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}$$

Es decir,

$$a_2=\frac{1}{4}\times a_1,\quad a_3=\frac{1}{4}\times a_2,\quad a_4=\frac{1}{4}\times a_3,\ \ldots,\quad a_{n-2}=\frac{1}{4}\times a_{n-3},\quad a_{n-1}=\frac{1}{4}\times a_{n-2},\quad a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}$$

Se desea encontrar una fórmula que describa la sucesión en términos de la posición que ocupa un elemento. Nótese que,

$$a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-2}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-3}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-4}$$

Si se continúa de ese modo,

$$a_n=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-4}\times a_4=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-3}\times a_3=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-2}\times a_2=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-1}\times a_1$$

Entonces, a_n es igual al primer término multiplicado por el producto de $n-1$ veces la razón $\frac{1}{4}$; es decir, que el término general de la sucesión geométrica es $a_n = a_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, donde $a_1 = 1$.

Conclusión

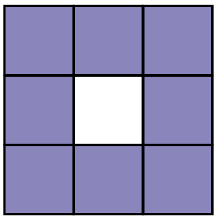
En una sucesión geométrica, si r es su razón, su término general está dado por $a_n = a_1r^{n-1}$.

Problemas

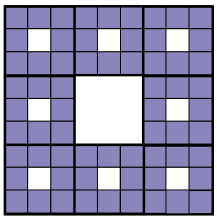
1. Establece el término general de las sucesiones geométricas del problema de la clase 2.1.

2. Observa el siguiente proceso:

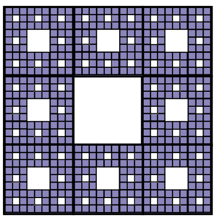
Paso 1. Se divide un cuadrado de lado 1 en 9 partes iguales y se quita el del centro.



Paso 2. De cada cuadrado que queda, se divide en 9 partes iguales y se quita el cuadrado del centro de cada uno de ellos.



Paso 3. Se realiza el mismo proceso con los cuadrados que quedan, dividiéndolos en 9 partes iguales y quitando el del medio.



Si se sigue de ese modo, determina el valor del área del cuadrado más pequeño en el que queda dividido el cuadrado inicial, después de haber realizado el proceso n veces. A esta figura se le conoce con el nombre de **Alfombra de Sierpinski**.

Indicador de logro:

2.2 Encuentra el término general de una sucesión geométrica.

Secuencia:

En esta clase se deduce el término general de una sucesión geométrica mediante un caso particular. Luego, se establece el término general para una razón r cualquiera.

Propósito:

La idea es utilizar la definición de sucesión geométrica (observe el primer párrafo de la Solución), para luego comenzar a hacer sustituciones sucesivas a partir del término n–ésimo hasta llegar a una relación con el término a_1 (observe el tercer y cuarto párrafo de la Solución).

Solución de problemas:

1a) No es sucesión geométrica

1b) $a_n = 3^{n-1}$

1c) $3(-2)^{n-1}$

1d) No es sucesión geométrica

2. Se analiza el área de cada cuadrado en cada paso.

Paso 1. Como el cuadrado tiene lado 1, su área es 1. Entonces, al dividirlo en 9 partes iguales, se obtienen 9 áreas iguales; es decir, el área de cada cuadrado es $\frac{1}{9}$.

Paso 2. Del paso 1, cada cuadrado tiene $\frac{1}{9}$ de área. Entonces, al dividir uno de estos cuadrados en 9 partes iguales se tiene que cada área vale $\frac{1}{9} \div 9 = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9^2}$.

Paso 3. Del paso 2, cada cuadrado tiene $\frac{1}{9^2}$ de área. Entonces, al dividir uno de estos cuadrados en 9 partes iguales se tiene que cada área vale $\frac{1}{9^2} \div 9 = \frac{1}{9^2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9^3}$.

Paso 4. Siguiendo la misma idea de los pasos anteriores, al dividir uno de los cuadrados del paso 3 en 9 partes iguales se tiene que cada área vale $\frac{1}{9^3} \div 9 = \frac{1}{9^3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9^4}$.

En este punto se puede observar una secuencia. El área de cada cuadrado en cada paso es $\frac{1}{9^n} = \left(\frac{1}{9}\right)^n$, donde n es el número de paso.

2.3 Sucesiones geométricas: suma parcial, parte 1

Problema inicial

1. Sea S = $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$. Calcula el valor de S – rS y determina otra expresión para S.
2. Calcula la suma de los primeros n términos de la sucesión geométrica $a_n = a_1 r^{n-1}$.
3. Calcula la suma de los primeros 5 términos de la sucesión geométrica $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Solución

1. Se tiene que S = $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$ se multiplica por r toda la expresión y se obtiene
   $rS = r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} + r^n$.

   Si se resta rS de S se obtiene

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \ldots + \cancel{r^{n-3}} + \cancel{r^{n-2}} + \cancel{r^{n-1}} \\ rS = & \quad\ \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \ldots + \cancel{r^{n-3}} + \cancel{r^{n-2}} + \cancel{r^{n-1}} + r^n \\ \hline S - rS = 1 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - r^n \end{array}$$

   Por lo que $S(1 - r) = 1 - r^n$. Si $r \neq 1$, se despeja S y se tiene que $S = \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$.
   Es decir, si $r \neq 1$, $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$. Si $r = 1$ la suma significa sumar n veces 1 por lo que S = n.

2. Al enlistar los primeros n términos de la sucesión

$$a_1,\ a_2 = ra_1,\ a_3 = r^2a_1,\ a_4 = r^3a_1,\ \ldots,\ a_{n-2} = r^{n-3}a_1,\ a_{n-1} = r^{n-2}a_1,\ a_n = r^{n-1}a_1.$$

   Y calcular la suma

$$\begin{aligned} a_1 + ra_1 + r^2a_1 + r^3a_1 + \ldots + r^{n-3}a_1 + r^{n-2}a_1 + r^{n-1}a_1 &= a_1(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) \\ &= a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) \quad \text{si } r \neq 1. \end{aligned}$$

   Si $r = 1$, entonces la suma es na_1.

3. Utilizando el resultado de 2, como se quiere calcular la suma de los primeros 5 términos, $n = 5$, además $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{4}$, entonces la suma buscada es

$$1\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5 - 1}{\frac{1}{4} - 1}\right) = \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{3}{4}} = \frac{1023}{1024} \div \frac{3}{4} = \frac{341}{256}.$$

La fracción compleja se calcula como

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Conclusión

La suma parcial de una sucesión geométrica $a_n = a_1 r^{n-1}$, escrita con el símbolo de sumatoria, está dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^n = \begin{cases} a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) & \text{si } r \neq 1 \\ na_1 & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

Problemas

1. Calcula la suma de los primeros 6 términos de la sucesión $a_n = 15(2)^{n-1}$.
2. Calcula la suma de los primeros 6 términos de la sucesión $a_n = 3(-2)^{n-1}$.
3. Calcula la suma de los primeros 5 términos de la sucesión $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \ldots$
4. Calcula la suma $2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{18}\right) + \cdots$ hasta el término 5. Deja expresado con exponentes.

Puede utilizarse la calculadora cuando hay que efectuar potencias grandes. También es recomendable dejar la respuesta expresada en fracción y no aproximar.

Unidad 6

173

Indicador de logro:

2.3 Calcula la suma parcial de una sucesión geométrica.

Secuencia:

Luego de haber establecido el término general de una sucesión geométrica, se deduce la fórmula para calcular la suma parcial de esta.

Propósito:

Para deducir la fórmula de la suma parcial de una sucesión geométrica se calcula primero la suma de las primeras n potencias de un número r. La técnica para calcular esta suma es la tradicional técnica de restarle a la suma, la suma misma multiplicada por r; al realizar esta resta, se cancelan todos los términos excepto el primero y el último. Luego se calcula la suma parcial de una sucesión geométrica con término a_1 cualquiera utilizando el resultado anterior. Finalmente, en el último numeral del Problema inicial se muestra la forma de utilizar la fórmula deducida en el numeral 2.

Solución de problemas:

1. Como $r \neq 1$, entonces

$$S_n = \sum_{i=1}^{6} a_i = a_1\left(\frac{r^6-1}{r-1}\right) = 15\left(\frac{2^6-1}{2-1}\right) = 15(63) = 945.$$

2. Como $r \neq 1$, entonces

$$S_n = \sum_{i=1}^{6} a_i = a_1\left(\frac{r^6-1}{r-1}\right) = 3\left(\frac{(-2)^6-1}{-2-1}\right) = 3\left(-\frac{63}{3}\right) = -63.$$

3. La sucesión es geométrica con razón $r = -\frac{1}{3}$, entonces,

$$S_n = \sum_{i=1}^{5} a_i = a_1\left(\frac{r^5-1}{r-1}\right) = 4\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right) \div \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 4\left(-\frac{244}{243}\right) \div \left(-\frac{4}{3}\right) = 4\left(-\frac{244}{243}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{244}{81}.$$

4. La sucesión es geométrica con razón $r = -\frac{1}{6}$, entonces,

$$S_n = \sum_{i=1}^{5} a_i = a_1\left(\frac{r^5-1}{r-1}\right) = 2\left(\left(-\frac{1}{6}\right)^5 - 1\right) \div \left(-\frac{1}{6} - 1\right) = 2\left(-\frac{7\,777}{6^5}\right) \div \left(-\frac{7}{6}\right) = 2\left(-\frac{7\,777}{6^5}\right) \times \left(-\frac{6}{7}\right) = 2\left(\frac{1\,111}{6^4}\right) = \frac{1\,111}{648}.$$

Fe de errata: en la conclusión la suma se debe expresar de la siguiente forma:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1}$$

2.4 Sucesiones geométricas: suma parcial, parte 2

Problema inicial

¿Cuántos términos de la sucesión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{2}$ y razón –4 deben sumarse para obtener 102.5?

Solución

Se sabe que $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{(-4)^n-1}{-4-1}\right) = 102.5.$

Entonces

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-4)^n}{5}\right) = \frac{1}{10}[1-(-4)^n] = 102.5$$
$$\Rightarrow 1-(-4)^n = 102.5(10) = 1\,025$$
$$\Rightarrow \quad (-4)^n = -1\,024 \qquad \text{------------------ (1)}$$

Un primer análisis que puede hacerse es que, se tiene la potencia de un número negativo y este resulta ser negativo, por lo tanto, n debe ser impar. Como n es impar, $(-4)^n = -4^n$, por lo que resolver (1) es equivalente a resolver $4^n = 1\,024$.

Se escribe 1 024 como potencia de 4: $1\,024 = 4^5$. Al sustituir se obtiene $4^n = 4^5$. Entonces $n = 5$.

Por lo tanto, deben sumarse los primeros 5 términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{2}(-4)^{n-1}$ para obtener 102.5.

Conclusión

Para determinar el número de términos que deben sumarse de una sucesión geométrica para obtener un resultado específico debe resolverse la ecuación exponencial que resulta de igualar la fórmula de la suma parcial con el total que se desea.

Problemas

1. Determina cuántos términos deben sumarse de cada sucesión para obtener el resultado indicado

a) 1, 2, 4, 8, 16, ..., suma parcial 511

b) 2, 6, 18, 54, ..., suma parcial 2 186

c) 4, –20, 100, – 500, ..., suma parcial –10 416

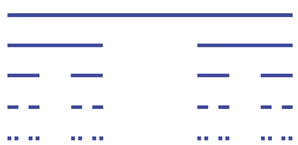
d) $a_n = \frac{1}{3}(2^{n-1})$, suma parcial $\frac{127}{3}$

e) $a_n = \frac{2}{3}(-3)^{n-1}$, suma parcial $-\frac{364}{3}$

f) $a_n = 3\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$, suma parcial $\frac{6\,303}{2\,401}$

2. Determina los posibles valores que pueden obtenerse al calcular una suma parcial de la sucesión 1, –1, 1, –1, 1, ...

3. A partir de un segmento de longitud 1 se construye la siguiente sucesión:



Paso 1. Se divide el segmento en tres partes iguales y se extrae el segmento del medio. Se tienen dos segmentos de longitud $\frac{1}{3}$.

Paso 2. Luego se dividen los otros dos segmentos en tres partes iguales y se extraen los segmentos del medio. Se tienen cuatro segmentos de longitud $\frac{1}{9}$.

Si se continúa este proceso, responde:

a) En el paso n, ¿cuántos segmentos se han extraído?

b) ¿Cuál es la suma de las longitudes de los segmentos que se tienen en el paso 10?

c) ¿En qué paso la suma de las longitudes de los segmentos que se tienen es menor a 0.1?

Indicador de logro:

2.4 Determina el número de términos que deben sumarse de una sucesión geométrica para obtener una suma específica.

Secuencia:

Luego de haber calculado la suma parcial de sucesiones geométricas se hace el proceso inverso: conociendo la suma parcial de una sucesión geométrica, se desea encontrar el número de términos que hay que sumar para obtener dicha suma.

Solución de problemas:

1a) La sucesión es geométrica con razón $r = 2$ y $a_1 = 1$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = 511 \Rightarrow 2^n - 1 = 511 \Rightarrow 2^n = 512 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9.$$

Por lo tanto, hay que sumar 9 términos para obtener 511.

1b) $2\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right) = 2\,186 \Rightarrow 3^n = 2\,187 \Rightarrow 3^n = 3^7 \Rightarrow n = 7$

Hay que sumar 7 términos para obtener 2 186.

1c) $4\left(\frac{(-5)^n - 1}{-5 - 1}\right) = -10\,416 \Rightarrow (-5)^n = 5^6 \Rightarrow n = 6$

Hay que sumar 6 términos.

1d) $\frac{1}{3}\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = \frac{127}{3} \Rightarrow 2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 2^7 \Rightarrow n = 7$

Hay que sumar 7 términos.

1e) $\frac{2}{3}\left(\frac{(-3)^n - 1}{-3 - 1}\right) = -\frac{364}{3} \Rightarrow (-3)^n = 3^6 \Rightarrow n = 6$

Hay que sumar 6 términos.

1f) $3\left(\left(-\frac{1}{7}\right)^n - 1\right) \div \left(-\frac{1}{7} - 1\right) = 3\left(\left(-\frac{1}{7}\right)^n - 1\right) \div \left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{6\,303}{2\,401} \Rightarrow \left(-\frac{1}{7}\right)^n - 1 = -\frac{2\,101}{2\,401} \times \frac{8}{7} \Rightarrow \left(-\frac{1}{7}\right)^n = -\frac{1}{16\,807} = -\frac{1}{7^5}$

$\Rightarrow n = 5$

2. Al sumar algunos términos: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Se van anulando los términos consecutivos, por lo que la suma vale 0 si se suma un número par de términos y vale 1 si se suma un número impar de términos.

3a) Se busca relacionar el número de pasos con el número de segmentos extraídos y el número de segmentos obtenidos.

En el Paso 1 se ha extraído un segmento y quedan 2 segmentos después de extraerlo.

En el Paso 2 se extraen 2 segmentos; estos dos segmentos, más el segmento extraído en el paso anterior, se tienen 3 segmentos extraídos. Luego, por cada segmento que se tenía del paso anterior se obtienen dos segmentos nuevos; por tanto, se tienen $2 \times 2 = 4$ segmentos en el Paso 2.

En el Paso 3, el número de segmentos que se extraen es igual al número de segmentos que se tienen, es decir, 4. Luego, el número de segmentos extraídos hasta este paso es $3 + 4$ (segmentos extraídos en el paso anterior más los segmentos extraídos en el paso actual).

Al construir una tabla con estos datos, se observa lo siguiente:

Paso	Segmentos extraídos	Segmentos obtenidos
1	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$
2	$3 = 1 + 2^1 = 1 + 2^1$	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$7 = 3 + 4 = 1 + 2^1 + 2^2$	$2 \times 4 = 8 = 2^3$
4	$15 = 7 + 8 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3$	$2 \times 8 = 16 = 2^4$
5	$31 = 15 + 16 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$	$2 \times 16 = 32 = 2^5$

Entonces, los segmentos extraídos en el Paso n es igual a $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n-1}$. Esta suma es igual a $\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$.

3b) Se sabe que los segmentos que se tienen en el Paso 1 tienen longitud de $\frac{1}{3}$. Luego, los segmentos del Paso 2 tienen longitud de $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$. En el Paso 3, los segmentos tienen longitud de $\frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^3}$. Por tanto, en el Paso 10, los segmentos tienen longitud de $\frac{1}{3^{10}}$.

En cada paso, todos los segmentos tienen la misma longitud, por lo que la suma de las longitudes del Paso 10 es igual al número de segmentos que hay en dicho paso por la longitud de cada uno de ellos. Es decir,

$$2^{10} \times \frac{1}{3^{10}} = \frac{2^{10}}{3^{10}}.$$

El estudiante puede calcular esta cantidad, sin embargo, es preferible dejarlo indicado.

3c) De acuerdo a 3b), la suma de las longitudes de los segmentos del Paso n es igual a $\frac{2^n}{3^n}$. Entonces,

$$\frac{2^n}{3^n} < 0.1 = \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n > 10.$$

Para calcular el valor de n se utiliza la función logaritmo base 10. $f(x) = \log x$ es creciente, por lo que

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^n > 10 &\Rightarrow \log\left(\frac{3}{2}\right)^n > \log 10 \\ &\Rightarrow n\log\left(\frac{3}{2}\right) > 1 \\ &\Rightarrow n > 1 \div \log\left(\frac{3}{2}\right) = 5.6788... \end{aligned}$$

Es decir, n debe ser mayor que 5.6788... Por lo tanto, la suma de las longitudes de los segmentos será menor que 0.1 en el Paso 6.

2.5 Sucesiones geométricas: problemas

Problema inicial

El tercer término de una sucesión geométrica es 20 y el octavo término es –640. Determina el término general de la sucesión.

Solución

Si a_n es el término general de la sucesión geométrica y r su razón entonces $a_n = a_1 r^{n-1}$.

Se sabe que $a_3 = 20$ y $a_8 = -640$. Pero $a_3 = a_1 r^2 = 20$ y $a_8 = a_1 r^7 = -640$. Si se divide a_8 entre a_3 se tiene

$$\frac{a_8}{a_3} = \frac{a_1 r^7}{a_1 r^2} = r^5 = \frac{-640}{20} = -32.$$

De $r^5 = -32$ puede deducirse que $r = -2$, ya que $(-2)^5 = -32$.

Falta calcular el primer término de la sucesión, y para ello se toma a_3 o a_8 y se utiliza el hecho que $r = -2$.

$$a_3 = a_1(-2)^2 = 4a_1 = 20 \Rightarrow a_1 = 5.$$

Por lo tanto, $a_n = 5(-2)^{n-1}$.

Conclusión

En ocasiones se conocen algunos datos de una sucesión geométrica, y para determinar el término general de esta, se utiliza la definición de sucesión geométrica y los datos conocidos.

Si se conocen dos términos de la sucesión geométrica, para determinar el término general se dividen ambos términos y se resuelve la ecuación que resulta. En este caso, la ecuación es de la forma $r^n = c$, por lo que hay que calcular un número r tal que al elevarlo a la potencia n resulte el número c.

Problemas

1. El cuarto término de una sucesión geométrica es 1 y el séptimo término es $\frac{1}{8}$. Determina el término general y el quinto término.

2. El primer término de una sucesión geométrica es 3 y el tercer término es $\frac{4}{3}$. Determina el término general y el cuarto término.
   Hay dos posibles soluciones.

3. En una sucesión geométrica, el quinto término es 48 y el octavo es 384. Determina el décimo segundo término.

4. ¿Qué término de la sucesión geométrica 2, 6, 18, ... es 13 122?

5. El segundo y quinto término de una sucesión geométrica son 10 y 1 250, respectivamente. ¿Es 31 250 un término de esta sucesión? Si es así, ¿qué término es?

6. Calcula la suma parcial de los primeros 6 términos de la sucesión geométrica cuyo tercer término es 28 y su sexto término es 224.

Unidad 6

Indicador de logro:

2.5 Resuelve problemas sobre sucesiones geométricas si se conocen algunos datos de estas.

Solución de problemas:

1. $\frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1r^6}{a_1r^3} = r^3 = \frac{1}{8} \div 1 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$. Luego, $a_4 = a_1r^3 \Rightarrow 1 = a_1\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow a_1 = 8$. Entonces, $a_5 = a_1r^4 = 8\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2}$.

Además, el término general es $a_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$.

2. Como $a_1 = 3$ y $a_3 = \frac{4}{3}$, entonces $\frac{a_3}{a_1} = r^2 = \frac{4}{3} \div 3 = \frac{4}{9}$. Por lo tanto, $r = \pm\frac{2}{3}$.

- Si $r = \frac{2}{3}$, entonces $a_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ y $a_4 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{9}$.
- Si $r = -\frac{2}{3}$, entonces $a_n = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ y $a_4 = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{9}$.

3. Como $a_5 = 48$ y $a_8 = 384$, entonces $\frac{a_8}{a_5} = r^3 = 384 \div 48 = 8$. Por lo tanto, $r = 2$.

Luego, como $\frac{a_{12}}{a_8} = r^4 = 16$, entonces $a_{12} = 16(384) = 6\,144$.

En el problema 3, también puede resolverse calculando el término general primero y luego calcular a_{12}.

4. La sucesión es geométrica cuyo primer término es 2 y su razón es 3. Entonces,

$$a_n = 2(3)^{n-1} = 13\,122 \Rightarrow 3^{n-1} = 6\,561 = 3^8 \Rightarrow n - 1 = 8 \Rightarrow n = 9.$$

Por lo tanto, 13 122 es el noveno término.

5. Como $a_2 = 10$ y $a_5 = 1\,250$, entonces $\frac{a_5}{a_2} = r^3 = 1\,250 \div 10 = 125$. Por lo tanto, $r = 5$.

Por otra parte, $a_2 = a_1(5)$, es decir, $10 = 5a_1$, por lo que $a_1 = 2$. Entonces,

$$a_n = 2(5)^{n-1} = 31\,250 \Rightarrow (5)^{n-1} = 15\,625 = 5^6 \Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7.$$

Por lo tanto, 31 250 es el séptimo término de la sucesión.

6. Como $a_3 = 28$ y $a_6 = 224$, entonces $\frac{a_6}{a_3} = r^3 = 224 \div 28 = 8$. Por lo tanto, $r = 2$. Además, $a_3 = 28 = a_1(2^2)$, por lo que $a_1 = 7$. Por lo tanto,

$$S_6 = a_1\left(\frac{r^6 - 1}{r - 1}\right) = 7\left(\frac{2^6 - 1}{2 - 1}\right) = 7(63) = 441.$$

2.6 Practica lo aprendido

1. Determina el término general de la sucesión 1, 4, 7, 10, ...
2. Calcula el término 30 de la sucesión aritmética que tiene primer término 2 y diferencia 3.
3. ¿Cuál es el primer término de una sucesión aritmética a_n tal que $a_{50} = 29$ y $d = -3$?
4. Calcula la suma de los primeros 17 términos de $a_n = 2 + \frac{1}{2}(n - 1)$.
5. Calcula la suma de los primeros 12 términos de $a_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}n$.
6. Calcula la suma $5 + 9 + 13 + \cdots + 401$.
7. ¿Cuántos términos deben sumarse de la sucesión –9, –6, –3, ... para obtener 66?
8. ¿Cuántos términos deben sumarse de la sucesión 26, 21, 16, ... para obtener 74?
9. Calcula el término 6 de la sucesión 3, 6, 12, 24, ...
10. El término 7 de una sucesión geométrica es 192 y su razón es 2. Calcula los primeros cuatro términos de la sucesión.
11. En una sucesión geométrica se tiene que $a_8 = 16$, $r = -4$. Determina el valor de a_{12}.
12. Calcula la suma $3 + 6 + 12 + \cdots + 6\,144$.
13. ¿Cuántos términos hay que sumar de la sucesión $a_n = 3(-2)^{n-1}$ para obtener 2 049?
14. ¿Cuántos términos hay que sumar de la sucesión del problema 11 para obtener $-\frac{3\,277}{1\,024}$?

2.7 Problemas de la unidad

1. Los ángulos internos de un triángulo están en sucesión aritmética con diferencia 10°. ¿Cuánto mide cada ángulo?
2. El cuarto término de una sucesión aritmética es 10 y el sexto término es 16. Determina una expresión para el término n-ésimo de la sucesión.
3. El quinto término de una sucesión aritmética es 17 y su diferencia es 2. Determina la suma de los primeros 11 términos de la sucesión.
4. Si el término 6 de una sucesión aritmética es 8 y el término 11 es –2, ¿cuál es el primer término?, ¿cuál es la diferencia?
5. ¿Cuántos términos de la sucesión 2, 8, 14, ... hay que sumar para obtener 290?
6. Una deuda puede ser pagada en 32 semanas pagando \$5 la primera semana, \$8 la segunda semana, \$11 la tercera, y así sucesivamente. Hallar la cantidad de dinero que se debe.
7. Sean a y b las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + A = 0$, y sean c y d las soluciones de la ecuación $x^2 - 12x + B = 0$. Se sabe que a, b, c y d forman, en ese orden, una sucesión geométrica. Determina los valores de A y B.

Indicador de logro:

2.6 Resuelve problemas correspondientes a sucesiones aritméticas y geométricas.

Solución de problemas:

1. Cada término puede obtenerse sumando 3 al término anterior. Entonces, la sucesión es aritmética con diferencia 3 y primer término 1. Por lo tanto, $a_n = 1 + 3(n - 1) = 3n - 2$.

2. El término general es $a_n = 2 + 3(n - 1)$. Entonces $a_{30} = 2 + 3(29) = 89$.

3. $a_{50} = a_1 - 3(49) = 29 \Rightarrow a_1 = 176$.

4. $a_1 = 2$ y $d = \frac{1}{2}$. Entonces,

$$S_{17} = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n-1)d] = \frac{1}{2}(17)\left(4 + \frac{1}{2}(16)\right) = 17(6) = 102.$$

5. $a_1 = \frac{1}{4}$ y $d = \frac{3}{4}$. Entonces,

$$S_{12} = \frac{1}{2}(12)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(11)\right) = (6)\left(\frac{35}{4}\right) = \frac{105}{2}.$$

6. La serie es aritmética ya que sus términos pertenecen a una sucesión aritmética de primer término 5 y diferencia 4. Para calcular la suma falta conocer cuántos elementos se están sumando. Entonces,

$$5 + 4(n-1) = 401 \Rightarrow n - 1 = 99 \Rightarrow n = 100.$$

Por tanto, $5 + 9 + 13 + \cdots + 401 = \frac{1}{2}(100)(5 + 401) = 50(406) = 20\,300$.

7. La sucesión es aritmética, con diferencia $d = 3$ y primer término $a_1 = -9$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2a_1 + (n-1)d] = \frac{1}{2}n[-18 + 3(n-1)] = 66 \Rightarrow n(n-7) = 44 \Rightarrow n^2 - 7n - 44 = 0 \Rightarrow (n-11)(n+4) = 0.$$

Entonces, $n = 11$ o $n = -4$. Por lo tanto, se deben sumar 11 términos para obtener 66.

8. $a_n = 26 - 5(n-1)$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[52 - 5(n-1)] = 74 \Rightarrow n(57 - 5n) = 148 \Rightarrow 5n^2 - 57n + 148 = 0 \Rightarrow (5n - 37)(n - 4) = 0.$$

Entonces, $n = \frac{37}{5}$ o $n = 4$. Pero $\frac{37}{5}$ no es entero, por lo tanto, se deben sumar 4 términos para obtener 74.

9. La sucesión es geométrica con primer término 3 y razón 2. Por lo tanto, $a_n = 3(2^{n-1})$. Luego, $a_6 = 3(2^5) = 96$.

10. De los datos se tiene que $a_7 = 192 = a_1(2^6)$; es decir, $a_1 = 3$. Por tanto, $a_1 = 3$, $a_2 = 3 \times 2 = 6$, $a_3 = 6 \times 2 = 12$ y $a_4 = 12 \times 2 = 24$.

11. $\frac{a_{12}}{a_8} = \frac{a_1 r^{11}}{a_1 r^7} = r^4 = (-4)^4 \Rightarrow a_{12} = (-4)^4 a_8 = (-4)^4(16) = 4\,096$.

En el problema 10 se ha utilizado la propiedad de las sucesiones geométricas: un término puede obtenerse multiplicando el término anterior por la razón.

12. La suma es de la sucesión geométrica del problema 9. Calculando qué término es 6 144:

$$a_n = 3(2^{n-1}) = 6\,144 = 3 \times 2^{11} \Rightarrow n - 1 = 11 \Rightarrow n = 12.$$

Luego, $S_{12} = a_1\left(\frac{r^{12} - 1}{r - 1}\right) = 3\left(\frac{2^{12} - 1}{2 - 1}\right) = 3(2^{12} - 1).$

Este resultado puede quedar expresado con el exponente, pero también puede calcularse utilizando propiedades de diferencias de cuadrados:

$$3(2^{12} - 1) = 3(2^6 - 1)(2^6 + 1) = 3(2^3 - 1)(2^3 + 1)(2^6 + 1) = 3(8 - 1)(8 + 1)(64 + 1) = 3(7)(9)(65) = 12\,285.$$

Por tanto, $S_{12} = 3(2^{12} - 1) = 12\,285.$

Motivar al estudiante a que calcule $2^{12} - 1$ sin utilizar la calculadora y sin desarrollar 2^{12}.

13. $S_n = 3\left(\frac{(-2)^n - 1}{-2 - 1}\right) = 2\,049 \Rightarrow (-2)^n - 1 = -2\,049 \Rightarrow (-2)^n = -2\,048 \Rightarrow (-2)^n = -2^{11} \Rightarrow n = 11.$

14. Hay que calcular a_1:

$$a_8 = a_1(-4)^7 \Rightarrow 16 = a_1(-4)^7 \Rightarrow a_1 = -\frac{16}{16\,384} = -\frac{1}{1\,024}.$$

Luego, $S_n = -\frac{1}{1\,024}\left(\frac{(-4)^n - 1}{-4 - 1}\right) = -\frac{3\,277}{1\,024} \Rightarrow \frac{(-4)^n - 1}{5} = -3\,277$

$$\Rightarrow (-4)^n - 1 = -16\,385$$

$$\Rightarrow (-4)^n = -16\,384$$

$$\Rightarrow (-4)^n = -4^7$$

$$\Rightarrow n = 7$$

Por lo tanto, hay que sumar 7 términos.

Indicador de logro:

2.7 Resuelve problemas correspondientes a sucesiones aritméticas y geométricas.

Solución de problemas:

1. Sean a_1, a_2 y a_3 los tres ángulos del triángulo. Entonces $a_1 + a_2 + a_3 = 180°$. Por otra parte, a_1, a_2 y a_3 cumplen que $a_2 = a_1 + 10°$ y $a_3 = a_1 + 20°$. Por lo tanto,

$$a_1 + a_2 + a_3 = 180° \Rightarrow a_1 + (a_1 + 10°) + (a_1 + 20°) = 180° \Rightarrow 3a_1 + 30° = 180° \Rightarrow 3a_1 + 30° = 180° \Rightarrow 3a_1 = 150°.$$

Entonces, $a_1 = 50°$, $a_2 = 60°$ y $a_3 = 70°$.

2. $a_4 = 10$ y $a_6 = 16$. Como $a_6 - a_4 = 16 - 10 = 6 = 2d$, entonces $d = 3$. Por otra parte, $a_4 = a_1 + 3d$, por lo que $a_1 = a_4 - 3d = 10 - 9 = 1$.

Por lo tanto, $a_n = 1 + 3(n - 1) = 3n - 2$.

3. Como $a_5 = 17$ y $d = 2$, entonces $a_1 = a_5 - 2(4) = 17 - 8 = 9$. Entonces,

$$S_{11} = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n-1)d] = \frac{1}{2}(11)\Big(18 + 2(10)\Big) = 11(19) = 209.$$

4. Como $a_6 = 8$ y $a_{11} = -2$, entonces $a_{11} - a_6 = -2 - 8 = -10 = a_1 + 10d - (a_1 + 5d) = 5d$, entonces $d = -2$. Luego, $a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow a_1 = a_6 - 5d = 8 + 10 = 18$.

Por lo tanto, el primer término es 18 y la diferencia es -2.

5. La sucesión es aritmética, con primer término 2 y diferencia 6. Entonces,

$$S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}n\Big(4 + 6(n-1)\Big) = n(3n - 1) = 290.$$

Es decir, $3n^2 - n - 290 = (3n + 29)(n - 10) = 0$. Entonces, $n = -\frac{29}{3}$ o $n = 10$. Por lo tanto, hay que sumar 10 términos para obtener 290.

6. La sucesión 5, 8, 11, ... es una sucesión aritmética de diferencia 3. Para determinar el total de la deuda, hay que calcular S_{32} para $a_n = 5 + 3(n - 1)$.

$$S_{32} = \frac{1}{2}(32)(10 + 3(31)) = 16(103) = 1\,648.$$

Por tanto, la deuda es de 1,648 dólares.

7. Como a y b son soluciones de $x^2 - 3x + A = 0$, entonces, $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - 3x + A$. Es decir, $a + b = 3$ y $ab = A$. De igual forma se deduce para c y d: cumplen que $c + d = 12$ y $cd = B$. Por otra parte, a, b, c y d forman una sucesión geométrica; suponiendo que la razón de la sucesión es r, entonces, $b = ar$, $c = ar^2$ y $d = ar^3$.

Si se sustituye esto último en $a + b = 3$ y $c + d = 12$ se obtiene lo siguiente:

$$a + b = 3 \Rightarrow a + ar = 3 \Rightarrow a(1 + r) = 3,$$
$$c + d = 12 \Rightarrow ar^2 + ar^3 = 12 \Rightarrow ar^2(1 + r) = 12.$$

De las ecuaciones se observa que $a \neq 0$ y $r \neq -1$, se puede dividir la segunda ecuación entre la primera y se tiene que

$$\frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)} = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2.$$

- Si $r = 2$, entonces de $a(1 + r) = 3$ se tiene $a = 1$. Entonces $b = ar = 2$, $c = ar^2 = 4$ y $d = ar^3 = 8$.
  Por lo tanto, $A = ab = 2$ y $B = cd = 32$.
- Si $r = -2$, entonces de $a(1 + r) = 3$ se tiene $a = -3$. Entonces $b = ar = 6$, $c = ar^2 = -12$ y $d = ar^3 = 24$.
  Por lo tanto, $A = ab = -18$ y $B = cd = -288$.