Unidad 7. Métodos de conteo

Competencia de la unidad

Plantear estrategias para realizar conteos sobre diferentes situaciones del entorno, utilizando los principios básicos de conteo, las permutaciones y combinaciones.

Relación y desarrollo

Segundo año de bachillerato

Unidad 7: Métodos de conteo

- Teoría de conjuntos
- Las permutaciones
- Las combinaciones

↓

Unidad 8: Probabilidad

- Axiomas de Kolmogórov
- Probabilidad condicional

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Teoría de conjuntos	1	1. Teoría de conjuntos
	1	2. Operaciones con conjuntos
	1	3. Cardinalidad de conjuntos
	1	4. Aplicaciones de la cardinalidad de conjuntos
2. Las permutaciones	1	1. Diagrama de árbol
	1	2. Principio de la suma
	1	3. Principio de la multiplicación
	1	4. Factorial de un número
	1	5. Permutaciones
	1	6. Permutaciones y métodos de conteo
	1	7. Permutaciones con repetición
	1	8. Permutaciones circulares
	1	9. Configuraciones circulares
	1	10. Permutaciones con objetos idénticos
	1	11. Conteo por complemento
	1	12. Practica lo aprendido
	1	Prueba de las lecciones 1 y 2
3. Las combinaciones	1	1. Combinaciones
	1	2. Combinaciones y principios de conteo
	1	3. Conteo de caminos

Lección	Horas	Clases
	1	4. Demostraciones utilizando conteo de caminos
	1	5. Identidades combinatorias contando de 2 formas
	1	6. Triángulo de Pascal
	1	7. Binomio de Newton
	1	8. Técnica de los separadores
	1	9. Practica lo aprendido
	2	10. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la lección 3

27 horas clase + prueba de las lecciones 1 y 2 + prueba de la lección 3.

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Teoría de conjuntos
Se establece una base teórica no axiomática de la teoría de conjuntos, en la cual se abordan algunas definiciones y operaciones intuitivas acerca de los conjuntos y sus propiedades, enfocado principalmente a la cardinalidad de conjuntos (que servirá para el conteo de objetos), lo cual será retomado en la unidad de probabilidad, en donde se trabaja con conjuntos llamados eventos.

Lección 2: Las permutaciones
Luego que se establecen las primeras nociones para realizar conteo de objetos, se puede formalizar un poco más las estrategias más efectivas de conteo, iniciando con los principios básicos de la suma y la multiplicación, los cuales serán utilizados en buena parte de las clases siguientes, profundizando en especial el uso de las permutaciones en diferentes condiciones, desde las permutaciones lineales, circulares, en donde se permite repetición, en donde hay objetos idénticos, etc.; esta lección tendrá mucha correspondencia con la siguiente. Durante toda la lección se dará énfasis al análisis, planteamiento y resolución de problemas, pudiendo evaluarse una respuesta indicada con permutaciones (sin realizar el cálculo exacto) como correcta siempre y cuando todo el análisis y los argumentos sean correctos.

Lección 3: Las combinaciones
En esta lección se definirán las combinaciones y se establecerá su diferencia respecto de las permutaciones, esta lección abarcará contenidos un poco más complejos, que llegan hasta la demostración de identidades combinatorias, justificación del patrón del triángulo de Pascal y deducción del binomio de Newton, etc.; por esta razón en algunas clases será necesario una mayor intervención por parte del docente. De igual manera como en la lección 2, se puede valorar evaluar como correctas las respuestas indicadas con combinatorios, puesto que lo esencial de esta unidad es el análisis y resolución correctas de los problemas.

Lección 1 Teoría de conjuntos

1.1 Teoría de conjuntos

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos que pueden ser números, letras, personas, y prácticamente cualquier tipo de cosas. Cada objeto del conjunto recibe el nombre de **elemento**. Si a es un elemento de A, se denota por $a \in$ A o A $\ni a$, y se lee "a pertenece a A" o "A contiene al elemento a". La cantidad de elementos que tiene un conjunto se conoce como **cardinalidad del conjunto** y dado un conjunto A se denota la cardinalidad de A por n(A) (o en ocasiones como |A|). Un conjunto se denota encerrando entre "llaves" todos los elementos del conjunto. Si los elementos están expresados en forma de lista, se dice que el conjunto está expresado por **extensión**, por ejemplo: A = {1, 2, 3, a, b, c}.

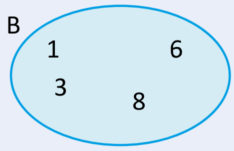
Si los elementos están expresados por una regla o característica de todos los elementos, se dice que el conjunto está expresado por **comprensión**, por ejemplo:

{x| x es un número positivo menor que 6}.

El conjunto se lee: los x tal que x es un número positivo menor que 6.

Se entiende como el conjunto formado por los "x" tal que (o de modo que) dicho "x" cumple ser un número positivo menor que 6.

Para representar gráficamente un conjunto a menudo se utiliza un óvalo en cuyo interior se ubican todos los elementos del conjunto, esta representación se conoce como **diagrama de Venn**, por ejemplo el conjunto B = {1, 3, 6, 8} se puede representar en un diagrama de Venn así:



Ejemplo 1

Determina la cardinalidad del conjunto A = {2, 4, 6, 8, 10} y si es posible, expresa el conjunto por comprensión.
La cardinalidad de A es: n(A) = 5.
Se puede expresar por comprensión como: A = {x| x es un número positivo par no mayor que 10}.
También se puede expresar como A = {Los números positivos pares no mayores que 10}.

Ejemplo 2

Expresa los siguientes conjuntos por extensión (si es posible) y determina la cardinalidad del conjunto.

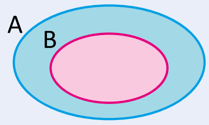
a) A = {Los números positivos impares menores a 8}
b) B = {x| x = 2n, para n en los números naturales}

a) A = {1, 3, 5, 7} y n(A) = 4.
b) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} y n(A) = ∞.

Para denotar conjuntos cuyos elementos siguen un patrón pero no terminan, se pueden utilizar puntos suspensivos, como en el literal b, y en este caso la cardinalidad del conjunto se denota por infinito, ∞.

Definición

Un conjunto B es **subconjunto** de un conjunto A si se cumple que todo elemento de B es elemento de A (Si $a \in$ B entonces $a \in$ A), y se denota por B ⊂ A o A ⊃ B, que se lee "B incluido en A" o "A incluye a B".



Por ejemplo, si A = {2, 3, 5, 8, 9} y B = {2, 5}, entonces B ⊂ A.

El conjunto que no posee elementos se conoce como **conjunto vacío**, se denota por ∅, y se cumple que n(∅) = 0. Para todo conjunto A se cumple que ∅ ⊂ A.

El conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto A se conoce como **conjunto potencia de A**. Si A = {a, b, c} , entonces el conjunto potencia de A es {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}.

Indicador de logro:

1.1 Define los conceptos sobre teoría de conjuntos y diagramas de Venn.

Secuencia:

En este punto los estudiantes ya cuentan con los conceptos matemáticos necesarios sobre números, álgebra, geometría, funciones, y estadística descriptiva; únicamente hace falta desarrollar una parte de estadística inferencial, y para ello es necesario abordar la teoría de conjuntos que brinda las herramientas necesarias para estudiar los métodos de conteo y posteriormente la probabilidad.

Propósito:

En esta clase se proveen todas las definiciones sobre conjuntos y subconjuntos, por ello se dividen, en la primera Definición se profundiza el concepto de conjunto y sus características; luego se ejemplifican otra Definición donde se trabaja lo correspondiente al concepto de subconjunto y sus características.

En esta clase no hay problemas para resolver porque es muy conceptual (el objetivo es que comprendan y recuerden las definiciones), y por ello se priorizan las definiciones, sin embargo, si los estudiantes comprenden todos los conceptos rápidamente se puede considerar que resuelvan los siguientes problemas:

1. Expresa los siguientes conjuntos por extensión (si es posible) y determina la cardinalidad del conjunto.
   a) A = {Los números positivos pares menores que 10}
   b) B = $\{x \mid 0 < x < 13$ con x número natural$\}$
   c) C = $\{y \mid y$ es divisible por 3$\}$
   d) D = $\{n \mid -5 < n < 7$, con n impar y $n \in \mathbb{Z}\}$

2. Expresa los siguientes conjuntos por comprensión.
   a) A = {5, 7, 9, 11, 13}
   b) B = {–8, –4, 0, 4, 8}
   c) C = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}
   d) D = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...}

Para ejemplificar los diagramas de Venn el docente puede retomar algunos conjuntos de los planteados en los problemas y representarlos con diagramas de Venn.

3. Escribe $\subset$, $\supset$ o = según la relación de inclusión que se cumple.
   a) {3, 7} ____ {1, 3, 5, 7}   b) {0, –4, 7, –1} ____ {–4}   c) $\mathbb{R}$ ____ $\mathbb{Q}$ d) {} ____ ∅   e) {∅} ____ ∅

4. Determina el conjunto potencia de A = {2, 4, –3, 0}, luego encuentra su cardinalidad.

Solución de problemas:

1a) A = {2, 4, 6, 8}, n(A) = 4
1b) B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, n(B) = 12
1c) C = {... –9, –6, –3, 0, 3, 6, 9, ...}, n(C) = ∞
1d) D = {–3, –1, 1, 3, 5}, n(D) = 5

2a) A = $\{n \mid 4 < n < 14$, con n impar y $n \in \mathbb{Z}\}$
2b) B = $\{y \mid -9 < y < 9$, y es divisible por 4$\}$
2c) C = $\{x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$
2d) D = $\{p \mid p$ es un número primo$\}$

Para expresar un conjunto por comprensión, pueden existir muchas alternativas, en este caso el docente debe verificar si las soluciones de los estudiantes son correctas, aunque no sea la que se está presentando.

{∅} es el conjunto formado por el conjunto vacío.

3a) {3, 7} $\underline{\ \subset\ }$ {1, 3, 5, 7}   **3b)** {0, –4, 7, –1} $\underline{\ \supset\ }$ {–4}   **3c)** $\mathbb{R}$ $\underline{\ \supset\ }$ $\mathbb{Q}$ **3d)** {} $\underline{\ =\ }$ ∅   **3e)** {∅} $\underline{\ \supset\ }$ ∅

4. Potencia de A = {∅, {2}, {4}, {–3}, {0}, {2, 4}, {2, –3}, {2, 0}, {4, –3}, {4, 0}, {–3, 0}, {2, 4, –3}, {2, 4, 0}, {2, –3, 0}, {4, –3, 0}, A}; y su cardinalidad es 16.

Lección 1

1.2 Operaciones con conjuntos

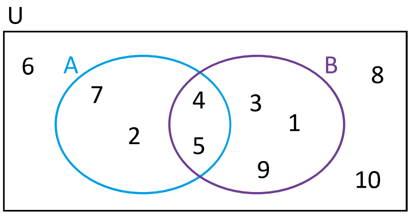
Problema inicial

Considerando los conjuntos A = {2, 4, 5, 7} y B = {1, 3, 4, 5, 9}.

a) Determina el conjunto de los elementos que están en A o en B.
b) Determina el conjunto de los elementos que están tanto en A como en B.
c) Determina el conjunto de los elementos que están en A pero no están en B.
d) Considerando U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Determina el conjunto de los elementos que están en U pero no están en A.

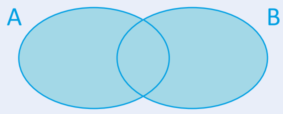
Solución

a) El conjunto es: {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}.
b) El conjunto es: {4, 5}.
c) El conjunto es: {2, 7}.
d) El conjunto es: {1, 3, 6, 8 ,9, 10}.

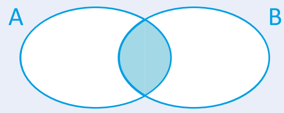


Definición

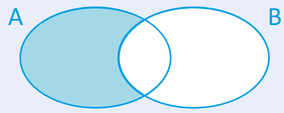
La operación entre dos conjuntos A y B, que forma el conjunto de los elementos que están en A o en B se conoce como **unión de conjuntos**, se denota A⋃B, y se lee "A unido B".



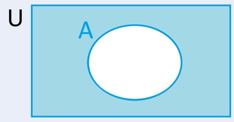
La operación entre dos conjuntos A y B, que forma el conjunto de los elementos que están tanto en A como en B se conoce como **intersección de conjuntos**, se denota A⋂B, y se lee "A intersectado B".



La operación entre dos conjuntos A y B, que forma el conjunto de los elementos que están en A pero no están en B se conoce como **diferencia de conjuntos**, y se denota A – B.



La operación entre dos conjuntos A y U que cumplen que A ⊂ U y toma los elementos de U que no están en A se conoce como **complemento** del conjunto A, y se denota A^c. Al conjunto U a menudo se le conoce como **conjunto universo** o simplemente **universo**.



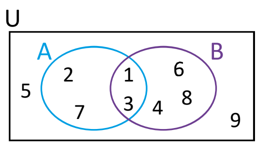
Problemas

1. Para cada literal, determina los conjuntos A⋃B, A⋂B, A – B y B – A.

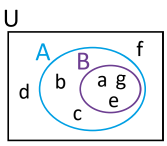
a) A = {a, c, d, e, f, g}, B = {b, d, f, h}
b) A = {–2, 0, 1, 4, 7}, B = {–2, 1, 4}
c) A = {a, b}, B = {a, b, c, d}
d) A = {2, 3, 4}, B = {5, 6, 7}

2. Para cada diagrama de Venn, determina los conjuntos A, B, A⋃B, A⋂B, A – B, B – A, A^c y B^c .

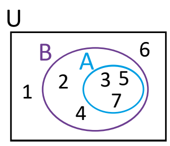
a)



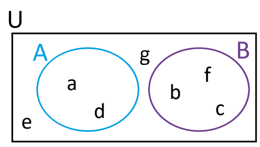
b)



c)



d)



Indicador de logro:

1.2 Determina la unión, intersección, diferencia y complemento de conjuntos.

Secuencia:

Después que los estudiantes han asimilado la definición de conjunto, su notación y algunas otras definiciones en torno a los conjuntos, en esta clase los estudiantes aprenderán sobre las operaciones más importantes sobre conjuntos.

Propósito:

En el Problema inicial se espera que los estudiantes realicen las operaciones partiendo del uso de conectivos lógicos intuitivos como el "y" y el "o", que están relacionados con las operaciones entre conjuntos que se definen en esta clase.

Solución de problemas:

1a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; $A \cap B = \{d, f\}$; $A - B = \{a, c, e, g\}$; $B - A = \{b, h\}$.

1b) $A \cup B = \{-2, 0, 1, 4, 7\} = A$; $A \cap B = \{-2, 1, 4\} = B$; $A - B = \{0, 7\}$; $B - A = \{\} = \emptyset$.

1c) $A \cup B = \{a, b, c, d\} = B$; $A \cap B = \{a, b\} = A$; $A - B = \{\} = \emptyset$; $B - A = \{c, d\}$.

1d) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = A$; $A \cap B = \{\} = \emptyset$; $A - B = \{2, 3, 4\} = A$; $B - A = \{5, 6, 7\} = B$.

2a) $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{1, 3, 4, 6, 8\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $A - B = \{2, 7\}$, $B - A = \{4, 6, 8\}$, $A^c = \{4, 5, 6, 8, 9\}$ y $B^c = \{2, 5, 7, 9\}$.

2b) $A = \{a, b, c, e, g\}$, $B = \{a, e, g\}$, $A \cup B = \{a, b, c, e, g\} = A$, $A \cap B = \{a, e, g\} = B$, $A - B = \{b, c\}$, $B - A = \{\} = \emptyset$, $A^c = \{d, f\}$ y $B^c = \{b, c, d, f\}$.

2c) $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7\} = B$, $A \cap B = \{3, 5, 7\} = A$, $A - B = \{\} = \emptyset$, $B - A = \{2, 4\}$, $A^c = \{1, 2, 4, 6\}$ y $B^c = \{1, 6\}$.

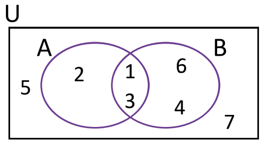
2d) $A = \{a, d\}$, $B = \{b, c, f\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, f\}$, $A \cap B = \{\} = \emptyset$, $A - B = \{a, d\}$, $B - A = \{b, c, f\}$, $A^c = \{b, c, e, f, g\}$ y $B^c = \{a, d, e, g\}$.

1.3 Cardinalidad de conjuntos

Problema inicial

Considerando los conjuntos A y B representados por el diagrama de Venn de la derecha, resuelve:

a) ¿Cuántos elementos tiene A?
b) ¿Cuántos elementos tiene B?
c) ¿Cuántos elementos tiene A∩B?
d) ¿Cuántos elementos tiene A∪B?
e) ¿Cuántos elementos tiene A^c?



Solución

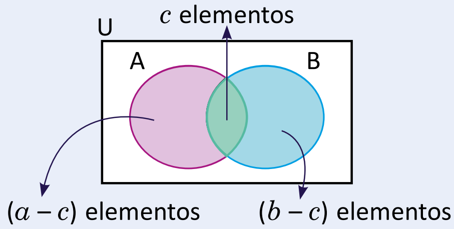
El conjunto universo es: U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

a) Identificando el conjunto A = {1, 2, 3}, entonces el número de elementos de A será: n(A) = 3.
b) Identificando el conjunto B = {1, 3, 4, 6}, entonces el número de elementos de B será: n(B) = 4.
c) Identificando el conjunto A∩B = {1, 3}, entonces el número de elementos de A∩B será: n(A∩B) = 2.
d) Identificando el conjunto A∪B = {1, 2, 3, 4, 6}, entonces el número de elementos de A∪B será: n(A∪B) = 5.
e) Identificando el conjunto A^c = {4, 5, 6, 7}, entonces el número de elementos de A^c será: $n(A^c) = 4$.

En general

Considerando los conjuntos A y B de modo que $n(A) = a$, $n(B) = b$ y $n(A \cap B) = c$, entonces se cumple que

$$n(A \cup B) = (a - c) + (b - c) + c$$
$$= a + b - c.$$

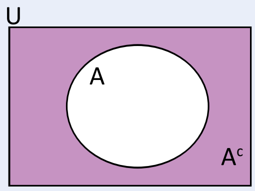


Y esto es equivalente a tener:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

De forma parecida analizando A^c como los elementos de U que no están en A se puede concluir que

$$n(A^c) = n(U) - n(A).$$



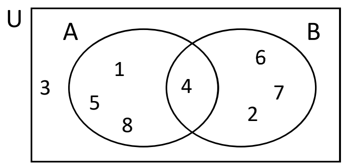
En general, para los conjuntos U, A y B se cumple que

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),}$$
$$\boldsymbol{n(A^c) = n(U) - n(A).}$$

Problemas

1. Considerando el diagrama de Venn de la derecha, resuelve los literales.

a) $n(A \cup B)$ b) $n(U)$ c) $n(A^c)$ d) $n(B^c)$
e) $n[(A \cup B)^c]$ f) $n(A^c \cap B^c)$ g) $n[(A \cap B)^c]$ h) $n(A^c \cup B^c)$



Utilizando diagramas de Venn puedes comprobar que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Estas propiedades se conocen como **identidades de De Morgan**.

2. Considerando los conjuntos U, A y B en los que se cumple que $n(U) = 60$, $n(A) = 35$, $n(B) = 21$ y $n(A \cap B) = 14$, determina:

a) $n(A \cup B)$ b) $n(A^c)$ c) $n(B^c)$ d) $n[(A \cup B)^c]$ e) $n[(A \cap B)^c]$ f) $n(A - B)$ g) $n(A \cap B^c)$

Indicador de logro:

1.3 Calcula la cardinalidad de conjuntos y de sus operaciones.

Secuencia:

Una vez teniendo las operaciones sobre conjuntos, es posible analizar resultados sobre la cardinalidad de conjuntos definida por las operaciones con conjuntos, en esta parte se da un énfasis especial a la unión de conjuntos.

Propósito:

El uso de la notación n(A) tiene la intención de no confundir a los estudiantes con la notación de valor absoluto, el contenido de esta clase tiene relación con la unidad de probabilidad, por lo cual esta notación será retomada en esa unidad.

Solución de problemas:

Para este problema es mejor que los estudiantes primero calculen $n(A) = 4$, $n(B) = 4$ y $n(A \cap B) = 1$, para luego aplicar el resultado de la parte En general:

1a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 4 - 1 = 7$

1b) $n(U) = 8$

1c) $n(A^c) = n(U) - n(A) = 8 - 4 = 4$

1d) $n(B^c) = n(U) - n(B) = 8 - 4 = 4$

1e) $n[(A \cup B)^c] = n(U) - n(A \cup B) = 8 - 7 = 1$

1f) $n(A^c \cap B^c) = 1$

1g) $n[(A \cap B)^c] = n(U) - n(A \cap B) = 8 - 1 = 7$

1h) $n(A^c \cup B^c) = n(A^c) + n(B^c) - n(A^c \cap B^c) = 4 + 4 - 1 = 7$

En este problema el docente debe invitar a los estudiantes a que apliquen los resultados de la conclusión, y no cuenten todos los elementos de los conjuntos a partir del diagrama de Venn. Únicamente el literal f es necesario hacerlo de esta manera.

2a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 35 + 21 - 14 = 42$

2b) $n(A^c) = n(U) - n(A) = 60 - 35 = 25$

2c) $n(B^c) = n(U) - n(B) = 60 - 21 = 39$

2d) $n[(A \cup B)^c] = n(U) - n(A \cup B) = 60 - 42 = 18$

2e) $n[(A \cap B)^c] = n(U) - n(A \cap B) = 60 - 14 = 46$

2f) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 35 - 14 = 21$

2g) Calculando $n(A \cup B^c) = n(B^c) + n(A \cap B) = 39 + 14 = 53$,
luego $n(A \cap B^c) = n(A) + n(B^c) - n(A \cup B^c) = 35 + 39 - 53 = 21$.

Para las soluciones de 2f) y 2g) el docente puede recomendar hacer un diagrama de Venn y comprobar por qué es necesario hacer el cálculo de la manera planteada. Además, en 2g) se puede concluir que $n(A \cap B^c) = n(A) + n(B^c) - n(A \cup B^c) = n(A) + n(B^c) - [n(B^c) + n(A \cap B)] = n(A) - n(A \cap B) = 35 - 14 = 21$.

Si el docente considera conveniente puede mostrar mediante diagramas de Venn las leyes de De Morgan:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\qquad$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

De lo cual se puede comprobar el hecho de que la solución de 1e) sea igual a la de 1f), y la solución de 1g) sea igual a la de 1h).

1.4 Aplicaciones de la cardinalidad de conjuntos

Problema inicial

Considerando los números naturales del 1 al 100, resuelve:

a) ¿Cuántos múltiplos de 3 hay?

b) ¿Cuántos que no son múltiplos de 3 hay?

c) ¿Cuántos múltiplos tanto de 3 como de 5 hay?

d) ¿Cuántos múltiplos de 3 o de 5 hay?

Solución

Considerando U como el conjunto de los números naturales del 1 al 100. Denotando como A al conjunto de los números en U que son múltiplos de 3 y como B al conjunto de los múltiplos de 5 que están en U.

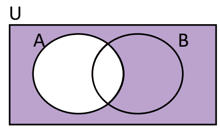
A = {3(1), 3(2), 3(3), ... , 3(31), 3(32), 3(33)}

B = {5(1), 5(2), 5(3), ... , 5(18), 5(19), 5(20)}

a) La cantidad de múltiplos de 3 entre 1 y 100 es igual a la cardinalidad del conjunto A, es decir, $n(A) = 33$.

b) La cantidad de números que no son múltiplos de 3 entre 1 y 100 es igual a la cardinalidad del complemento de A, es decir:

$$n(A^c) = n(U) - n(A) = 100 - 33 = 67.$$

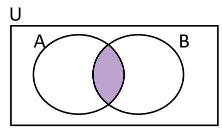


c) El conjunto formado por los múltiplos de 3 y de 5 es el mismo conjunto que el de los múltiplos de 15 que hay entre 1 y 100.

$A \cap B = \{15(1), 15(2), 15(3), 15(4), 15(5), 15(6)\}$.

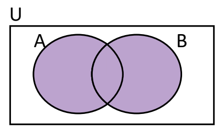
Entonces $n(A \cap B) = 6$.

Los múltiplos comunes de 3 y 5 son los múltiplos del mínimo común múltiplo de ellos, es decir, 15.



d) El conjunto formado por los múltiplos de 3 o de 5 está dado por el conjunto $A \cup B$.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 20 - 6 = 47.$



Conclusión

La teoría de conjuntos puede resultar muy útil para realizar conteo de situaciones que se modelan a partir de conjuntos.

Problemas

1. Determina cuántos números del 1 al 100 no son múltiplos de 3 ni de 5. Luego realiza el diagrama de Venn que representa dicha situación.

2. Considerando los números naturales del 1 al 100, resuelve:
   a) ¿Cuántos múltiplos de 2 hay?
   b) ¿Cuántos que no son múltiplos de 3 hay?
   c) ¿Cuántos múltiplos de 2 y de 3 hay?
   d) ¿Cuántos múltiplos de 2 o de 3 hay?
   e) ¿Cuántos números que no son múltiplos de 2 ni de 3 hay?

3. La tabla muestra la cardinalidad de la intersección de los conjuntos de la fila y de la columna. Considerando los conjuntos A y B, llena la tabla con la información que falta:

	A	A^c	Total
B	42		56
B^c		10	
Total	76		100

Unidad 7

181

Indicador de logro:

1.4 Resuelve problemas aplicando las propiedades de la cardinalidad de las operaciones con conjuntos.

Secuencia:

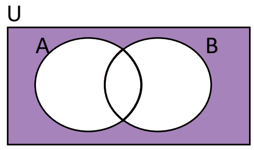
Para finalizar la lección sobre teoría de conjuntos, se pueden comenzar a introducir problemas de conteo que se solucionen a partir de las propiedades de la cardinalidad de conjuntos.

Propósito:

En el Problema inicial se espera que los estudiantes resuelvan utilizando conceptos de conjuntos, en los Problemas se continúa con la misma situación del Problema inicial, y siempre son dos números primos para facilitar el cálculo del mcm.

Solución de problemas:

1. Utilizando los resultados del Problema inicial, y analizando que los números del 1 al 100 que no son múltiplos de 3 ni de 5 equivale a determinar $n[(A\cup B)^c] = n(U) - n(A\cup B) = 100 - 47 = 53$.



2a) Considerando U como el conjunto de los números naturales del 1 al 100. Denotando como A al conjunto de los números en U que son múltiplos de 2 y como B al conjunto de los múltiplos de 3 que están en U.

$A = \{2(1), 2(2), 2(3), \ldots, 2(48), 2(49), 2(50)\}$

$B = \{3(1), 3(2), 3(3), \ldots, 3(31), 3(32), 3(33)\}$

La cantidad de múltiplos de 2 entre 1 y 100 es igual a la cardinalidad del conjunto A, es decir, $n(A) = 50$.

2b) La cantidad de números que no son múltiplos de 3 entre 1 y 100 es igual a la cardinalidad del complemento de B, es decir:

$$n(B^c) = n(U) - n(B) = 100 - 33 = 67.$$

2c) El conjunto formado por los múltiplos de 2 y de 3 es el mismo conjunto que el de los múltiplos de 6 que hay entre 1 y 100.

$A\cap B = \{6(1), 6(2), 6(3), \ldots, 6(14), 6(15), 6(16)\}$.

Entonces $n(A\cap B) = 16$.

Para determinar la cantidad de múltiplos de un número, que hay entre 1 y 100, se puede dividir 100 por dicho número (del que se desea saber la cantidad de múltiplos) y la cantidad de múltiplos será el cociente de la división efectuada.

2d) El conjunto formado por los múltiplos de 2 o de 3 está dado por el conjunto $A\cup B$.

$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B) = 50 + 33 - 16 = 67$.

2e) $n[(A\cup B)^c] = n(U) - n(A\cup B) = 100 - 67 = 33$.

3. Para encontrar el valor de la casilla que está en la segunda columna de la primera fila, se calcula $n(A^c\cap B) = n(B) - n(A\cap B) = 56 - 42 = 14$.

Para encontrar el valor de la casilla que está en la primera columna de la segunda fila, se calcula $n(A\cap B^c) = n(A) - n(A\cap B) = 76 - 42 = 34$.

Para encontrar el valor de la casilla que está en la tercera columna de la segunda fila, se calcula $n(B) = n(A\cap B^c) + n(A^c\cap B^c) = 34 + 10 = 44$.

Para encontrar el valor de la casilla que está en la segunda columna de la tercera fila, se calcula $n(A^c) = n(A^c\cap B) + n(A^c\cap B^c) = 14 + 10 = 24$, o bien, $n(A^c) = n(U) - n(A) = 100 - 76$.

En el problema 3 se pretende que los estudiantes conozcan y trabajen con las tablas de doble entrada, lo cual será de utilidad en la siguiente unidad; si los estudiantes no logran llegar a este problema, solamente habría que abordar este concepto en la siguiente unidad durante la clase de probabilidad condicional.

	A	A^c	Total
B	42	14	56
B^c	34	10	44
Total	76	24	100

Lección 2 Las permutaciones

2.1 Diagrama de árbol

Problema inicial

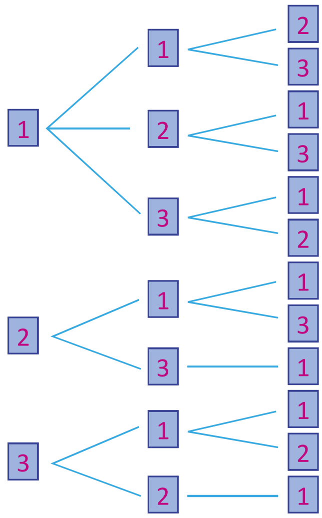
Hay 4 tarjetas numeradas de la siguiente manera $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$; determina de cuántas formas se pueden colocar tres de ellas en una fila.

Solución

Analizando la posición de las tarjetas como muestra el diagrama de la derecha.

A partir de él se puede observar que cada camino que se pueda tomar es una forma en que se pueden colocar las tres cartas, y estas se pueden contar a partir de la última columna de tarjetas numeradas.

Por lo tanto hay 12 formas.



Definición

El diagrama en donde se listan todas las posibilidades de un suceso por casos y se representa por líneas rectas se conoce como **diagrama de árbol**, el diagrama de la solución es un ejemplo de diagrama de árbol.

En los eventos sobre extracción de objetos, se dice que es **con reemplazo** cuando al extraer un objeto este se devuelve al grupo de extracción, y **sin reemplazo** cuando el objeto no se devuelve.

Problemas

1. Utiliza un diagrama de árbol para determinar de cuántas formas se pueden extraer sin reemplazo 3 bolitas de color rojo, amarillo y verde (una de cada color) de una bolsa, si se extrae una bolita a la vez.

2. Utiliza un diagrama de árbol para calcular cuántas formas hay para repartir 4 dulces de diferente sabor entre 4 personas, si ninguna puede quedar sin dulces.

3. María tiene 2 pantalones, 1 falda, 2 blusas y 3 pares de zapatos, todos diferentes. Utiliza diagrama de árbol para determinar cuántas formas diferentes tiene María para vestirse.

4. Utiliza un diagrama de árbol para calcular el total de maneras que hay para extraer 2 cartas con reemplazo de entre 5 cartas diferentes.

5. Se lanzan tres dados diferentes. Determina el número de casos donde la suma sea 5.

En el primer dado solo puede caer 1, 2 o 3, sino ya no podría sumar 5.

Indicador de logro:

2.1 Utiliza el diagrama de árbol para resolver situaciones sobre conteo.

Secuencia:

Habiendo estudiado los conceptos fundamentales sobre teoría de conjuntos, y habiéndola utilizado como una herramienta para resolver problemas de conteo, en esta lección se introducen las herramientas básicas de conteo hasta el concepto de permutaciones.

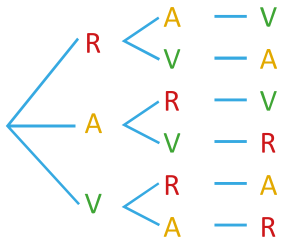
Propósito:

En esta clase se pretende iniciar con una herramienta intuitiva como el diagrama de árbol para la resolución de problemas de conteo, luego se necesitará una herramienta más eficiente para problemas que impliquen números más grandes. En los Problemas, el criterio de dificultad es la forma que tendrá el diagrama de árbol en cada uno.

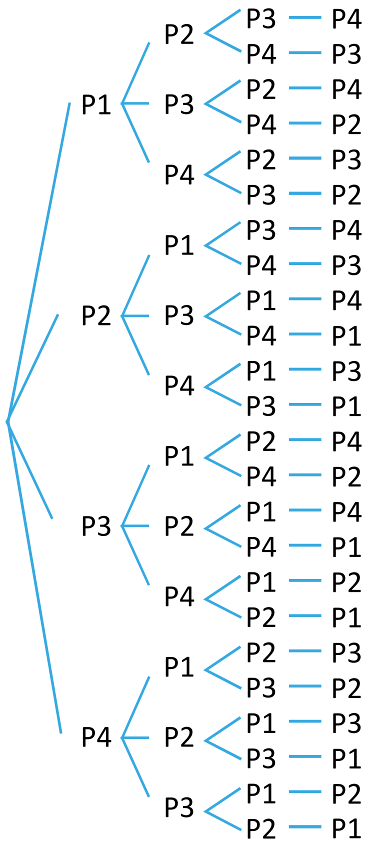
Solución de problemas:

1. En la primera extracción puede sacarse cualquiera de las 3 bolitas, luego cualquiera de las 2 bolitas que quedaron y finalmente la bolita restante. De modo que la extracción se puede realizar de 6 formas diferentes.

RAV, RVA, ARV, AVR, VRA, VAR.

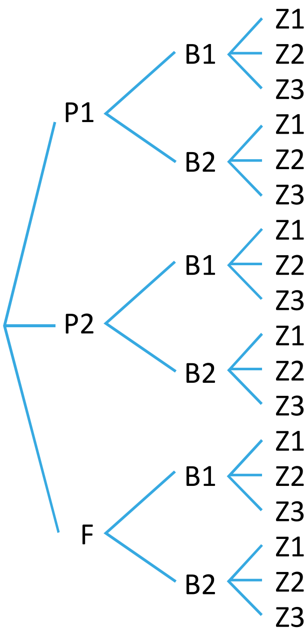


2.



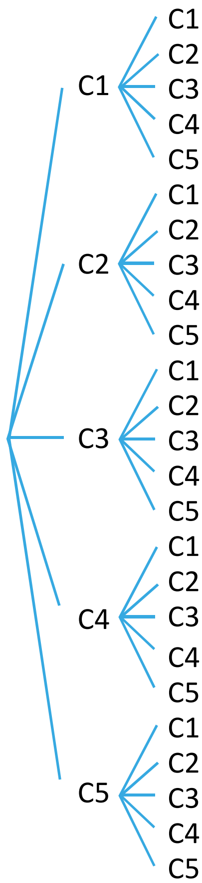
Hay 24 formas diferentes de repartir los dulces.

3.



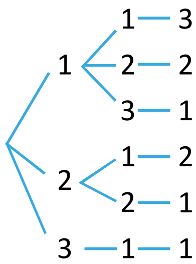
Hay 18 formas diferentes en que puede vestirse María.

4.



Hay 25 formas diferentes de extraer las cartas.

5.

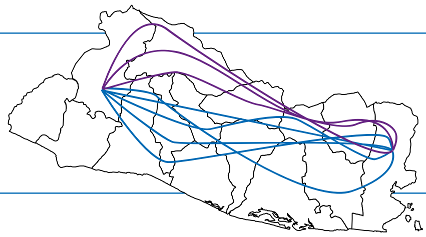


Hay 6 formas diferentes de obtener 5 al tirar 3 dados.

2.2 Principio de la suma

Problema inicial

¿De cuántas maneras se puede viajar de Santa Ana a La Unión, si pasando por San Salvador hay 5 caminos diferentes y pasando por Chalatenango hay 3 formas diferentes? Considera que ningún camino pasa por ambos lugares.



Solución

Para viajar de Santa Ana a La Unión hay 2 opciones: pasar por San Salvador o bien pasar por Chalatenango, y ninguna ruta pasa por ambos lugares a la vez. De forma que para saber el total de maneras que hay para ir de Santa Ana a La Unión es 5 + 3 = 8.

Conclusión

Si un evento o condición A puede ocurrir de a maneras, un evento o condición B puede ocurrir de b maneras, y ambos eventos no ocurren al mismo tiempo, entonces el total de maneras en que puede ocurrir el evento A o B (es decir uno de los dos) es $a + b$. Este resultado se conoce como **principio de la suma**.

Ejemplo

En una zapatería tienen 4 tipos de sandalias, 2 tipos de zapatillas y 3 tipos de botas, ¿cuántos tipos de zapatos diferentes ofrece la zapatería?

La zapatería ofrece 3 tipos de zapatos: sandalias, de las cuales hay 4 tipos diferentes; zapatillas, de las cuales hay 2 tipos diferentes; y botas, de las cuales hay 3 tipos de botas diferentes.

Así se cumple que la zapatería ofrece 4 + 2 + 3 = 9 tipos de zapatos diferentes.

Problemas

1. En una zona de comedores hay 3 locales en donde se puede comprar, si el primero tiene 4 opciones de comida, el segundo 5 y el tercero 7, determina de cuántas formas se puede comprar comida en alguno de los locales.

2. María tiene 4 centros escolares para realizar sus horas sociales, en el primer centro escolar tiene 2 opciones, en el segundo tiene 3 opciones, en el tercero tiene 4 opciones y en el cuarto solamente una opción para realizar las horas sociales. Determina cuántas opciones tiene en total María para realizar sus horas sociales.

3. Si se lanzan 2 dados al mismo tiempo, de cuántas maneras la suma de los puntos es 7 o 4.

4. En la situación del problema 3, determina cuántas maneras hay para que la diferencia de los puntos sea 2 o 3.

Indicador de logro:

2.2 Aplica el principio de la suma para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Luego de haber introducido el diagrama de árbol como otra herramienta para resolver problemas de conteo, se estudiará uno de los principios básicos de conteo, conocido como principio de la suma.

Propósito:

En el Ejemplo y en los Problemas se espera que el estudiante identifique fácilmente las condiciones para aplicar el principio de la suma, además en los problemas 3 y 4 es necesario que los estudiantes apliquen lo aprendido sobre el diagrama de árbol.

Solución de problemas:

1. Puesto que no puede comprar comida en dos locales, los eventos pueden ser, comprar en el local 1 (4 opciones), comprar en el local 2 (hay 5 opciones) o comprar en el local 3 (hay 7 opciones), por lo tanto, aplicando el principio de la suma, el total de formas en que se puede comprar comida en alguno de los locales es: 4 + 5 + 7 = 16.

2. De manera análoga al problema anterior, María no puede hacer las horas sociales en dos centros escolares a la vez, por lo tanto, aplicando el principio de la suma, el total de formas que tiene María para realizar sus horas sociales es: 2 + 3 + 4 + 1 = 10.

3. Puesto que al lanzar 2 dados al mismo tiempo no puede caer 7 y 4 a la misma vez, se pueden identificar los eventos: cae 7 o cae 4; y analizando cada caso:

Para que caiga 7

Dado 1	Dado 2
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

Para que caiga 4

Dado 1	Dado 2
1	3
2	2
3	1

Entonces, hay 6 opciones para que caiga 7, y 3 para que caiga 4, por lo tanto, por el principio de la suma, el total de maneras para que al lanzar 2 dados caiga 7 o 4 es: 6 + 3 = 9.

4. Puesto que al lanzar 2 dados la diferencia no puede ser 2 y 3 al mismo tiempo, se pueden identificar los eventos, la diferencia es 2 o la diferencia es 3; y analizando cada caso:

Diferencia 2

Dado 1	Dado 2
1	3
2	4
3	1
	5
4	2
	6
5	3
6	4

Diferencia 3

Dado 1	Dado 2
1	4
2	5
3	6
4	1
5	2
6	3

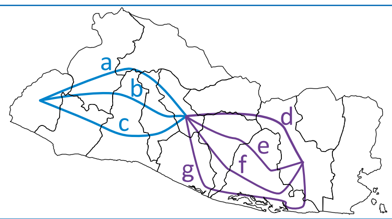
Entonces, hay 8 opciones para que la diferencia sea 2, y 6 para que la diferencia sea 3, por lo tanto, por el principio de la suma, el total de maneras para que al lanzar 2 la diferencia sea 2 o 3 es: 8 + 6 = 14.

Lección 2

2.3 Principio de la multiplicación

Problema inicial

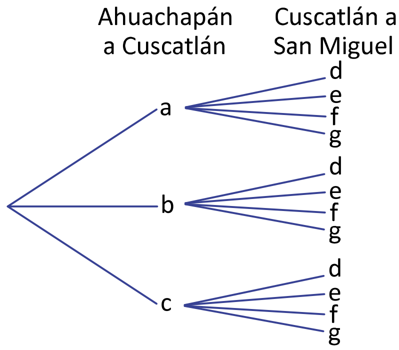
¿De cuántas maneras se puede viajar de Ahuachapán a San Miguel pasando por Cuscatlán, si para llegar de Ahuachapán a Cuscatlán hay 3 formas diferentes de llegar a, b y c, y para llegar de Cuscatlán a San Miguel hay 4 formas diferentes para llegar d, e, f y g?



Solución

Para salir de Ahuachapán a Cuscatlán existen 3 formas diferentes, y por cada una de ellas al llegar a Cuscatlán hay 4 formas diferentes de llegar a San Miguel, entonces el total de maneras para llegar de Ahuachapán a San Miguel pasando por Cuscatlán es 3 × 4 = 12 maneras diferentes.

Las 12 maneras son: ad, ae, af, ag, bd, be, bf, bg, cd, ce, cf y cg.



Conclusión

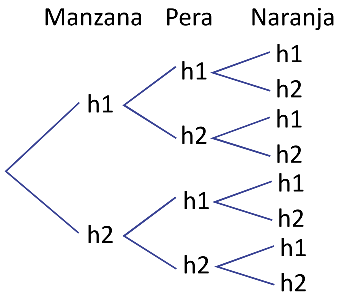
Si un evento o condición A puede ocurrir de a maneras, y para cada una de estas maneras un evento o condición B puede ocurrir de b maneras, entonces el total de formas en que puede ocurrir el evento A y el evento B (es decir los dos) es ab. Este resultado se conoce como **principio de la multiplicación**.

Es posible que para resolver algunos problemas sea necesario aplicar tanto el principio de la suma como el principio de la multiplicación.

Ejemplo

José quiere repartir una manzana, una pera y una naranja a sus dos hermanos. Determina de cuántas maneras puede repartir las frutas si incluso puede darse el caso que le dé a un hermano todo y al otro nada.

Tomando como referencia la fruta, para cada una de estas, la manzana tiene 2 posibilidades: que se dé al hermano 1 o al hermano 2; luego, la pera también tiene 2 posibilidades, y la naranja igualmente tiene 2 posibilidades, entonces José puede repartir la fruta de 2 × 2 × 2 = 8 maneras diferentes.



Problemas

1. Determina de cuántas maneras se puede formar una pareja de un niño y una niña de entre 4 niños y 3 niñas.

2. En un comedor hay 3 tipos de platos fuertes, 2 tipos de arroz y 3 tipos de ensalada. Determina de cuántas maneras se puede formar un almuerzo escogiendo entre un plato fuerte, un tipo de arroz y una ensalada.

3. Determina de cuántas maneras se pueden repartir una pera y un mango entre 3 personas diferentes. Considera que no se pueden dar ambas frutas a una sola persona.

4. María tiene 4 calzonetas y 3 camisetas para baloncesto, y tiene 5 calzonetas y 4 camisetas para fútbol. ¿De cuántas maneras puede vestirse María para jugar baloncesto o fútbol?

Indicador de logro:

2.3 Aplica el principio de la multiplicación para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Otro contenido básico para resolver problemas sobre conteo es el principio de la multiplicación, el cual se puede abordar directamente a partir del diagrama de árbol.

Propósito:

En el Ejemplo se presenta el diagrama de árbol para que sirva de apoyo para los estudiantes, sin embargo, en la resolución de los Problemas no es necesario que los estudiantes realicen dicho diagrama, es suficiente con que identifiquen las condiciones y apliquen el principio de la multiplicación directamente.

Solución de problemas:

1. El evento "ser niño" puede ocurrir de 4 maneras, y por cada uno de ellos hay 3 niñas con las que se puede hacer la pareja, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras de formar una pareja con estas condiciones es: 4 × 3 = 12.

2. Puesto que hay 3 tipos de platos fuertes, y por cada uno de ellos se puede escoger entre 2 tipos de arroz, lo cual, por el principio de la multiplicación, se puede calcular que hay 3 × 2 = 6 posibles maneras de escoger un plato fuerte y un tipo de arroz; luego por cada posible combinación de plato fuerte y arroz hay 3 tipos de ensalada, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras en que se puede formar un almuerzo escogiendo entre un plato fuerte, un tipo de arroz y una ensalada es 6 × 3 = 18.

Para este problema también pueden considerarse válidas las soluciones en donde se multiplican de una sola vez las tres cantidades: 3 × 2 × 3 = 18.

Se presenta la otra forma porque formalmente en la clase el principio de la multiplicación está definido únicamente para 2 eventos, sin embargo, los estudiantes pueden analizar inductivamente que dicho resultado se cumple para n eventos, con n finito.

3. Considerando que se reparte primero la pera, esta tendrá 3 posibilidades (cualquiera de las 3 personas), luego, por cada una de ellas, el mango tendrá 2 posibilidades (las 2 personas a las que no se les da la pera), por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras para repartir una pera y un mango entre 3 personas es: 3 × 2 = 6.

4. Primero hay que notar que María no puede ir vestida para jugar baloncesto y fútbol al mismo tiempo, entonces se tiene los casos: "vestida para jugar baloncesto" y "vestida para jugar fútbol", luego analizando cada caso:

Vestida para jugar baloncesto

Tiene 4 calzonetas para baloncesto y por cada una de ellas puede usar cualquiera de las 3 camisetas para baloncesto que tiene, entonces, aplicando el principio de la multiplicación, puede vestirse de 4 × 3 maneras para jugar baloncesto.

Vestida para jugar fútbol

Tiene 5 calzonetas para fútbol y por cada una de ellas puede usar cualquiera de las 4 camisetas para fútbol que tiene, entonces, aplicando el principio de la multiplicación, puede vestirse de 5 × 4 maneras para jugar fútbol.

Por lo tanto, aplicando el principio de la suma a estos casos, se tiene que el total de maneras en que se puede vestir María para jugar baloncesto o fútbol es: (4 × 3) + (5 × 4) = 12 + 20 = 32.

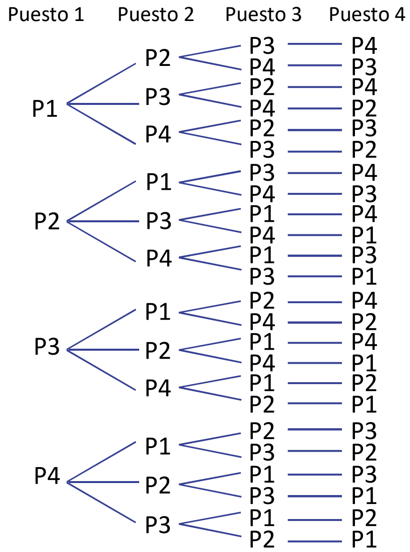
Lección 2

2.4 Factorial de un número

Problema inicial

Determina de cuántas maneras es posible ordenar 4 personas en una fila.

Solución



En la primera posición de la fila puede colocarse cualquiera de las 4 personas, entonces hay 4 posibilidades.

Luego, en la segunda posición de la fila ya solo se tienen 3 personas (porque en la primera posición ya quedó una) entonces hay 3 posibilidades.

Análogamente, para la tercera posición solo hay 2 posibilidades y para la última posición solo habrá 1 posibilidad.

Por lo tanto, por principio de la multiplicación, el total de maneras de arreglar 4 personas en una fila es:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Hay 24 maneras diferentes para ordenar 4 personas en una fila.

Definición

Para un número natural n, se define el **factorial de n** como el producto de los números consecutivos desde 1 hasta n. Se denota el factorial de n por $n!$, y se lee "n factorial". Entonces:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Observa que $n! = n \times (n-1)!$

Ejemplo

Calcula o simplifica el resultado de las operaciones con factorial.

a) $3!$

$3! = 3 \times 2 \times 1$
$= 6$

b) $6! \div 4!$

$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}}$
$= 30$

c) $4! - 3!$

$4! - 3! = (4 \times 3!) - 3!$
$= 3!(4-1)$
$= 6(3)$
$= 18$

d) $\frac{2018!}{2018}$

$\frac{2018!}{2018} = \frac{\cancel{2018} \times 2017!}{\cancel{2018}}$
$= 2017!$

Problemas

Primero calcula lo que está entre paréntesis.

1. Calcula el resultado de las operaciones con factorial.

a) $4!$ b) $5!$ c) $(5-3)!$ d) $6! - 4!$
e) $(2+3)!$ f) $4! + 3!$ g) $4! \times 3!$ h) $(2 \times 3)!$

2. Calcula o simplifica las siguientes expresiones con factoriales.

a) $\frac{5!}{3!}$ b) $\left(\frac{6}{3}\right)!$ c) $\frac{4!}{6}$ d) $\frac{2019!}{2019}$ e) $\frac{7!}{(7-2)!}$ f) $\frac{7!}{2!(7-2)!}$ g) $\frac{9!}{2!(3!)(4!)}$

3. Determina el valor de x.

a) $x! = 110(x-2)!$ b) $12x! + 5(x+1)! = (x+2)!$

4. Determina de cuántas maneras se pueden arreglar las letras de la palabra ÁRBOL.

Unidad 7

Indicador de logro:

2.4 Calcula el resultado de expresiones con factoriales.

Secuencia:

Luego de tener las herramientas básicas para resolver problemas de conteo, se tomará un poco de tiempo para introducir la notación y definición del factorial de un número, el cual será retomado posteriormente para expresar las permutaciones y combinaciones.

Propósito:

En esta clase se espera que los estudiantes practiquen la parte operativa de los factoriales (para evitar al máximo el uso de la calculadora) y puedan realizar algunas simplificaciones utilizando la definición del factorial de un número. Las expresiones del problema 2 están relacionadas con diferentes tipos de permutaciones y combinaciones, para que en las clases correspondientes, se profundice más en el análisis y resolución de los problemas que en el cálculo del resultado final.

Solución de problemas:

1a) $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

1b) $5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

1c) $(5 - 3)! = 2! = 2 \times 1 = 2$

1d) $6! - 4! = 720 - 24 = 696$

1e) $(2 + 3)! = 5! = 120$

1f) $4! + 3! = 24 + 6 = 30$

1g) $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$

1h) $(2 \times 3)! = 6! = 720$

Se recomienda que los estudiantes no utilicen calculadora para estos problemas. La intención es que analicen que en general no se cumple que la suma, resta y multiplicación de factoriales da como resultado el factorial de la suma, resta y multiplicación.

2a) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$

2b) $\left(\frac{6}{3}\right)! = 2! = 2$

2c) $\frac{4!}{6} = \frac{4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}{\cancel{6}} = 4$

2d) $\frac{2\,019!}{2\,019} = \frac{\cancel{2\,019} \times 2\,018!}{\cancel{2\,019}} = 2\,018!$

2e) $\frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 42$

2f) $\frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{\overset{42}{\cancel{7!}}}{2!\underset{1}{\cancel{5!}}} = \frac{42}{2} = 21$

2g) $\frac{9!}{2!(3!)(4!)} = \frac{9 \times \overset{4}{\cancel{8}} \times 7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4!}}{\underset{1}{\cancel{2}}(\underset{1}{\cancel{6}})(\underset{1}{\cancel{4!}})} = 1\,260$

El docente debe orientar a los estudiantes a utilizar la definición del factorial para simplificar y facilitar los cálculos en cada problema, para el literal g), no es necesario calculadora, solamente deben hacerse las multiplicaciones en un orden adecuado, primero $4 \times 5 = 20$, luego $9 \times 7 = 63$ y finalmente $63 \times 20 = 1260$.

3a) $x! = 110(x-2)! \Rightarrow x(x-1)\cancel{(x-2)!} = 110\cancel{(x-2)!} \Rightarrow x^2 - x - 110 = 0 \Rightarrow (x-11)(x+10) = 0 \Rightarrow x = 11$ o $x = -10$, pero para que la definición de la clase tenga sentido, x debe ser positivo, por lo tanto, la única solución de la ecuación es $x = 11$.

3b) $12x! + 5(x+1)! = (x+2)! \Rightarrow 12\cancel{x!} + 5(x+1)\cancel{x!} = (x+2)(x+1)\cancel{x!} \Rightarrow 12 + 5x + 5 = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 5$ o $x = -3$, pero para que la definición de la clase tenga sentido, x debe ser positivo, por lo tanto, la única solución de la ecuación es $x = 5$.

4. Puesto que las letras de la palabra ÁRBOL son todas diferentes entre sí, de manera análoga al Problema inicial, el primer puesto tendrá 5 opciones, el segundo puesto tendrá 4 (quitando la que quedó en el primer puesto), y así sucesivamente se tendrá que hay $5! = 120$ maneras de arreglar las letras de la palabra ÁRBOL.

Lección 2

2.5 Permutaciones

Problema inicial

Determina la cantidad de maneras en que se puede colocar 3 vocales diferentes en una fila.

Solución

Se pueden considerar los 3 puestos de la siguiente manera.

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{\qquad}} \qquad \underset{\text{Segundo}}{\underline{\qquad}} \qquad \underset{\text{Tercero}}{\underline{\qquad}}$$

Para elegir la vocal que estará en el primer puesto hay 5 posibilidades (cualquiera de las 5 vocales, a, e, i, o, u).

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{\ 5\ }} \qquad \underset{\text{Segundo}}{\underline{\qquad}} \qquad \underset{\text{Tercero}}{\underline{\qquad}}$$

Luego para el segundo y tercer puesto quedarán únicamente 4 y 3 posibilidades respectivamente.

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{\ 5\ }} \times \underset{\text{Segundo}}{\underline{\ 4\ }} \times \underset{\text{Tercero}}{\underline{\ 3\ }}$$

Por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras de colocar 3 de las 5 vocales en una fila es: 5 × 4 × 3 = 60.

Conclusión

Una secuencia ordenada de objetos donde el orden importa se conoce como **permutación**.

El total de permutaciones que se pueden realizar tomando r de n $(0 \leq r \leq n)$ está dado por:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Observa que $n\mathrm{P}0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$.

Este total se denota por $n\mathrm{P}r$, y se lee "n permuto r", es decir

$$n\mathrm{P}r = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(r-1))}_{r \text{ factores}} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

El total de maneras de ordenar n objetos diferentes es $n!$, por otro lado, con la fórmula de permutaciones se tiene que $n\mathrm{P}n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$, y esto debe ser $n!$, por lo tanto se cumple que $0! = 1$.

Ejemplo

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos del 1 al 9, si no se repite ningún dígito?

Al tomar 3 cifras, es importante el orden entre ellas (forman números diferentes), entonces considerando la permutación tomando 3 de 9 objetos, 9P3 = 9 × 8 × 7 = 504. Por lo tanto, se pueden formar 504 números.

$$9\mathrm{P}3 = \underbrace{9 \times 8 \times 7}_{3 \text{ factores}}$$

Problemas

1. ¿Cuántos números de 2 cifras sin repetir se pueden formar con los dígitos del 1 al 5?
2. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 3 caramelos de diferente sabor para 6 estudiantes, considerando que ningún estudiante recibe más de un caramelo?
3. Calcula la cantidad de maneras en que se puede elegir un presidente, un vicepresidente y un tesorero de un grupo de 6 personas.
4. Determina la cantidad de maneras que hay para sentar 5 personas en 3 asientos.
5. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar 5 personas en una fila, si una persona específica de ellas debe estar al inicio?

Indicador de logro:

2.5 Utiliza las permutaciones para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Luego que ya se han visto las herramientas y estrategias básicas para resolver problemas sobre conteo, se introduce la definición formal de permutación, el énfasis principal de esta clase no debe ser el cálculo, sino la comprensión, modelación y solución de los problemas utilizando las permutaciones.

Propósito:

En algunos libros de matemática, normalmente se hace la diferencia entre permutaciones y variaciones, las primeras como ordenamientos de todos los objetos de los que se dispone y las segundas como ordenamientos de una parte de estos objetos, sin embargo, en el libro de texto no se hace la diferencia para no introducir demasiadas definiciones que puedan confundir al estudiante, además de que no genera ningún problema definir las permutaciones como se hace en el libro de texto; esto se hace con el objetivo de enfatizar la resolución de los problemas, y que la notación o el cálculo no sean una dificultad extra para ello.

Solución de problemas:

1. Se pueden considerar los dos puestos como se hizo en la Solución del Problema inicial, es una permutación tomando 2 de 5 objetos, el primero tendrá 5 opciones (cualquiera de los 5 dígitos) y el segundo 4 (puesto que no se pueden repetir). Por lo tanto, se pueden formar ${}_5P_2 = 20$ números de 2 cifras sin repetir con los dígitos del 1 al 5.

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{5}} \times \underset{\text{Segundo}}{\underline{4}}$$

2. En este problema hay que tener cuidado entre cuáles son los espacios en blanco y cuáles son los objetos que se colocarán, si se consideran los estudiantes como los espacios y se quieren colocar los caramelos como objetos, se vuelve un problema un poco más complicado que si se consideran los caramelos como los espacios y los estudiantes como los objetos, es una permutación tomando 3 de 6 objetos, para este último caso el primer caramelo tendría 6 opciones (ser dado a cualquiera de los 6 estudiantes), el segundo caramelo tendría 5 opciones (puesto que ningún estudiante recibe más de un caramelo, se saca el estudiante que recibe el primero), y finalmente el tercer caramelo tendría 4 opciones, por lo tanto, el total de maneras de repartir los 3 caramelos entre los 6 estudiantes es ${}_6P_3 = 120$.

3. Dado que los 3 puestos son diferentes, es una permutación tomando 3 de 6 objetos, para el presidente se tienen 6 opciones, para el vicepresidente 5 y para el tesorero se tienen 4, por lo tanto, el total de maneras en que se pueden elegir los puestos de un grupo de 6 personas es ${}_6P_3 = 120$.

4. Considerando los asientos como los espacios en blanco, es una permutación tomando 3 de 5 objetos, en el primer asiento puede ir cualquiera de las 5 personas, luego el otro espacio tendrá 4 opciones, y el último espacio tendrá 3 opciones, por lo tanto, la cantidad de maneras que hay para sentar a 5 personas en 3 asientos es ${}_5P_3 = 60$.

$$\underset{\text{Asiento 1}}{\underline{5}} \times \underset{\text{Asiento 2}}{\underline{4}} \times \underset{\text{Asiento 3}}{\underline{3}}$$

5. Dado que hay una persona específica que debe estar al inicio, se coloca dicha persona y luego se arreglan las demás, lo cual se puede hacer de 4!, por lo tanto, las 5 personas bajo estas condiciones se pueden arreglar de 4! = 24.

$$\text{Persona específica} \longrightarrow \underset{\text{Lugar 1}}{\underline{1}} \times \underset{\text{Lugar 2}}{\underline{4}} \times \underset{\text{Lugar 3}}{\underline{3}} \times \underset{\text{Lugar 4}}{\underline{2}} \times \underset{\text{Lugar 5}}{\underline{1}}$$

2.6 Permutaciones y métodos de conteo

Problema inicial

Determina cuántas formas hay para ordenar 3 niños y 4 niñas en fila, si todos los niños deben estar juntos.

Solución

Se puede considerar los niños como un solo bloque y luego arreglar únicamente 5 objetos en fila (las 4 niñas y el bloque de niños).

___	___	___	___ ___ ___	___
Niña	Niña	Niña	Niños	Niña

Se pueden ordenar los 5 elementos (las 4 niñas y el bloque de los niños) de 5! maneras, y luego, se puede ordenar el bloque de los niños de 3! maneras.

5	4	3	2	1
Niña	Niña	Niña	3 2 1 Niños	Niña

Y aplicando el principio de la multiplicación, se tiene que el total de maneras que hay para ordenar 3 niños y 4 niñas de modo que los 3 niños estén juntos es $5! \times 3! = 720$.

Conclusión

En permutaciones es común utilizar la estrategia de considerar un conjunto de elementos que deben ir juntos como un solo objeto, y ordenar tanto los elementos del bloque como todos los objetos, aplicando el principio de la multiplicación.

Ejemplo

Determina de cuántas maneras se pueden ordenar 3 hombres y 4 mujeres en fila, de tal manera que los hombres no estén a la par (uno a la par de otro).

Las maneras de colocar las 4 mujeres en una fila se puede hacer de 4! maneras. Entonces los hombres pueden estar en cualquiera de los espacios que se marcan en la figura de abajo.

___ Mujer ___ Mujer ___ Mujer ___ Mujer ___

Entonces los hombre se pueden arreglar separados de $5P3$ maneras. Aplicando el principio de la multiplicación, el total de formas para arreglar 3 hombres y 4 mujeres de modo que los hombres no están uno a la par de otro es $4! \times 5P3 = 24 \times 60 = 1\,440$.

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para ordenar 4 hombres y 3 mujeres, si los 4 hombres deben estar juntos siempre.
2. Se tiene 9 libros de historia y 6 de matemática (todos distintos), ¿cuántas formas hay para ordenar 5 libros en un estante si se debe cumplir que estos 5 libros son de una misma materia?
3. ¿Cuántas cadenas de 6 letras diferentes se pueden formar si las primeras 2 deben ser vocales y las últimas 4 consonantes utilizando las letras de la "a" a la "j"?
4. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una fila 4 hombres y 4 mujeres, si estos deben ir intercalados?
5. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 4 estudiantes en 6 sillas colocadas en una fila, si dos específicos de ellos siempre se sientan juntos (sin dejar sillas vacías de por medio)?

Indicador de logro:

2.6 Integra las permutaciones con los principios de la suma y la multiplicación para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Luego de utilizar el concepto de permutación para resolver problemas sobre conteo, en esta clase se resolverán problemas en los que se tengan que idear estrategias para modelar situaciones más complejas, además en algunos problemas será necesario aplicar los principios de la suma y multiplicación.

Propósito:

En los Problemas se utilizará la estrategia de considerar un conjunto de objetos como un solo elemento de otro conjunto, y se contarán las permutaciones tanto en el conjunto más pequeño como en el más grande, para ello será necesario aplicar el principio de la multiplicación, en otros problemas también se aplicará el principio de la suma.

Solución de problemas:

1. Analizando de manera análoga a como se resolvió el Problema inicial, considerando los 4 hombres juntos se pueden ordenar de 4! maneras, y luego considerando el conjunto de los 4 hombres como un solo elemento y agregando las 3 mujeres, esto se puede ordenar de (1 + 3)! = 4! maneras; por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de formas para ordenar 4 hombres y 3 mujeres, si los 4 hombres deben estar juntos siempre es 4! × 4! = 24 × 24 = 576.

$$\underset{\text{Mujer}}{\underline{4}} \times \underset{\text{Mujer}}{\underline{3}} \times \underset{\underset{\text{Hombres}}{\underline{4}\times\underline{3}\times\underline{2}\times\underline{1}}}{\underline{2}} \times \underset{\text{Mujer}}{\underline{1}}$$

En algunos problemas el cálculo exacto requiere calculadora, pero puede considerarse correcto si el estudiante deja indicados los factoriales y las permutaciones.

2. Para este problema se pueden dar dos casos que no pueden suceder al mismo tiempo, pueden ser libros de historia o de matemática; si se colocarán 5 de los 9 libros de historia en el estante, esto se puede hacer de ${}_9P_5$ = 15 120 maneras diferentes, por otro lado, si se colocaran 5 de los 6 libros de matemática en el estante, esto se puede hacer de ${}_6P_5$ = 720 maneras diferentes; por lo tanto, aplicando el principio de la suma, el total de formas que hay para ordenar 5 libros en el estante bajo las condiciones del problemas es ${}_9P_5 + {}_6P_5$ = 15 120 + 720 = 15 840.

3. Para las primeras dos posiciones se tienen 3 vocales entre la "a" y la "j", es decir hay ${}_3P_2$ = 6 formas de ordenar la dos vocales que se requieren; además entre la "a" y la "j" hay 7 consonantes, entonces hay ${}_7P_4$ = 840 maneras de ordenar las últimas cuatro posiciones; por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de cadenas que se pueden formar es ${}_3P_2 \times {}_7P_4$ = 6 × 840 = 5 040.

4. Para cumplir las condiciones del problema se pueden dar dos casos, la fila puede comenzar con un hombre o con una mujer, para el primer caso los hombres se pueden ordenar de 4! maneras y las mujeres de 4! maneras, luego por el principio de la multiplicación se tiene que el primer caso tiene 4! × 4! maneras de suceder; y el segundo caso se analiza de manera análoga y puede darse también de 4! × 4! maneras; por lo tanto por el principio de la suma el total de maneras para ordenar intercaladamente 4 hombre y 4 mujeres es (4! × 4!) + (4! × 4!) = 2(4! × 4!) = 2(24 × 24) = 1 152.

5. Este problema es parecido al Problema inicial, y se pueden considerar los dos estudiantes que desean estar juntos como una sola persona, entre ellos se pueden ordenar de 2! maneras, y ahora habría que sentar (2 + 1) estudiantes, pero también hay que quitar una silla, porque se está considerando dos estudiantes como uno solo, luego el problema se reduce a sentar 3 estudiantes en 5 sillas, y esto puede suceder de ${}_5P_3$ maneras, finalmente por el principio de la multiplicación el total de maneras para sentar los 4 estudiantes en las 6 sillas bajo las condiciones del problema es $2! \times {}_5P_3$ = 2 × 60 = 120.

2.7 Permutaciones con repetición

Problema inicial

¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 4 y 5, si en el número se admiten dígitos repetidos?

Solución

Considerando los 5 espacios de las cifras del número:

$$\frac{\quad}{\text{DM}}\quad \frac{\quad}{\text{UM}}\quad \frac{\quad}{\text{C}}\quad \frac{\quad}{\text{D}}\quad \frac{\quad}{\text{U}}$$

Entonces comenzando con las unidades, habrán 3 opciones (cualquiera de los números 2, 4 o 5).

$$\frac{\quad}{\text{DM}}\quad \frac{\quad}{\text{UM}}\quad \frac{\quad}{\text{C}}\quad \frac{\quad}{\text{D}}\quad \frac{3}{\text{U}}$$

Luego, para las decenas también habrán 3 opciones (dado que en el número se admiten dígitos repetidos).

$$\frac{\quad}{\text{DM}}\quad \frac{\quad}{\text{UM}}\quad \frac{\quad}{\text{C}}\quad \frac{3}{\text{D}} \times \frac{3}{\text{U}}$$

Y análogamente para centenas, unidades y decenas de millar también habrán 3 opciones para cada uno.

$$\frac{3}{\text{DM}} \times \frac{3}{\text{UM}} \times \frac{3}{\text{C}} \times \frac{3}{\text{D}} \times \frac{3}{\text{U}}$$

Por lo tanto, se pueden formar $3^5 = 241$ números de 5 cifras con los dígitos 2, 4 y 5 admitiendo repetición.

Conclusión

El total de formas que hay para formar cadenas de longitud r con n elementos que se pueden repetir en la cadena es: n^r.

Ejemplo

¿Cuántos subconjuntos se pueden formar de un conjunto con n elementos?

Tomando cada elemento del conjunto y considerando que para formar un subconjunto dicho elemento solo tiene dos opciones: estar en el subconjunto o no estar. Así para cada elemento de los n del conjunto se cumple que

$$\frac{2}{\text{Elemento 1}} \times \frac{2}{\text{Elemento 2}} \times \dots \times \frac{2}{\text{Elemento } n-1} \times \frac{2}{\text{Elemento } n}$$

Este resultado significa que la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto de cardinalidad n es 2^n.

Por lo tanto, el total de subconjuntos que se pueden formar de un conjunto con n elementos es 2^n.

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para colocar 3 letras en una fila utilizando a, b, c y d; considera que las letras se pueden repetir.

2. El código binario es una forma de representación numérica alternativa al sistema decimal, y es muy utilizado en el ambiente computacional porque solo utiliza dos dígitos o caracteres, el 0 y el 1 que se conocen como bits y resultan fáciles de almacenar en una computadora. Determina cuántos números de 7 cifras se pueden representar en código binario.

3. Determina cuántos subconjuntos de A = {a, b, c, d, e, f} se pueden formar.

4. El número de la placa de un vehículo está conformada por 2 letras, que ocupan las primeras 2 posiciones, y 4 números. Si en una placa se pueden repetir tanto letras como números, y se pueden usar las letras A, B, C, D, E y los números del 1 al 9, determina cuántas placas se pueden elaborar con estas condiciones.

Indicador de logro:

2.7 Resuelve problemas sobre conteo aplicando permutaciones con repetición.

Secuencia:

Luego de haber combinado algunas herramientas como los principios de la suma y de la multiplicación y las permutaciones, ahora se puede introducir otro tipo de permutaciones, en las cuales se permite luego de haber colocado un objeto volverlo a colocar de nuevo.

Propósito:

En las soluciones a los Problemas, los estudiantes deben modelar una situación a partir de los conceptos sobre permutaciones, para resolverlos matemáticamente y luego interpretar la respuesta obtenida para dar solución al problema original.

Solución de problemas:

1. Puesto que las letras se pueden repetir es una permutación con repetición, y se colocan 3 de 4 objetos, para la primera posición se tendrán 4 opciones, para la segunda posición también habrán 4 opciones y para la tercera de igual manera 4 opciones, por lo tanto el total de formas que hay para colocar 3 de las 4 letras en una fila es $4^3 = 64$.

$$\underset{\text{Posición 1}}{\underline{\quad 4 \quad}} \times \underset{\text{Posición 2}}{\underline{\quad 4 \quad}} \times \underset{\text{Posición 3}}{\underline{\quad 4 \quad}}$$

2. Para el número que irá en la primera cifra solamente habrán 2 opciones (0 y 1 por estar en binario), la segunda cifra de manera análoga tendrá 2 opciones, y así sucesivamente hasta llegar a la séptima cifra, la cual también tendrá 2 opciones, por lo tanto, es una permutación con repetición, y se colocan 7 de 2 objetos, el total de números de 7 cifras que se pueden representar en código binario es $2^7 = 128$.

$$\underset{\text{Cifra 1}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Cifra 2}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Cifra 3}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Cifra 4}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Cifra 5}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Cifra 6}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Cifra 7}}{\underline{\quad 2 \quad}}$$

3. Para este problema se puede utilizar el resultado visto en el Ejemplo, o bien analizar de la misma manera, que cada elemento de este conjunto tiene dos opciones al formar un subconjunto (estar o no estar), y puesto que son 6 elementos, el total de subconjuntos del conjunto A es $2^6 = 64$.

4. Considerando que el problema menciona que las letras y los números se pueden repetir, para los espacios de las 2 letras hay 5 opciones, esto se puede hacer de 5^2 maneras; además para los espacios de los 4 números se tienen 9 opciones (los números del 1 al 9), y esto se puede hacer de 9^4 maneras; por lo tanto, utilizando el principio de la multiplicación se tiene que el total de placas que se pueden elaborar con las condiciones del problema son $5^2 \times 9^4 = 25 \times 6\,561 = 164\,025$.

$$\underset{\text{Letra}}{\underline{\quad 5 \quad}} \times \underset{\text{Letra}}{\underline{\quad 5 \quad}} \times \underset{\text{Número}}{\underline{\quad 9 \quad}} \times \underset{\text{Número}}{\underline{\quad 9 \quad}} \times \underset{\text{Número}}{\underline{\quad 9 \quad}} \times \underset{\text{Número}}{\underline{\quad 9 \quad}}$$

En el último problema el cálculo exacto requiere uso de calculadora, pero puede considerarse correcto si el estudiante deja indicadas las potencias.

2.8 Permutaciones circulares

Problema inicial

Determina de cuántas maneras se pueden sentar 4 personas en una mesa redonda. Se considera el mismo arreglo cuando al girar un arreglo coincide con otro.

Solución

En este caso, considerando un arreglo particular, por ejemplo:

Dado que la mesa es redonda, los cuatro arreglos de arriba son equivalentes, es decir, solo cuentan por 1.

Entonces el mismo arreglo se puede rotar 4 veces (una vez por cada silla), entonces si consideramos arreglar a todas las personas como si fuera una fila, esto se puede hacer de 4! maneras, pero haciendo esto se estaría contando 4 veces cada ordenamiento, entonces el total de maneras en que se pueden sentar 4 personas en una mesa redonda es: $\frac{4!}{4} = 3! = 6$ maneras.

En general

El total de permutaciones que se pueden realizar ordenando r de n objetos de manera circular está dado por:

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r}.$$

En particular, el total de permutaciones de n objetos de manera circular está dado por:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Ejemplo

Determina de cuántas formas se pueden ordenar 4 de 6 personas en una mesa redonda.

El total de formas en que se pueden ordenar 4 de 6 personas en una fila es ${}_6\mathrm{P}_4$.

Dado que es un arreglo en una mesa redonda, en el total anterior se estaría contando 4 veces cada arreglo, por lo tanto, el total de formas que hay para ordenar 4 de 6 personas en una mesa redonda es $\frac{{}_6\mathrm{P}_4}{4} = 90$.

Problemas

1. ¿De cuántas maneras se pueden subir 7 niños a un carrusel con 7 caballitos todos idénticos?
2. En una mesa redonda hay 5 sillas y 7 personas (2 quedan paradas), determina de cuántas maneras se pueden sentar.
3. Cinco amigos juegan en una mesa redonda, determina de cuántas maneras se pueden ubicar, si 2 de ellos siempre quieren estar a la par.

Puedes utilizar el método visto en la clase 2.6.

4. Cuatro bailarines y cuatro bailarinas interpretan una danza en donde forman un círculo y se toman todos por las manos. ¿De cuántas formas pueden ubicarse los bailarines si en la danza deben aparecer alternadamente un hombre y una mujer?
5. Determina de cuántas formas pueden sentarse 4 parejas de novios si la pareja de cada persona debe estar justo en la posición de enfrente de la que se ubique.

Indicador de logro:

2.8 Usa las permutaciones circulares para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Una vez abordados los problemas de conteo correspondientes a ordenar objetos de manera lineal, se puede hacer el abordaje de las permutaciones circulares, teniendo como punto de partida las clases anteriores.

Propósito:

Para analizar los problemas sobre permutaciones circulares, el procedimiento más eficiente es ordenar de manera lineal y descontar los ordenamientos que estarían repetidos al ordenar de manera circular.

Solución de problemas:

1. Es una permutación circular. Ordenándolos en fila habrían 7! maneras de hacerlo, y al considerar el arreglo de manera circular, cada arreglo circular se estaría contando 7 veces más en el arreglo en fila, por lo tanto, el total de maneras en que se pueden subir los 7 niños al carrusel de 7 asientos es $\frac{7!}{7} = 6! = 720$.

Se recomienda que en la solución analicen el problema como se hizo en la Solución del Problema inicial, y que no solo apliquen la fórmula, en especial si no se recuerdan de la fórmula.

2. Considerando el caso de sentar las personas en 5 sillas en fila, la primera silla tendría 7 opciones, la segunda 6, y así sucesivamente, se tiene que las personas se podrían sentar de ${}_7P_5$ maneras, luego al colocar en forma circular se estaría contando cada arreglo 5 veces más, por lo tanto, el total de maneras en que se pueden sentar 7 personas en una mesa redonda con 5 sillas quedando dos paradas es $\frac{{}_7P_5}{5}$, que se puede calcular $\frac{7 \times 6 \times \overset{1}{\cancel{5}} \times 4 \times 3}{\cancel{5}_1} = 504$.

3. Si estuvieran en fila se podrían ordenar de 4! × 2! (la pista remite al problema que se resolvió considerando las personas que querían estar juntas como una sola persona), únicamente hay que tener cuidado al considerar los arreglos circulares, puesto que para la resolución se ha trabajado como si fueran 4 personas, entonces se estaría contando 4 veces cada arreglo, por lo tanto, los amigos se pueden ubicar en la mesa redonda de $\frac{4! \times 2!}{4} = 3! \times 2 = 6 \times 2 = 12$.

En este problema sería un error dividir por 5 (porque inicialmente eran 5 personas), puesto que al ser contado como una sola persona se están quitando esas rotaciones, puede mencionarse que se analice el diagrama hecho en la clase 2.6 en el caso de ser circular.

4. Si se considera ordenar en fila, es un problema equivalente a colocar intercalados 4 hombres y 4 mujeres en una fila, el cual fue resuelto en el problema 4 de la clase 2.6, y cuya respuesta es 2(4! × 4!), luego al colocarlos en forma circular se estarían contando 8 veces cada arreglo, por lo tanto, el total de formas en que se pueden ubicar los bailarines es $\frac{2(4! \times 4!)}{8} = 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$.

5. Si se arreglaran en una fila, significa que basta ordenar 4 personas (una de cada pareja) y los demás puestos quedarán determinados, luego estas 4 personas se pueden ordenar de 4! maneras, y considerando que cada una de las 4 se pueden alternar con su parejas, el total de manera de ubicar las personas en fila sería 4! × 2! × 2! × 2! × 2!, y al ubicarlo de manera circular, se estaría contando 8 veces cada arreglo, por lo tanto, el total de formas en que pueden sentarse las 4 parejas en la mesa circular es

$$\frac{4! \times 2! \times \cancel{2}! \times \cancel{2}! \times \cancel{2}!}{\cancel{8}} = 4! \times 2! = 48.$$

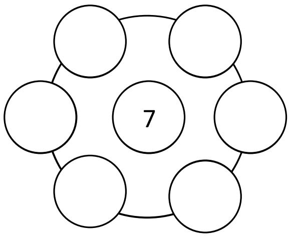
2.9 Configuraciones circulares*

Problema inicial

Determina de cuántas maneras se pueden sentar 7 personas en una mesa redonda, si una persona se sienta en el centro y las otras 6 alrededor.

Solución

Considerando el siguiente esquema de la situación.



En este caso dependiendo de la persona que esté en el centro se considerará un arreglo (o caso) diferente, y luego por cada persona que esté en el centro se ubican 6 personas en forma circular, es decir, el total de maneras para sentar 7 personas con esta condición es: $7 \times (6 - 1)! = 7 \times 5! = 7 \times 120 = 840$.

Conclusión

Para contar las maneras en que se pueden ordenar objetos de forma circular puedes considerar 2 estrategias:

1) Ordenar los objetos en fila y determinar cuántas rotaciones se estarían contando de más.
2) Colocar un elemento que sirva de referencia y arreglar los demás en torno a él.

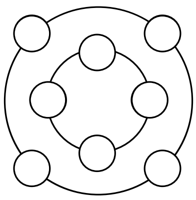
Problemas

1. Para discutir sobre "La mejora de los aprendizajes de matemática en El Salvador" se reúnen 12 personas en una mesa redonda, 3 japoneses, el Ministro de Educación de El Salvador y el Director Nacional de Educación Media, el resto son especialistas en Educación matemática. Determina de cuántas maneras se pueden sentar si:
   a) No importa el orden.
   b) Los 3 japoneses siempre están juntos, y el Director Nacional siempre está a la izquierda del Ministro.

2. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 6 personas en 9 sillas de una mesa redonda?

3. Se coloca una familia de 6 personas en una mesa redonda, determina de cuántas formas se pueden sentar si el padre y la madre se sientan frente a frente.

4. En un congreso sobre "Educación y prevención de enfermedades de transmisión sexual en adolescentes", asisten 8 personas que se sientan en dos ruedas, de 4 asientos cada una como lo muestra la figura. Determina de cuántas maneras se pueden sentar las 8 personas en los 8 asientos.



5. Determina de cuántas formas se puede colorear un cubo con 6 colores diferentes. Si se considera que si al rotar el cubo los colores coinciden con otra coloración, entonces la coloración es la misma.

Indicador de logro:

2.9 Establece una estrategia para resolver problemas sobre configuraciones circulares.

Secuencia:

Después de introducir las estrategias para hacer conteos en arreglos circulares, ahora se presenta una clase en donde es necesario plantear estrategias más complejas para contar los arreglos circulares, esta clase tiene asterisco, por lo que necesita mayor apoyo por parte del docente.

Propósito:

Esta clase se ha titulado como configuraciones circulares, porque son problemas (sobre variaciones) que requieren el uso de estrategias un poco más creativas respecto de los problemas de la clase anterior.

Solución de problemas:

1a) Puesto que son 12 personas en total, las personas se pueden ubicar de $(12 - 1)! = 11! = 39\,916\,800$.

1b) Al ordenar en fila, equivale a considerar a los japoneses como una sola persona, entre ellos se pueden ordenar de 3! maneras, y también considerar al Ministro de Educación de El Salvador y al Director Nacional de Educación Media como una sola persona, pero entre ellos no pueden cambiar de lugar puesto que el Director Nacional siempre está a la izquierda del Ministro, luego el total de maneras en que se podrían sentar si estuvieran en fila sería $9! \times 3!$; ahora considerando el arreglo circular se estaría contando cada orden 9 veces (recordar el problema 3 de la clase 2.8), por lo tanto, el total de maneras en que se pueden sentar las 12 personas es $\frac{9! \times 3!}{9} = 8! \times 3! = 40\,320 \times 6 = 241\,920$.

2. Si fueran 9 sillas en fila, las 6 personas se pueden sentar de ${}_9P_6$ maneras, luego puesto que en forma circular se estaría contando 9 veces cada arreglo, por lo tanto, el total de maneras en que se pueden sentar las 6 personas es $\frac{{}_9P_6}{9} = {}_8P_5 = 6\,720$.

3. Este problema es similar a cuando dos personas quieren estar juntas, es decir, en ese caso la posición de la otra persona está determinada por la posición de la primera, en este problema es similar, la diferencia es que la posición que determina es 2 puestos después de la posición de la primera persona, y se puede analizar de manera análoga, por lo cual, si se considera una fila se podría ordenar de $5! \times 2!$ maneras, y en los arreglos circulares se estarían contando 5 veces más cada arreglo, por lo tanto, el total de formas en que se puede sentar la familia es $\frac{5! \times 2!}{5} = 4! \times 2! = 48$.

4. Considerando sentar las 8 personas en una fila, esto se puede hacer de 8! maneras, luego en el arreglo circular interior (o exterior, depende cual se tome de referencia) se estaría contando cada arreglo 4 veces, y el total de formas en que se pueden ubicar las demás personas no sería una permutación circular, puesto que ya tendrían una referencia respecto las personas que están sentadas al interior, por lo que es equivalente a sentarse en una fila, por lo tanto, las 8 personas se pueden sentar de $\frac{8!}{4} = 2 \times 7! = 10\,080$.

5. En este problema se puede comenzar contando las formas en que se pueden colorear las caras laterales del cubo, puesto que son 4 y se tienen 6 colores, esto se puede hacer de $\frac{{}_6P_4}{4}$ maneras, ahora falta analizar qué sucede con las caras y los colores restantes, y hay que notar que no es relevante cómo colorear las caras restantes, puesto que al rotar y dejar la cara de abajo y arriba en las laterales se estarían contando dichas coloraciones, por lo tanto, el total de maneras en que se puede colorear el cubo es $\frac{{}_6P_4}{4}$.

2.10 Permutaciones con objetos idénticos*

Problema inicial

En el juego de boliche las bolas salen en fila y todas tienen el mismo tamaño y el mismo peso, determina todas las posibilidades de orden en que pueden salir 7 bolas de boliche si 2 son azules, 3 verdes y el resto negras.

Solución

Se puede considerar que el total de formas de ordenar las bolas es x.

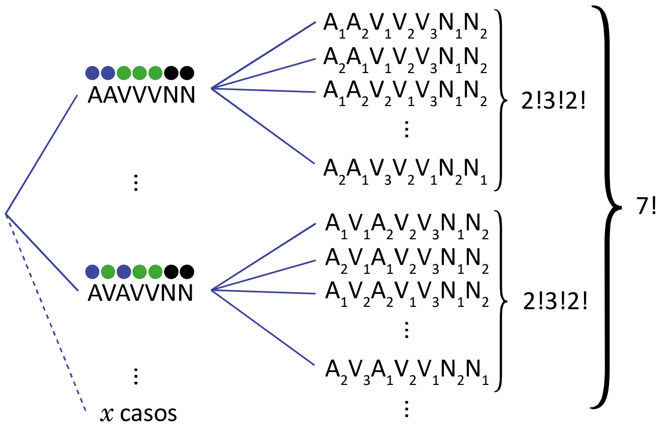
Si las bolas fueran diferentes, el total de maneras en que se pueden ordenar 7 bolas diferentes es 7!

Además, cada caso en que podrían salir las bolas tendría 2!3!2! formas diferentes de ordenarse (si fueran diferentes), como lo muestra la figura de la derecha.

Entonces se cumple que 7! = x(2!3!2!) .

Por lo tanto, el total de formas (x) para ordenar 2 bolas azules, 3 verdes y 2 negras es:

$$x = \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210.$$



En general

El total de permutaciones que se pueden realizar con n objetos si r_1 son de un tipo (todos idénticos), r_2 de otro tipo (todos idénticos también), hasta r_k de otro tipo, y cumplen que $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$ está dado por:

$$\frac{n!}{r_1!\,r_2!\,\ldots\,r_k!}$$

Este resultado se conoce como **multicombinatorio**, porque se puede demostrar utilizando combinaciones.

Ejemplo

En el juego de ajedrez hay 16 piezas de color negro y 16 piezas de color blanco. Para cada color hay 2 torres, 2 caballos, 2 alfiles, 1 rey, 1 reina y 8 peones. Determina de cuántas maneras se pueden ordenar en fila 2 torres, 2 caballos, 2 alfiles, el rey y la reina de color blanco.

Considera que las piezas del mismo tipo tienen forma idéntica.

En total hay 8 piezas, y hay 2 torres idénticas, 2 caballos idénticos, 2 alfiles idénticos, entonces el total de formas que hay para ordenar estas piezas en fila es:

$$\frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 7! = 5\,040.$$

Problemas

1. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar las letras de la palabra PATRIA?
2. Un barco manda señales utilizando banderas de colores. Si el barco tiene 3 banderas amarillas, 2 blancas y se colocan todas las banderas en fila para realizar una señal, ¿cuántas señales diferentes se pueden hacer?
3. Para formar una comisión de jóvenes que participará en un evento organizado por el Centro de Capacitación y Promoción de la Democracia (CECADE) se deben elegir 1 jefe representante, 2 suplentes y 4 delegados acompañantes. Determina de cuántas maneras se puede escoger la comisión de un grupo de 10 jóvenes.
4. Determina de cuántas maneras se pueden arreglar las 16 piezas negras del ajedrez, si se ubican de manera circular.

Indicador de logro:

2.10 Determina la solución de problemas sobre conteo donde se involucren objetos repetidos.

Secuencia:

El último tipo de permutaciones que falta analizar son las permutaciones con objetos repetidos, se han dejado por último dada su complejidad y porqué el análisis que se lleva para resolver este tipo de problemas es muy semejante al razonamiento de las combinaciones de la próxima lección.

Propósito:

El énfasis de las permutaciones es ordenar los objetos que están repetidos, por el contrario en combinaciones el énfasis es escoger los espacios en donde irán los objetos repetidos, esta clase tiene asterisco porque se considera que la forma más comprensible de solucionar el Problema inicial es por medio de ecuaciones, y es probable que necesite mayor apoyo por parte del docente.

Solución de problemas:

1. Puesto que en total son 6 elementos y se repite 2 veces la letra A, el total de maneras en que se puede arreglar la palabra PATRIA es $\frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

2. El barco tiene en total 5 banderas, y hay 3 amarillas repetidas y 2 blancas repetidas, por lo tanto, el total de señales diferentes que se pueden hacer es $\frac{5!}{3!\,2!} = 10$.

3. Si fueran 7 puestos diferentes, la comisión se podría escoger de $_{10}P_7$ maneras, sin embargo, hay 2 suplentes repetidos, y 4 delegados repetidos, por lo tanto el total de maneras en que se puede formar la comisión es $\frac{_{10}P_7}{2!\,4!} = 12\,600$.

4. Si las piezas se ubicaran en fila, serían 16 piezas en total 1 rey, 1 reina y habrían 2 torres repetidas, 2 caballos repetidos, 2 alfiles repetidos y 8 peones repetidos, entonces se podrían ordenar de $\frac{16!}{2!\,2!\,2!\,8!}$ maneras, y considerando que están en un arreglo circular, se tendría que dividir por 16 (la cantidad de veces que se está contando de más cada arreglo debido a la rotación), por lo tanto, el total de maneras de ubicar las 16 piezas negras del ajedrez de manera circular es $\frac{16!}{16 \times 2! \times 2! \times 2! \times 8!} = 4\,054\,050$.

En el problema 4 se divide por 16 debido a que existe al menos una pieza que es única (el rey o la reina).

En los últimos 2 problemas el cálculo exacto requiere calculadora, pero puede considerarse correcto si el estudiante deja indicado, es preferible enfatizar en el análisis de la situación que en el resultado numérico específico de cada situación.

2.11 Conteo por complemento

Problema inicial

En una fábrica se cuenta con 6 ventiladores; debido a que siempre se necesita que el lugar se mantenga fresco, al menos un ventilador se mantiene encendido. Determina cuántas formas hay para satisfacer esta condición.

Solución

Todos los posibles casos que se pueden dar son, que solo un ventilador esté encendido, que 2 de los 6 ventiladores estén encendidos, y así sucesivamente hasta el caso que los 6 ventiladores estén encendidos.

Para contar todas las formas posibles en que estará al menos un ventilador encendido, se pueden contar todas las maneras en que se pueden encontrar los ventiladores, es decir, como cada ventilador tiene 2 opciones (estar apagado o encendido), todas las posibles maneras en que se pueden encontrar los ventiladores son 2^6.

Y el único caso que no cumple es cuando todos los ventiladores están apagados, es decir 1 caso. Por lo tanto, el total de maneras en que al menos un ventilador está encendido es: $2^6 - 1 = 63$.

Conclusión

En ocasiones, la cantidad de casos que se pueden dar para que un evento o condición A suceda son demasiados y se vuelve difícil contarlos. Sin embargo, en ocasiones puede ser más fácil contar lo que no se pide, es decir, el complemento de lo que se quiere, y restárselo al total de maneras de ordenar todos los objetos sin condiciones. Denotando el conjunto de todos los casos posibles por U se tiene que

$$\text{A} \subset \text{U y } n(\text{U}) \text{ es finito, entonces } n(\text{A}) = n(\text{U}) - n(\text{A}^c)$$

Ejemplo

Determina cuántas formas hay para ordenar 3 niñas y 3 niños si no pueden estar las 3 niñas juntas.

Contando los casos en que las 3 niñas están siempre juntas, esto se puede hacer de $4! \times 3!$ maneras.

Y los 3 niños y 3 niñas (6 en total) se pueden ordenar de $6!$ maneras.

Entonces, restándole al total de maneras de ordenar los 6 niños las formas en que las 3 niñas siempre están juntas da como resultado $6! - 3! \times 4! = 4!(30 - 3!) = (4 \times 3 \times 2 \times 1)(30 - 6) = 576$. Por lo tanto, se pueden ordenar de 576 formas diferentes.

Problemas

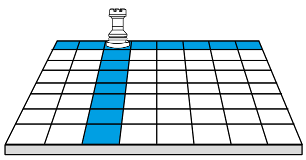
1. Determina cuántos números de 7 cifras se pueden formar en código binario (utilizando los dígitos 0 y 1) de modo que la multiplicación de todos los dígitos del número sea cero.

2. Se colocan 4 cifras del 1 al 4 en una fila, permitiendo repetir las cifras. Determina el número de filas que tienen al menos dos cifras iguales.

3. Hay 4 niñas y 2 niños, determina de cuántas maneras se pueden colocar los 6 en una fila, de modo que los niños no estén juntos.

4. En el juego de ajedrez la torre puede atacar a otra pieza que se encuentra en línea recta en un tablero de 8×8, como lo muestra la figura. Determina de cuántas maneras se pueden ubicar 2 torres para que no se ataquen si:

   a) Una torre es negra y la otra blanca.
   b) Ambas torres son del mismo color.



Para el literal b considera que las torres del mismo color sí se pueden atacar.

192

Indicador de logro:

2.11 Aplica el conteo por el complemento para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Una vez establecidos los diferentes tipos de permutaciones que pueden haber, se analizará una estrategia muy útil para hacer conteos, como lo es el conteo por el complemento, lo cual también será útil en la unidad de probabilidad.

Propósito:

A lo largo de todas las clases anteriores el estudiante ha estado habituado a contar directamente lo que pide el problema, sin embargo en esta clase la intención es que el estudiante cuente lo que no se le pide y se lo reste al total.

Solución de problemas:

1. Para que la multiplicación de todos los dígitos sea 0, pueden darse muchos casos, que sea uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis o siete ceros, sin embargo, para que la multiplicación no sea cero solamente hay un caso (que sean todos unos), entonces, si al total de cadenas de 7 cifras binarias se le resta la cadena cuya multiplicación de los dígitos es diferente de cero, por lo tanto, el total de números de 7 cifras en código binario cuya multiplicación da cero es $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$.

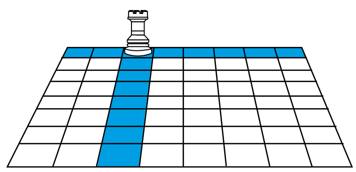
La cantidad de cadenas de 7 cifras que se pueden formar en código binario fue calculada en el problema 2 de la clase 2.7.

2. Puesto que el total de filas de 4 cifras con las condiciones del problema sería 4^4, si a este total se le resta el número de filas que no tienen cifras iguales, lo cual se puede lograr de 4! maneras, se tendrá que, por lo tanto, el total de filas de 4 cifras formadas con los dígitos del 1 al 4 y tienen al menos dos cifras iguales es $4^4 - 4! = 256 - 24 = 232$.

3. El total de formas de ordenar las 4 niñas y los 2 niños es 6!, si a este total se le resta el número de formas en que los niños están todos juntos, dará como resultado el total de maneras en que se puede colocar los 6 en una fila de modo que los niños no están juntos, y puesto que hay $5! \times 2!$ maneras en que los niños aparecen juntos en la fila (utilizando la estrategia de ver el conjunto de los niños como una sola persona), se tiene que el total de maneras de colocarlos en la fila con las condiciones del problema es $6! - 5! \times 2! = 720 - 240 = 480$.

4a) Puesto que es un tablero de 8×8, si se considera que la primera torre tiene 64 lugares en donde se puede poner, y la segunda tendrá 63, el total de maneras en que se puede colocar dos torres diferentes en el tablero es $_{64}P_2$, ahora si a este total se resta la cantidad de formas que hay para que las torres se ataquen, da como resultado la cantidad de formas que hay para que no se ataquen, pero para que ambas se ataquen la primera torre tendrá 64 opciones, sin embargo la segunda torre, independientemente de donde se coloque la primera, siempre tendrá 14 opciones (utilizar la ilustración), entonces hay 64×14 maneras de ubicar las torres para que se ataquen, por lo tanto el total de maneras de ubicar 2 torres diferentes para que no se ataquen es $_{64}P_2 - 64 \times 14 = 3\,136$, o bien considerar los 64 lugares para poner la primera y $(64 - 15)$ lugares para poner la segunda, que es $64(64 - 15) = 3\,136$.

4b) En a), puesto que las torres son diferentes, se contarían dos casos cuando se toman dos casillas para las torres (intercambiando posiciones), sin embargo, puesto que para este literal las torres se consideran idénticas, se estaría contando dos veces cada caso, por lo tanto, si las torres son idénticas el total es $\frac{_{64}P_2 - 64 \times 14}{2} = \frac{3\,136}{2} = 1\,568$.

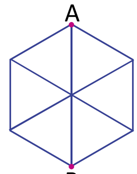


2.12 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas, utilizando estrategias de conteo de permutaciones.

1. En un congreso sobre "Oportunidades para jóvenes con discapacidad" participan 10 personas que hablan español, 15 que hablan inglés, 14 que hablan francés, y entre ellas 5 hablan español e inglés, 7 hablan inglés y francés, 4 hablan español y francés, y hay 2 personas que hablan los tres idiomas. Determina cuántas personas asistieron al congreso.

2. En la figura se muestra un hexágono regular cuyo lado mide 1 cm. Determina de cuántas maneras se puede unir el punto A con el punto B usando 3 segmentos de longitud 1 cm.



3. En una competencia de atletismo participan 3 personas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden llegar los atletas, si pueden haber incluso empates triples?

4. Determina el valor de x en la ecuación $x! = 72(x - 2)!$

5. Hay 4 niños y 5 niñas, y se colocan 4 de ellos en una fila de modo que en cada extremo hay un niño y en las posiciones centrales hay niñas. Determina de cuántas maneras se puede formar la fila de 4 personas.

6. Hay 7 tarjetas numeradas del 0 al 6, de ellas se sacan 4 y se colocan en fila, determina cuántos números múltiplos de 5 se pueden formar al tomar las tarjetas como dígitos del número, considerando que el primer dígito de izquierda a derecha no puede ser cero.

   Para que un número sea múltiplo de 5, el valor de las unidades debe ser 0 o 5.

7. Determina cuántas formas hay para repartir 10 dulces de diferente sabor entre 3 niños, si puede darse el caso que se den todos los dulces a un solo niño.

8. En una clase hay 4 grupos formados por 3 niños y 2 niñas cada uno, determina cuántas maneras hay para ubicar cada grupo en filas de asientos diferentes si además tanto los niños como las niñas de cada grupo deben estar siempre juntos.

9. ¿De cuántas formas se pueden ubicar en un estante 3 libros de 7° grado (iguales), 6 libros de 8° (iguales) y 4 de 9° (iguales), si los de 8° deben estar todos juntos?

10. Determina de cuántas formas se pueden ubicar circularmente 7 personas si:

    a) Dos de ellas están juntas.
    b) Dos de ellas no están a la par.

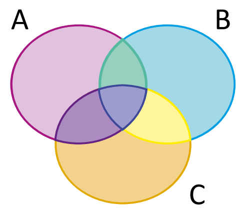
Indicador de logro:

2.12 Resuelve problemas correspondientes a las permutaciones.

Solución de problemas:

1. Considerando los conjuntos A = {p | p es una persona que habla español}, B = {p | p es una persona que habla inglés}, C = {p | p es una persona que habla francés}, para resolver este problema sería necesario calcular la cardinalidad de la unión de los conjunto A, B y C, y para ello se puede utilizar un diagrama de Venn como el que se muestra en la figura.

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$.



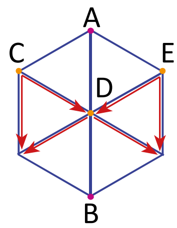
Y del problema se puede extraer la siguiente información:

$n(A) = 10$, $n(B) = 15$, $n(C) = 14$, $n(A \cap B) = 5$, $n(B \cap C) = 7$, $n(C \cap A) = 4$ y $n(A \cap B \cap C) = 2$, luego:

$n(A \cup B \cup C) = 10 + 15 + 14 - 5 - 7 - 4 + 2 = 25$.

Por lo tanto, al evento asistieron 25 personas en total.

2. Dado que es un hexágono regular, los triángulos que se forman son equiláteros. Ahora, estando en el punto A hay 3 opciones, luego llegando a cualquiera de los puntos anaranjados (C, D y E), se tienen 2 opciones en cada punto (puesto que del centro del hexágono no se puede ir directo al punto B, porque deben ser 3 segmentos de longitud 1) y finalmente solamente hay una opción, por lo tanto el total de maneras para unir el punto A y el B usando 3 segmentos es $3 \times 2 \times 1 = 6$.



3. Caso 1: Llegan todos juntos, lo cual puede suceder de 1 manera.

Caso 2: LLegan dos en primer lugar y uno en segundo, lo cual puede suceder de $\frac{3!}{2!}$ maneras.

Caso 3: LLega uno en primer lugar y dos en segundo, lo cual puede suceder de $\frac{3!}{2!}$ maneras también.

Caso 4: Los 3 llegan en puestos diferentes, lo cual puede suceder de 3! maneras.

Por lo tanto, aplicando el principio de la suma, el total de maneras diferentes en que pueden llegar los atletas es $1 + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 3! = 1 + 3 + 3 + 6 = 13$.

4. $x! = 72(x-2)! \Rightarrow x(x-1)\cancel{(x-2)!} = 72\cancel{(x-2)!} \Rightarrow x^2 - x - 72 = 0 \Rightarrow (x-9)(x+8) = 0 \Rightarrow x = 9$.

5. Los niños de los extremos se pueden colocar de ${}_4P_2$ maneras, y las niñas en las posiciones centrales de ${}_5P_2$ maneras, por lo tanto, por el principio de la multiplicación el total de maneras es ${}_4P_2 \times {}_5P_2 = 240$.

6. El último dígito tiene 2 opciones (0 o 5), si es 0, los restantes 3 se pueden ordenar de ${}_6P_3$ maneras, y si es 5, los restantes 3 se pueden ordenar de $5 \times {}_5P_2$, por lo tanto el total es ${}_6P_3 + 5 \times {}_5P_2 = 220$.

7. Cada dulce tiene 3 opciones (cualquiera de los 3 niños), por lo tanto el total de formas es $3^{10} = 59\,049$.

8. Los estudiantes de cada fila se pueden ordenar de $3! \times 2! \times 2!$ maneras, y los grupos se puede ordenar de 4! maneras, por lo tanto, el total de maneras es $4! \times (3! \times 2! \times 2!) = 24 \times 24 = 576$.

9. Si fueran todos diferentes y considerando los de 8° como un solo objeto, se podrían ordenar de 8! maneras, puesto que hay objetos repetidos el total es $\frac{8!}{3!\,4!} = 280$.

10a) Si se ordenaran en fila se podría hacer de $2! \times 6!$, pero se estaría contando 6 veces cada caso, por lo tanto, el total de formas es $\frac{2!\,6!}{6} = 2 \times 120 = 240$.

10b) Utilizando el complemento, se sabe que las 7 personas se pueden sentar de $(7-1)!$ maneras, si a esto se le resta lo calculado en el literal anterior resulta que el total es $6! - 2 \times 5! = 4 \times 5! = 480$.

Lección 3 Las combinaciones

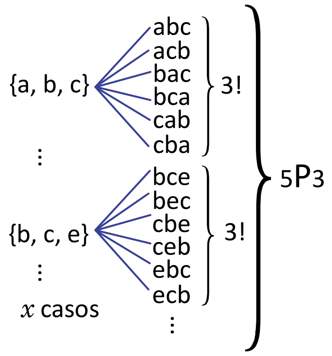
3.1 Combinaciones

Problema inicial

Determina de cuántas formas se pueden seleccionar 3 letras del siguiente conjunto {a, b, c, d, e}.

Solución

Tomando x como el total de formas de seleccionar 3 letras del conjunto {a, b, c, d, e}.



Dado que en una selección de 3 letras no importa en que orden se haga, entonces cada selección multiplicada por 3! dará como resultado todas las formas de ordenar 3 de las 5 letras, es decir, $x(3!) = {}_5P_3$.

Por lo tanto, el total de formas que hay para seleccionar 3 letras del conjunto {a, b, c, d, e} es: $x = \frac{{}_5P_3}{3!} = 10$.

Conclusión

Una selección de objetos donde el orden no importa se conoce como **combinación**.

Una combinación a menudo está relacionada con la forma de escoger un grupo de objetos, porque en este sentido no importa el orden, sino el conjunto final de objetos que se elija.

El número total de combinaciones que se pueden realizar escogiendo r objetos entre un conjunto de n objetos, con $0 \leq r \leq n$ está dado por: $\frac{{}_nP_r}{r!}$.

Este número total de combinaciones se denota por ${}_nC_r$, y se lee "n combino r", es decir:

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Observa que ${}_nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1$.

Observa que ${}_nC_{(n-r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_nC_r$ y es equivalente de n objetos distintos escoger r que se sacan o escoger $n-r$ que se dejan.

Ejemplo

En una bolsa hay 3 pelotas rojas (iguales) y 4 pelotas verdes (iguales), determina de cuántas formas se pueden ordenar en una fila las 7 pelotas.

Se puede considerar que se tienen 7 espacios en la fila, entonces será suficiente escoger en cuáles espacios irán las bolas rojas (las bolas azules irán en los espacios restantes), y esto se puede hacer de ${}_7C_3$:

$${}_7C_3 = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 35$$

3 factores

$${}_7C_3 = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}$$

3 factores

Por lo tanto, las 7 pelotas se pueden ordenar de 35 formas diferentes.

Este problema se puede resolver utilizando permutaciones o combinaciones, dependiendo si se toma de referencia los objetos o los espacios de los objetos.

Problemas

1. ¿Cuántos licuados diferentes se pueden hacer combinando 2 frutas que pueden ser fresa, melón, zapote, guayaba, papaya y mango? ¿Cuántos con 3 frutas?

2. Se tienen 5 puntos en el plano cartesiano de modo que no hay 3 de ellos alineados. Determina cuántos segmentos de recta que unan 2 de dichos puntos se pueden trazar.

3. Se tiene el conjunto {1, 2, 3, 4, 5}. ¿Cuántos de sus subconjuntos tienen solo un número? ¿Cuántos dos números? ¿Cuántos tres números? ¿Cuántos cuatro números? ¿Cinco números? ¿Y ningún número?

Indicador de logro:

3.1 Utiliza las combinaciones para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

En esta clase se da la definición de las combinaciones, partiendo de la idea de escoger elementos de un conjunto dado, el abordaje que se considera más comprensible es por medio de ecuaciones. Esta clase tiene asterisco, debido a la complejidad de la Solución, por lo cual requiere mayor apoyo del docente.

Posibles dificultades:

Siempre causa dificultad que los estudiantes logren identificar la diferencia entre combinaciones y permutaciones, se recomienda que siempre se aclare que la idea principal de las permutaciones es ordenar y la de las combinaciones es escoger, por lo que en las permutaciones el orden es importante y en las combinaciones no.

Solución de problemas:

Se recomienda que los estudiantes prioricen el análisis de los problemas que el cálculo de los combinatorios, la solución de un problema puede considerarse correcta si se dejan indicados los combinatorios, si el tiempo es suficiente se puede pedir que apliquen la fórmula para calcular el valor numérico.

1. Puesto que hay 6 frutas diferentes de las cuales hay que escoger 2, se puede hacer de $_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ maneras. Y combinando 3 frutas se pueden hacer $_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$.

2. Para trazar una línea es necesario al menos 2 puntos, y puesto que no existen 3 puntos alineados, basta con combinar 2 de los 5 puntos del plano, por lo tanto, el total de segmentos de recta que se pueden trazar es $_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$.

3. El conjunto tiene 5 elementos, y formar subconjuntos de un solo número equivale al total de maneras que hay para tomar 1 elemento de los 5 del conjunto, por lo tanto, hay $_5C_1 = 5$ subconjuntos con un solo número.

Análogamente para subconjuntos de dos números, equivale al total de maneras que hay para tomar 2 elementos de los 5, es decir $_5C_2 = 10$ subconjuntos con dos números.

De igual modo para subconjuntos con tres, cuatro y cinco números serán $_5C_3 = 10$, $_5C_4 = 5$ y $_5C_5 = 1$ subconjuntos con tres, cuatro y cinco números respectivamente. Y para los subconjuntos con ningún número (subconjunto vacío) equivale a escoger 0 de los 5 elementos, es decir, $_5C_0 = 1$.

El problema 3 y el Ejemplo de la clase 2.8 ayudarán a realizar la demostración de la identidad combinatoria $_nC_0 + {_nC_1} + {_nC_2} + \cdots + {_nC_{(n-2)}} + {_nC_{(n-1)}} + {_nC_n} = 2^n$.

3.2 Combinaciones y principios de conteo

Problema inicial

Se dispone de un grupo de 5 mujeres y 3 hombres, resuelve:

a) ¿Cuántas formas hay para escoger 2 personas, si ambas tienen que ser del mismo sexo?

b) ¿Cuántas formas hay para escoger 4 personas, de modo que sean 2 hombres y 2 mujeres?

Solución

a) Para esta situación se pueden dar 2 casos:

Caso 1: pueden ser 2 mujeres, estas se pueden elegir de ${}_5C_2$ maneras diferentes.
Caso 2: pueden ser 2 hombre, estos se pueden elegir de ${}_3C_2$ maneras diferentes.

Por lo tanto, por el principio de la suma, el total de formas para escoger 2 personas, ambas del mismo sexo es: ${}_5C_2 + {}_3C_2 = 10 + 3 = 13$.

b) Primero se pueden elegir las mujeres de ${}_5C_2$ maneras. Luego por cada forma de escoger las mujeres hay ${}_3C_2$ maneras para escoger los hombres.

Por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de formas para escoger 4 personas (2 de un sexo y 2 de otro sexo) es: ${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 10 \times 3 = 30$.

Conclusión

En algunas situaciones será necesario aplicar los principios de suma y multiplicación a las combinaciones para contar todos los casos. Además, en las permutaciones puede analizarse cómo escoger los objetos que se ordenarán para luego ordenarlos.

Ejemplo

Se tienen 7 libros de matemática (todos diferentes) y 5 sobre derechos de la niñez y la adolescencia (todos diferentes). Determina de cuántas formas se pueden ordenar 3 libros de matemática y 2 sobre derechos de la niñez y la adolescencia en un estante.

Se pueden elegir primero los 3 libros de matemática, esto se puede hacer de ${}_7C_3$ formas, y luego se eligen los 2 libros sobre derechos de la niñez y la adolescencia, esto se puede hacer de ${}_5C_2$ formas.

Finalmente los libros se pueden ordenar de 5! formas. Por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de maneras para ordenar todos los libros es: ${}_7C_3 \times {}_5C_2 \times 5! = 35 \times 10 \times 120 = 42\,000$.

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para ubicar 2 niños y 3 niñas en una fila, escogiendólos de un grupo de 3 niños y 4 niñas.

2. De un grupo de 6 hombres y 4 mujeres se desea formar una comisión de tres personas, determina cuántas comisiones distintas se pueden formar si:

a) No hay restricciones.
b) Debe haber solo hombres o solo mujeres.
c) Debe haber dos hombres y una mujer.
d) Debe haber al menos una mujer.

Indicador de logro:

3.2 Integra las combinaciones con los principios de la suma y la multiplicación para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Luego de utilizar el concepto de combinación para resolver problemas sobre conteo, en esta clase se resolverán problemas en los que se tengan que idear estrategias para modelar situaciones más complejas, en las que será necesario aplicar los principios de la suma y multiplicación.

Propósito:

Para esta clase puede haber diversidad de problemas, por ello se propone un Ejemplo en donde se presente otra forma de razonar de manera combinatoria, los Problemas tienen mucha correspondencia con los resueltos durante la clase.

Solución de problemas:

1. De manera parecida al Ejemplo de los libros, para seleccionar 2 de los 3 niños se puede hacer de $_3C_2$ maneras, y para seleccionar 3 de las 4 niñas se puede hacer de $_4C_3$ maneras, luego una vez seleccionados se deben ordenar los 5 niños, y esto se puede hacer de 5! maneras, por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de formas en que se pueden ubicar los 2 niños y 3 niñas con las condiciones del problema es $_3C_2 \times {_4C_3} \times 5! = 3 \times 4 \times 120 = 1\,440$.

2a) Puesto que son 10 personas en total, basta con seleccionar 3 de estas 10 personas, por lo tanto, si no hay restricciones, la comisión se puede formar de $_{10}C_3 = 120$ maneras.

2b) Hay dos casos, para que sean solo hombres basta con seleccionar los 3 integrantes de entre los 6 hombre, es decir, $_6C_3$; y para que sean solo mujeres es necesario solamente seleccionar las 3 integrantes de entre las 4 mujeres, es decir, $_4C_3$, por lo tanto, como los dos casos no pueden ocurrir al mismo tiempo, por el principio de la suma se tiene que el total de maneras de formar la comisión es $_6C_3 + {_4C_3} = 20 + 4 = 24$.

2c) Los dos hombres se pueden seleccionar de $_6C_2$ maneras y la mujer se puede seleccionar de $_4C_1$ maneras, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras para formar la comisión es $_6C_2 \times {_4C_1} = 15 \times 4 = 60$.

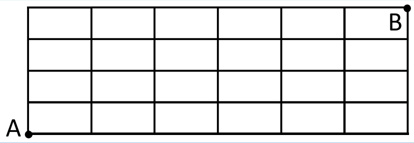
2d) Para este literal se puede utilizar el conteo por el complemento, pues para que haya el menos una mujer hay 3 casos (que haya 1, 2 o 3 mujeres) pero si se tiene el total de maneras que hay para formar la comisión (calculado en el literal a de este problema) y se le resta cuando la comisión está conformada solo por hombres (calculado en el literal c de este problema), se tendrá lo deseado, por lo tanto, el total de maneras para formar la comisión es $_{10}C_3 - {_6C_3} = 120 - 20 = 100$.

También se podría considerar válido contar los tres casos y aplicar el principio de la suma, y el resultado es exactamente el mismo ($_4C_1 \times {_6C_2} + {_4C_2} \times {_6C_1} + {_4C_3} = 60 + 36 + 4 = 100$).

3.3 Conteo de caminos

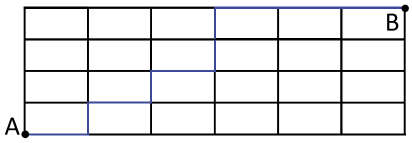
Problema inicial

La cuadrícula de la derecha representa las calles de Sonsonate por las que se puede conducir, determina de cuántas formas puede ir una persona desde el punto A al punto B por el camino más corto.



Solución

Para que un camino sea de longitud mínima debe moverse únicamente hacia la derecha y hacia arriba (sino se estaría regresando), entonces el problema se resume a hacer una cadena de 6 + 4 = 10 pasos, de los cuáles 4 son verticales y 6 son horizontales.



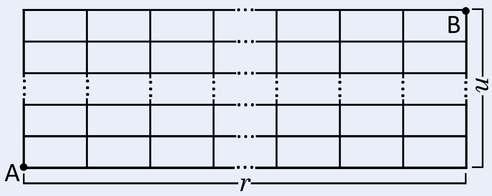
Para ello, basta con escoger donde irán los 6 pasos hacia la derecha, y esto se puede hacer de $_{10}C_6$ formas.

Por lo tanto, el total de caminos más cortos para llegar del punto A al punto B es: $_{10}C_6 = 210$.

Conclusión

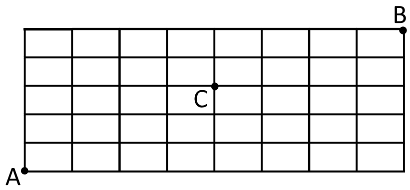
En una cuadrícula de $n \times r$ celdas, para determinar el total de caminos más cortos que van del punto A al punto B se pueden usar combinaciones, y el total será igual a: $_{(n+r)}C_r$.

Esta construcción por caminos puede ser muy útil para la demostración de algunas identidades combinatorias.



Ejemplo

Determina de cuántas formas se puede ir desde el punto A hasta el punto B por el camino más corto si se debe pasar por el punto C.



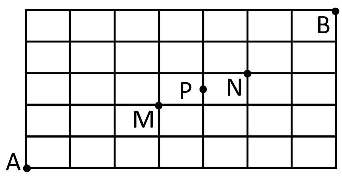
Para llegar de A a C se tienen que dar 4 pasos horizontales y 3 verticales, entonces hay un total de $_7C_4$ caminos de longitud mínima. Luego para llegar de C a B hay $_6C_4$ caminos de longitud mínima.

Por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de caminos de longitud mínima que van de A hacia B pasando por C son $_7C_4 \times {}_6C_4 = 35 \times 15 = 525$.

Problemas

Para la siguiente cuadrícula, determina cuántos caminos de longitud mínima hay que

a) Llevan de A a B.
b) Llevan de A a B pasando por M.
c) Llevan de A a B pasando por N.
d) Llevan de A a B pasando por M y N.
e) Llevan de A a B pasando por M o N.
f) Llevan de A a B y no pasan por M ni por N.
g) Llevan de A a B pasando por P.



Indicador de logro:

3.3 Determina la cantidad de caminos de longitud mínima para ir de un punto A a un punto B dentro de una cuadrícula.

Secuencia:

Ahora que ya se conoce el concepto de combinación, se pueden comenzar a introducir algunas aplicaciones de las combinaciones a diferentes contextos, uno de ellos es el conteo de caminos de longitud mínima en una cuadrícula.

Propósito:

En esta clase se pretende afianzar el concepto de combinación, y el uso de los principios de suma y multiplicación en un contexto un poco más gráfico y que puede ser un modelamiento de las calles y avenidas de una país, las cuales idealmente deben constituirse en forma de cuadrícula.

Solución de problemas:

a) Puesto que se deben hacer 7 pasos horizontales y 5 verticales, en total se deben hacer 12 pasos, y seleccionando en cuáles de los 12 pasos se harán los horizontales, se tiene que hay $_{12}C_7 = 792$ caminos que llevan de A a B.

b) Para llegar de A a M hay $_{(3+2)}C_3$ maneras, y por cada una de ellas hay $_{(4+3)}C_4$ maneras para llegar de M a B, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de caminos que llevan de A a B pasando por M es $_5C_3 \times {}_7C_4 = 10 \times 35 = 350$.

c) Para llegar de A a N hay $_{(5+3)}C_5$ maneras, y por cada una de ellas hay $_{(2+2)}C_2$ maneras para llegar de N a B, por lo tanto por el principio de la multiplicación, el total de caminos que llevan de A a B pasando por N es $_8C_5 \times {}_4C_2 = 56 \times 6 = 336$.

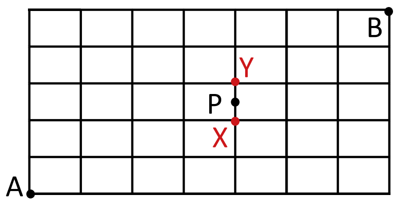
d) Para llegar de A a M hay $_{(3+2)}C_3$ maneras, y por cada una de ellas hay $_{(2+1)}C_2$ maneras de llegar de M a N, y por cada una de ellas hay $_{(2+2)}C_2$ maneras de llegar de N a B, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de caminos que llevan de A a B pasando por M y N a la misma vez es $_5C_3 \times {}_3C_2 \times {}_4C_2 = 10 \times 3 \times 6 = 180$.

e) Del literal b se sabe cuántos caminos de A a B pasan por M y del literal c se tienen los que pasan por N, sin embargo se estaría contando dos veces los que pasan por M y N a la misma vez (una cuando se cuentan los caminos de M a B en el literal b y otra cuando se cuentan los caminos de A a N en el literal c), por lo tanto, el total de caminos que llevan de A a B y pasan por M o N es $({}_5C_3 \times {}_7C_4) + ({}_8C_5 \times {}_4C_2) - ({}_5C_3 \times {}_3C_2 \times {}_4C_2) = 350 + 336 - 180 = 506$.

El análisis de este literal es análogo al resultado que se tiene para conjuntos $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, y también se puede resolver utilizando conjuntos.

f) Puesto que ya se tiene el total de caminos de A a B del literal a, y se tiene también el total de caminos de A a B que pasan por M o N, se puede utilizar el conteo por el complemento, por lo tanto, el total de caminos de A a B que no pasan ni por M ni por N es $_{12}C_7 - 506 = 792 - 506 = 286$.

g) Para asegurar pasar por P, es necesario llegar al punto X y luego partir del punto Y, puesto que para llegar de A a X hay $_{(4+2)}C_4$ caminos y para llegar de Y a B hay $_{(3+2)}C_3$ caminos, por el principio de la multiplicación se tendrá que el total de caminos de A a B pasando por P es $_6C_4 \times {}_5C_3 = 15 \times 10 = 150$.



3.4 Demostraciones utilizando conteo de caminos*

Problema inicial

Demuestra utilizando un argumento por caminos, la propiedad recursiva de Pascal:

$$(n+1)\mathrm{C}(r+1) = n\mathrm{C}r + n\mathrm{C}(r+1) \text{ con } n \geq r$$

Solución

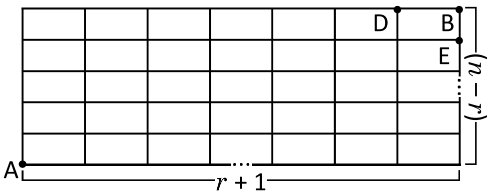
Considerando una cuadrícula de dimensión $(n-r) \times (r+1)$, y considerando que para llegar del punto A al punto B solo hay dos casos, pasando por el punto D o pasando por el punto E.

El total de maneras para llegar de A hasta B es $(n+1)\mathrm{C}(r+1)$, debido a que $(n-r)+(r+1) = n+1$.

Además, para llegar al punto D hay $n\mathrm{C}r$ maneras, debido a que $(n-r)+r = n$.

Y para llegar al punto E hay $n\mathrm{C}(r+1)$ maneras, debido a que $(n-r-1)+(r+1) = n$.

Por lo tanto, $(n+1)\mathrm{C}(r+1) = n\mathrm{C}r + n\mathrm{C}(r+1)$.



Conclusión

Para demostrar algunas identidades combinatorias se puede utilizar el conteo de caminos, para ello hay que crear una cuadrícula que se adecúe a la situación y luego contar los caminos de dos maneras diferentes.

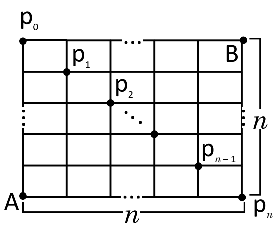
Ejemplo

Demuestra la identidad utilizando un argumento por caminos:

$$(n\mathrm{C}0)^2 + (n\mathrm{C}1)^2 + \cdots + [n\mathrm{C}(n-1)]^2 + (n\mathrm{C}n)^2 = 2n\mathrm{C}n$$

Considerando una cuadrícula de $n \times n$, entonces el total de caminos de longitud mínima que hay para llegar de A hasta B es $2n\mathrm{C}n$.

Y también se pueden contar estos caminos en casos, un caso (que pase por el punto p_0) sería que en los primeros n pasos no hay pasos horizontales, entonces en los siguientes n pasos no hay pasos verticales, esto se puede hacer de $(n\mathrm{C}0)(n\mathrm{C}0)$ maneras.



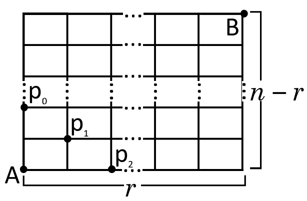
Otro caso (que pase por el punto p_1) es dar un paso horizontal en los primeros n y entonces solo se podría dar un paso vertical en los últimos n pasos, esto se puede hacer de $(n\mathrm{C}1)(n\mathrm{C}1)$ maneras. Así sucesivamente hasta llegar al caso (que pase por el punto p_n) que en los primero n pasos todos sean horizontales y los últimos n pasos sean todos verticales, esto se puede hacer de $(n\mathrm{C}n)(n\mathrm{C}n)$ maneras.

Por lo tanto, $(n\mathrm{C}0)^2 + (n\mathrm{C}1)^2 + \cdots + [n\mathrm{C}(n-1)]^2 + (n\mathrm{C}n)^2 = (2n)\mathrm{C}n$.

Problemas

Demuestra la siguiente identidad utilizando un argumento por caminos en la figura de abajo:

$$n\mathrm{C}r = 2\mathrm{C}0[(n-2)\mathrm{C}r] + 2\mathrm{C}1[(n-2)\mathrm{C}(r-1)] + 2\mathrm{C}2[(n-2)\mathrm{C}(r-2)].$$



197

Unidad 7

Indicador de logro:

3.4 Demuestra identidades combinatorias utilizando conteo de caminos.

Secuencia:

Luego de utilizar las combinaciones para realizar el conteo de caminos de longitud mínima en una cuadrícula, se utilizará este recurso para realizar algunas demostraciones de identidades combinatorias.

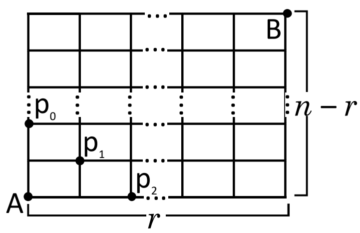
Posibles dificultades:

Identificar las dimensiones de la cuadrícula adecuada para cada identidad es lo que resulta más difícil, es por ello que esta clase tiene asterisco, porque puede ser necesario que el docente deba dar mayor apoyo a sus estudiantes en ese sentido.

Solución de problemas:

La cuadrícula tiene r columnas y $(n - r)$ filas, entonces se tendrá que el total de caminos de A a B utilizando este análisis es $(r + n - r)\mathrm{C}r = n\mathrm{C}r$.

Por otro lado, para ir de A a B hay 3 opciones, pasar por p_0, por p_1 o por p_2 y no ocurre simultáneamente dos de estos 3 casos; para el primer caso hay $2\mathrm{C}0 \times (n - 2)\mathrm{C}r$ caminos para ir de A a B pasando por p_0, para el segundo caso hay $2\mathrm{C}1 \times (n - 2)\mathrm{C}(r - 1)$ caminos para ir de A a B pasando por p_1, y finalmente para el tercer caso hay $2\mathrm{C}2 \times (n - 2)\mathrm{C}(r - 2)$ caminos de A a B pasando por p_2, entonces, aplicando el principio de la suma se tiene que el total de caminos para ir de A a B es $2\mathrm{C}0(n - 2)\mathrm{C}r + 2\mathrm{C}1[(n - 2)\mathrm{C}(r - 1)] + 2\mathrm{C}2[(n - 2)\mathrm{C}(r - 2)]$.



Por lo tanto, puesto que se ha contado lo mismo de dos maneras diferentes, se ha demostrado la identidad del problema: $n\mathrm{C}r = 2\mathrm{C}0(n - 2)\mathrm{C}r + 2\mathrm{C}1[(n - 2)\mathrm{C}(r - 1)] + 2\mathrm{C}2[(n - 2)\mathrm{C}(r - 2)]$.

En este problema hay que evaluar principalmente la forma de redactar los argumentos por parte de los estudiantes.

3.5 Identidades combinatorias contando de 2 formas*

Problema inicial

Utiliza un argumento por conjuntos para demostrar la siguiente identidad combinatoria.

$$n\mathrm{C}0 + n\mathrm{C}1 + n\mathrm{C}2 + \cdots + n\mathrm{C}(n-2) + n\mathrm{C}(n-1) + n\mathrm{C}n = 2^n$$

Solución

Contando la cantidad de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de n elementos. Contando de 2 maneras distintas.

Forma 1: Contando las posibilidades que tiene cada elemento.

Cada elemento tiene 2 posibilidades, estar o no estar en el subconjunto; por lo tanto el total de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de cardinalidad n es: 2^n.

$$\underset{\text{Elemento } 1}{\underline{\;2\;}} \times \underset{\text{Elemento } 2}{\underline{\;2\;}} \times \cdots \times \underset{\text{Elemento } n-1}{\underline{\;2\;}} \times \underset{\text{Elemento } n}{\underline{\;2\;}}$$

Forma 2: Contando las posibilidades que tiene cada subconjunto.

La cantidad de subconjuntos con cero elementos son: $n\mathrm{C}0$.
La cantidad de subconjuntos con un elemento son: $n\mathrm{C}1$.
La cantidad de subconjuntos con dos elementos son: $n\mathrm{C}2$.

Y así sucesivamente hasta llegar a la cantidad de subconjuntos que tienen n elementos.

Por lo tanto el total de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de cardinalidad n es:

$$n\mathrm{C}0 + n\mathrm{C}1 + n\mathrm{C}2 + \cdots + n\mathrm{C}(n-2) + n\mathrm{C}(n-1) + n\mathrm{C}n$$

Y como se contó lo mismo, se debe cumplir que: $n\mathrm{C}0 + n\mathrm{C}1 + n\mathrm{C}2 + \cdots + n\mathrm{C}(n-2) + n\mathrm{C}(n-1) + n\mathrm{C}n = 2^n$.

Conclusión

Para demostrar identidades combinatorias se puede contar alguna situación de dos formas distintas, este método se conoce como **comparación**.

Problemas

Demuestra las siguientes identidades utilizando un argumento por conjuntos.

a) $n\mathrm{C}r = n\mathrm{C}(n-r)$.
b) $(n+1)\mathrm{C}(r+1) = n\mathrm{C}r + n\mathrm{C}(r+1)$, con $n \geq r+1$.
c) $n\mathrm{C}r = 2\mathrm{C}0(n-2)\mathrm{C}r + 2\mathrm{C}1[(n-2)\mathrm{C}(r-1)] + 2\mathrm{C}2[(n-2)\mathrm{C}(r-2)]$, con $n \geq r+2$, $r \geq 2$.
d) $(n+m)\mathrm{C}r = n\mathrm{C}0(m\mathrm{C}r) + n\mathrm{C}1[m\mathrm{C}(r-1)] + \cdots + n\mathrm{C}(r-1)(m\mathrm{C}1) + n\mathrm{C}r(m\mathrm{C}0)$, con $(m \geq r)$ y $(n \geq r)$.

Para b), considerar un conjunto A con $n+1$ elementos del cual se sacan $r+1$ elementos, y que para un elemento particular de A hay dos opciones: estar o no estar en la extracción.

Para c), considerar un conjunto A con n elementos que se puede dividir en dos conjuntos, uno con 2 elementos y otro con $n-2$ elementos, y se sacan r elementos de A.

Para d), razonar de manera similar al literal anterior.

Indicador de logro:

3.5 Realiza demostraciones sobre identidades combinatorias planteando dos formas de contar una situación específica.

Secuencia:

El contenido sobre teoría de conjuntos visto en la lección 1 de esta unidad, es otra herramienta que se puede utilizar para realizar demostraciones de identidades combinatorias.

Posibles dificultades:

En esta clase lo complicado es identificar la situación en la que hay que involucrar los conjuntos, puede ser formar subconjuntos, encontrar el complemento, etc., por esta razón la clase tiene asterisco, y puede requerir mayor apoyo por parte del docente.

Solución de problemas:

a) Teniendo un conjunto con n elementos, para formar un subconjuto de r elementos hay $n\text{C}r$ maneras diferentes de escoger los elementos que estarán en el subconjunto; y por otro lado también hay $n\text{C}(n-r)$ maneras de escoger los elementos que no estarán en el subconjunto, y tanto uno como otro caso representan la misma situación, se puede concluir que $n\text{C}r = n\text{C}(n-r)$.

b) Teniendo un conjunto con $n + 1$ elementos, para formar un subconjuto de $r + 1$ elementos hay $(n + 1)\text{C}(r + 1)$ maneras diferentes de escoger los elementos que estarán en el subconjunto; y por otro lado también considerando un elemento particular, al formar el subconjunto hay dos casos que no ocurren simultáneamente: si dicho elemento está en el subconjunto, solamente falta escoger r elementos de un total de n elementos, y esto se puede hacer de $n\text{C}r$ maneras; y el otro caso es si el elemento particular no está en el subconjunto, habría que escoger $r + 1$ elementos de un total de n elementos, y esto se puede hacer de $n\text{C}(r+1)$ maneras, entonces por el principio de la suma se tiene que el total de maneras para formar el subconjunto es $n\text{C}r + n\text{C}(r + 1)$. Por lo tanto, dado que se estaba contando lo mismo se cumple que $(n + 1)\text{C}(r + 1) = n\text{C}r + n\text{C}(r + 1)$, con $n \geq r + 1$.

c) Se analiza de manera parecida al literal anterior, solamente que ahora se consideran 2 elementos (no solo uno), entonces para formar un subconjunto de r elementos de un conjunto con n elementos se puede hacer de $n\text{C}r$ maneras; por otro lado considerando los dos elementos, se tienen 3 casos que no ocurren simultáneamente, que los dos no sean parte del subconjunto y el total de elementos del subconjunto se tomen de los restantes $(n-2)$ elementos del conjunto, esto se puede hacer de $2\text{C}0 \times (n-2)\text{C}r$; que uno de los dos sea parte del conjunto y los demás elementos del subconjunto se tomen de los restantes $(n-2)$ elementos del conjunto, esto se puede hacer de $2\text{C}1 \times [(n-2)\text{C}(r-1)]$; finalmente el último caso es que ambos elementos sean parte del subconjunto, y los demás se tomen de los restantes $(n-2)$ elementos del conjunto, esto se puede hacer de $2\text{C}2 \times [(n-2)\text{C}(r-2)]$; luego por el principio de la suma, se tiene que el total de subconjuntos es $2\text{C}0[(n-2)\text{C}r] + 2\text{C}1[(n-2)\text{C}(r-1)] + 2\text{C}2[(n-2)\text{C}(r-2)]$. Por lo tanto, dado que se estaba contando lo mismo $n\text{C}r = 2\text{C}0[(n-2)\text{C}r] + 2\text{C}1[(n-2)\text{C}(r-1)] + 2\text{C}2[(n-2)\text{C}(r-2)]$.

d) Este es el caso más general, dividir el conjunto en dos partes, una con n elementos y otra con m elementos, y para formar un subconjunto con r elementos se pueden tomar 0 elementos de entre los n y r de entre los m, 1 de entre los n y $r-1$ de entre los m, y así sucesivamente hasta considerar r de entre los n y 0 de entre los m, y de igual manera se puede concluir que $(n + m)\text{C}r = n\text{C}0(m\text{C}r) + n\text{C}1[m\text{C}(r-1)] + \cdots + n\text{C}(r-1)(m\text{C}1) + n\text{C}r(m\text{C}0)$.

Lección 3

3.6 Triángulo de Pascal

Problema inicial

Realiza las siguientes actividades:

a) Elabora una tabla y coloca en las filas valores de n desde 0 hasta 5, y en las columnas valores de r desde 0 hasta 5 también. En cada celda (que sea posible) calcula el valor del combinatorio ${}_nC_r$.

b) Ordena los valores de los combinatorios en forma triangular, desde el valor de $n = 0$ hasta $n = 5$.

c) Determina el patrón que sigue una fila a partir de la que le antecede y a partir de él deduce los valores de la sexta fila del triángulo sin calcular directamente los combinatorios.

Solución

a) En la primera fila solo se puede calcular un combinatorio, ${}_0C_0 = 1$; en la segunda fila solo se pueden calcular 2 combinatorios, ${}_1C_0$ y ${}_1C_1$; en la tercera fila solo se pueden calcular 3 combinatorios, ${}_2C_0$, ${}_2C_1$ y ${}_2C_2$. Así sucesivamente se calculan los valores de la tabla.

n \ r	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

b) Ordenando los combinatorios de la tabla en forma triangular:

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1

c) Analizando el triángulo formado, los costados siempre serán unos, puesto que allí queda el valor de ${}_nC_0$ (= 1) y ${}_nC_n$ (= 1), y al parecer el número que queda por debajo y en medio de dos números, es la suma de los dos números que están por encima de él. Por ejemplo, 2 está por debajo de 1 y 1, y se cumple que 1 + 1 = 2; de manera análoga 10 está debajo de 6 y 4, y se cumple que 6 + 4 = 10. Siguiendo este patrón, los valores de la fila 6 serían: 1, 1 + 5, 5 + 10, 10 + 10, 10 + 5, 5 + 1 y 1.

$n = 0$	1
$n = 1$	1 + 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 + 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1

Conclusión

El triángulo construido por los combinatorios se llama **triángulo de Pascal**. El patrón deducido en el Problema inicial puede ser probado matemáticamente utilizando la propiedad recursiva de Pascal que se demostró en la clase anterior, ${}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$.

$$
\begin{array}{c}
{}_0C_0 \\
{}_1C_0 \quad {}_1C_1 \\
{}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2 \\
{}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3 \\
{}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4 \\
{}_5C_0 \quad {}_5C_1 \quad {}_5C_2 \quad {}_5C_3 \quad {}_5C_4 \quad {}_5C_5 \\
{}_6C_0 \quad {}_6C_1 \quad {}_6C_2 \quad {}_6C_3 \quad {}_6C_4 \quad {}_6C_5 \quad {}_6C_6 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

Unidad 7

Problemas

1. Determina los valores de la séptima y octava fila del triángulo de Pascal sin calcular los combinatorios.

2. A la derecha se muestran dos filas del triángulo de Pascal. Justifica el cálculo que genera el segundo renglón aplicando que ${}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$.

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}
$$

199

Indicador de logro:

3.6 Establece la relación que existe entre los combinatorios en el triángulo de Pascal.

Secuencia:

Luego de haber visto las aplicaciones de las combinaciones para demostrar identidades, ahora se puede analizar el patrón que determinan las combinaciones en el triángulo de Pascal.

Propósito:

En la clase se pretende identificar y establecer el patrón del triángulo de Pascal a partir del Problema inicial, y en los Problemas se espera poder justificar correctamente dicho patrón, a partir del uso de la identidad de Pascal demostrada en la clase 3.5.

Solución de problemas:

1. Siguiendo el patrón del triángulo, del Problema inicial que se tiene hasta la fila 6, luego a partir de ella se puede calcular las filas 7 y 8:

$n = 0$	1
$n = 1$	1 + 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 + 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n = 8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1

2. Identificando que el valor de n en el combinatorio $n\text{C}r$, representa la fila correspondiente en el triángulo de Pascal, entonces la identidad $(n + 1)\text{C}(r + 1) = n\text{C}r + n\text{C}(r + 1)$ se puede interpretar como si el elemento en la fila siguiente (la cual sería $n + 1$) en la posición r contando de izquierda a derecha es igual a la suma de los elementos r y $r + 1$ de la fila anterior, los cuales son los que quedan arriba del elemento $(n + 1)\text{C}(r + 1)$, con lo que se justifica por qué en la construcción del triángulo de Pascal, es suficiente sumar los elementos contiguos de la fila anterior de manera recursiva para conocer la siguiente fila.

3.7 Binomio de Newton*

Problema inicial

Considerando el desarrollo del producto $(x + y)^5$, determina el coeficiente que acompaña a la parte literal x^2y^3.

Solución

El desarrollo de la expresión $(x + y)^5$ se puede expresar a partir de $(x + y)^5 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$.

Para desarrollar $(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$ se toma x o y de cada paréntesis y se multiplican, luego se simplifican términos semejantes. El coeficiente de x^2y^3 es igual al número de casos en que se toman tres y de entre los 5 paréntesis, es decir $5\text{C}3 = 10$.

Por lo tanto, el coeficiente que acompaña la parte literal x^2y^3 en el desarrollo del producto $(x + y)^5$ es:

$$5\text{C}3 = 10.$$

Teorema

En general considerando el desarrollo de $(x + y)^n$, el coeficiente que acompaña a la parte literal $x^{n-r}y^r$, con $0 \leq r \leq n$ es: $n\text{C}r$.

Por lo tanto, se cumple el siguiente resultado para desarrollar $(x + y)^n$:

$(x + y)^n = (n\text{C}0)x^n + (n\text{C}1)x^{n-1}y + (n\text{C}2)x^{n-2}y^2 + \cdots + [n\text{C}(n-2)]x^2y^{n-2} + [n\text{C}(n-1)]xy^{n-1} + (n\text{C}n)y^n.$

Y se puede expresar utilizando sumatorio de la siguiente manera:

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} (n\text{C}r)x^{n-r}y^r.$$

Este resultado se conoce como **binomio de Newton**, y además puede ser utilizado para demostrar algunas propiedades o identidades de los combinatorios que no son tan obvias utilizando conteo.

Ejemplo

Demuestra la siguiente identidad combinatoria: $n\text{C}0 + n\text{C}1 + n\text{C}2 + \cdots + n\text{C}(n-2) + n\text{C}(n-1) + n\text{C}n = 2^n$.

Utilizando el binomio de Newton y dándole los valores numéricos para $x = 1$ y $y = 1$.

$$(1 + 1)^n = (n\text{C}0)1^n + (n\text{C}1)1^{n-1}1 + (n\text{C}2)1^{n-2}1^2 + \cdots + [n\text{C}(n-2)]1^2 1^{n-2} + [n\text{C}(n-1)]1^1 1^{n-1} + (n\text{C}n)1^n$$

$$2^n = n\text{C}0 + n\text{C}1 + n\text{C}2 + \cdots + n\text{C}(n-2) + n\text{C}(n-1) + n\text{C}n.$$

Problemas

1. Determina el coeficiente de x^7 en el desarrollo del binomio $(1 - x)^{10}$.
2. Determina el coeficiente de x^2y^6 en el desarrollo del binomio $(x + 3y^3)^4$.
3. Determina el coeficiente del término que no contiene x en el desarrollo del binomio $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$.
4. Demuestra: $\sum_{r=0}^{n} 3^r(n\text{C}r) = 4^n$.

Puedes aplicar un método similar al del ejemplo.

200

Indicador de logro:

3.7 Aplica el binomio de Newton para determinar el coeficiente de un término en el desarrollo de un binomio.

Secuencia:

El desarrollo de las potencias de un binomio ha sido desarrollado en los contenidos sobre álgebra, en su momento hasta potencias al cubo, sin embargo, las combinaciones representan una herramienta muy útil para el desarrollo de las potencias n-ésimas de un binomio, resultado conocido como binomio de Newton.

Propósito:

La deducción de la fórmula del binomio de Newton puede conllevar un análisis complejo, por lo que la clase tiene asterisco, lo cual significa que podría necesitar más apoyo por parte del docente, la aplicación de dicha fórmula puede ir desde binomios sencillos hasta algunos más complejos.

Solución de problemas:

1. Del problema se sabe que $n = 10$, y calculando el valor de r:

$x^7 = 1^{10-r}x^r = x^r$, por lo tanto $r = 7$, entonces el coeficiente es $10\text{C}7 \times 1^{10-7} \times (-1)^7 = -120$.

2. Del problema se sabe que $n = 4$, y calculando el valor de r:

$x^2y^6 = x^{4-r}(y^3)^r = x^{4-r}y^{3r}$, por lo tanto $r = 2$, entonces el coeficiente es $4\text{C}2 \times 1^{4-2} \times (3)^2 = 6 \times 9 = 54$.

3. Del problema se sabe que $n = 9$, y calculando el valor de r:

$x^0 = (x^2)^{9-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = x^{18-2r}x^{-r} = x^{18-3r}$ por lo tanto $r = 6$, entonces el coeficiente es $9\text{C}6 \times 1^{9-6} \times 1^6 = 84$.

Si los estudiantes no saben cómo iniciar este problema, se puede dar la pista de que el término que no contiene x se da cuando su exponente es 0.

4. Considerando la expresión del binomio de Newton, y sustituyendo $x = 1$ y $y = 3$:

$$(1+3)^n = (n\text{C}0)1^n + (n\text{C}1)1^{n-1}3 + (n\text{C}2)1^{n-2}3^2 + \cdots + [n\text{C}(n-2)]1^2 3^{n-2} + [n\text{C}(n-1)]1^1 3^{n-1} + (n\text{C}n)3^n$$

$$4^n = n\text{C}0 + (n\text{C}1 \times 3) + (n\text{C}2 \times 3^2) + \cdots + (n\text{C}(n-2) \times 3^{n-2}) + (n\text{C}(n-1) \times 3^{n-1}) + (n\text{C}n \times 3^n)$$

Por lo tanto, $\sum_{r=0}^{n} 3^r(n\text{C}r) = 4^n$.

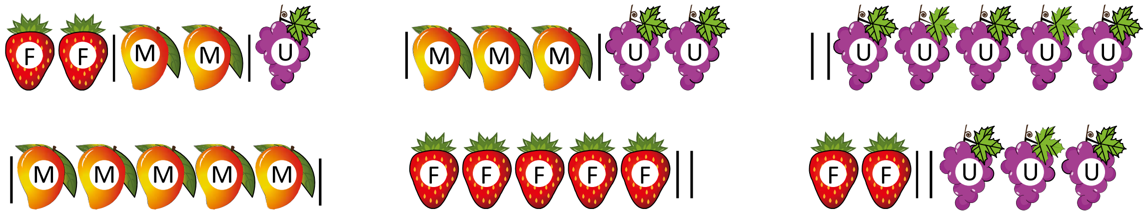
3.8 Técnica de los separadores*

Problema inicial

José quiere comprar 5 dulces en la tienda y le dan a escoger 3 sabores diferentes, fresa, mango y uva. ¿De cuántas formas puede escoger José los 5 dulces que desea comprar, si incluso podría comprarlos todos de un mismo sabor?

Solución

Se pueden escoger los sabores en orden, fresa, mango y uva, y se pone una | (separador) entre los grupos de diferente sabor. Por ejemplo:



Entonces una fila de 5 bolitas (O) y 2 separadores (|), corresponde a una única combinación de sabores de dulces, por lo tanto, el problema se reduce a contar el total de maneras que hay de ordenar 5 bolitas idénticas y 2 separadores idénticos. Y esto se puede hacer escogiendo los 2 lugares de entre los 7 que pueden ocupar los separadores, es decir de $_7C_2$ maneras (o bien escogiendo los lugares de las bolitas de $_7C_5$ maneras).

○○|○○|○

El total de formas en que se pueden escoger 5 dulces de entre 3 sabores es $_7C_2 = 21$.

En general

El total de formas para escoger r objetos de n tipos diferentes entre sí, si los objetos de un tipo son idénticos entre sí, se puede hacer agregando $n - 1$ separadores y el total estaría dado por:

$$_{(n + r - 1)}C_r.$$

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para pedir 6 pupusas escogiendo entre queso, frijol con queso, revueltas y queso con loroco, si:
   a) No hay restricciones.
   b) Debe pedirse al menos 1 de cada clase.
   c) Se deben pedir al menos 3 revueltas.
   d) Deben pedirse 2 de queso y a lo sumo 2 revueltas.

Puedes asegurar una de cada clase y luego pedir las otras 2 de cualquier clase.

2. Determina todas las soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$, si:
   a) Son enteros no negativos.
   b) Son enteros positivos.

Puedes analizar de manera parecida al problema 1 literal b.

Unidad 7

201

Indicador de logro:

3.8 Utiliza separadores para resolver problemas de conteo que requieran escoger grupos de objetos idénticos.

Secuencia:

La última clase de esta lección es en la aplicación de las combinaciones en el modelamiento de una técnica llamada separadores, la cual es útil para determinar las posibles particiones de un total, en donde cada partición tiene objetos idénticos.

Propósito:

El Problema inicial puede resolverse de manera analítica, sin embargo conlleva una gran dificultad, poder plantear la Solución utilizando separadores facilita su comprensión, pero para alcanzar esta idea puede ser necesaria la intervención del docente, por ello esta clase tiene asterisco.

Solución de problemas:

1a) Puesto que son 6 objetos y hay 4 clases diferentes, entonces se pueden colocar (4 – 1) separadores, y por lo tanto, el total de formas que hay para pedir las 6 pupusas es $(6 + 3)C6 = 9C6 = 84$.

1b) Quitando 4 pupusas (una de cada tipo) de las 6 que habría que pedir, faltaría escoger 2 pupusas de entre las 4 clases diferentes, y colocando 3 separadores se tiene que el total de formas de pedir las pupusas es $(2 + 3)C2 = 5C2 = 10$.

1c) Quitando 3 pupusas (asegurando las 3 revueltas) de las 6 que habría que pedir, faltaría escoger 3 pupusas de entre las 4 clases diferentes, y colocando 3 separadores se tiene que el total de formas de pedir las pupusas es $(3 + 3)C2 = 6C2 = 15$.

1d) Primero se debe calcular el total de maneras de pedir las pupusas asegurando 2 de queso, entonces se tendrían que quitar 2 pupusas del total, y además hay que quitar un separador, puesto que ya no se podrían pedir más pupusas de queso, por lo que el total de maneras de pedir 2 pupusas de queso y otras 4 de otro tipo es $(4 + 2)C4 = 6C4$ maneras; por otro lado, si a este total se le resta cuando se compran al menos 3 revueltas, lo cual se puede calcular quitando 5 pupusas (2 de queso y 3 revueltas) del total, y se tendría que se puede hacer de $(1 + 2)C1 = 3C1$ maneras. Finalmente, utilizando el conteo por el complemento, si al total de maneras de pedir 2 pupusas de queso se le resta el de pedir 2 pupusas de queso y al menos 3 revueltas, da como resultado el total de maneras de pedir 2 pupusas de queso y a lo sumo 2 revueltas, se tiene que el total es $6C4 - 3C1 = 15 - 3 = 12$.

2a) Si los objetos se consideran unos, y los separadores determinan cuántos unos le corresponde a cada variable (x_1, x_2, x_3, x_4), entonces se puede considerar 8 objetos (8 unos), y (4 – 1) separadores (4 variables o clases diferentes de objetos), por lo tanto, el total de soluciones de la ecuación con enteros no negativos (el valor de las variables puede ser cero, que sucede cuando los separadores quedan juntos) es $(8 + 3)C8 = 11C8 = 165$.

2b) En este caso solo es necesario asegurar un objeto (un uno) de cada clase (a cada variable), entonces, quitando 4 objetos, quedan 4 objetos y agregando 3 separadores, se tiene que por lo tanto, el total de soluciones de la ecuación es $(4 + 3)C4 = 7C4 = 35$.

3.9 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas, utilizando estrategias de conteo de combinaciones.

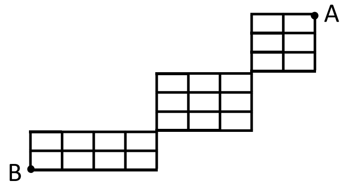
1. Se tienen 3 cartas iguales, y se dispone de 5 sobres de diferente color. Determina de cuántas formas se pueden colocar las cartas en los sobres.

2. Determina cuántos triángulos se pueden formar uniendo tres vértices de un hexágono.

3. ¿Cuántas cadenas binarias (de ceros y unos) de longitud 8 tienen como máximo 3 unos?

4. Se tiene 6 niñas y 3 niños, determina de cuántas formas se pueden ordenar si los 3 niños no pueden estar uno a la par de otro (siempre tienen que estar separados por al menos una niña).

5. Determina cuántos caminos de longitud mínima hay para llegar de A hasta B en la siguiente figura.



6. Resuelve:

   a) En el binomio de Newton $(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} ({}_n\mathrm{C}_r) x^{n-r} y^r$, sustituye $x = 1$ y $y = -1$, para demostrar la relación $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r = 0$.

   b) Encuentra el valor de $\sum_{r=2}^{2020} (-1)^r ({}_{2\,020}\mathrm{C}_r)$ utilizando la relación del literal a.

7. Un grupo de 7 amigos quiere comprar paletas en una heladería, si en la heladería hay 7 sabores diferentes de paletas, determina de cuántas formas se puede comprar una paleta para cada integrante del grupo de amigos.

Indicador de logro:

3.9 Resuelve problemas correspondientes a las combinaciones.

Solución de problemas:

1. Es suficiente determinar el total de maneras de escoger los 3 sobres en donde se van a colocar las cartas, y para ello se cuenta con 5 sobres de los cuales se van a escoger 3, por lo tanto, el total de formas es ${}_5C_3 = 10$.

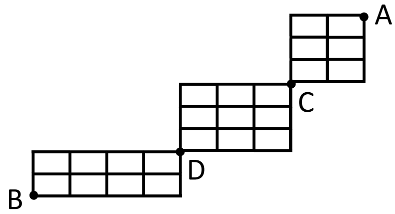
2. Puesto que en un hexágono nunca hay 3 vértices alineados (ya no sería hexágono), es suficiente con escoger 3 puntos de entre los 6 vértices, por lo tanto, esto se puede hacer de ${}_6C_3 = 20$ maneras.

3. Para este problema se pueden dar 4 casos, haber 0, 1, 2 o 3 unos, y para ello basta identificar en cuáles de las 8 posiciones irán los unos; para el caso de 0 unos hay ${}_8C_0$ maneras; para el caso de 1 uno hay ${}_8C_1$ maneras; para el caso de 2 unos hay ${}_8C_2$ maneras y finalmente para el caso de 3 unos hay ${}_8C_3$ maneras. Por lo tanto, por el principio de la suma, se tiene que el total de cadenas binarias con las condiciones del problema es ${}_8C_0 + {}_8C_1 + {}_8C_2 + {}_8C_3 = 1 + 8 + 28 + 56 = 93$.

4. Ordenando primero las niñas, pues ellas no tienen ninguna restricción, esto se puede hacer de 6! maneras, luego una vez colocadas 6 niñas, los niños tiene 7 opciones al principio, al final, o entre los espacios que se forman entre niña y niña, luego para que estén separados, basta colocar 3 niños en esos 7 puestos, y esto se puede hacer de ${}_7P_3$ maneras, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de formas para ordenar los niños con las condiciones del problema es $6! \times {}_7P_3 = 720 \times 210 = 151\,200$.

_____	Niña	_____	Niña	_____	Niña	_____	Niña	_____	Niña	_____	Niña	_____
Lugar 1		Lugar 2		Lugar 3		Lugar 4		Lugar 5		Lugar 6		Lugar 7

5. Es suficiente calcular la cantidad de caminos que hay de A a C, luego de C a D y finalmente de D a B. Entonces el total de caminos de A a C es ${}_{(2+3)}C_2$, el total de caminos de C a D es ${}_{(3+3)}C_3$ y el total de caminos de D a B es ${}_{(4+2)}C_4$, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de caminos de longitud mínima para ir de A a B es ${}_5C_2 \times {}_6C_3 \times {}_6C_4 = 10 \times 20 \times 15 = 3\,000$.



6a) Considerando la expresión del binomio de Newton, y sustituyendo $x = 1$ y $y = -1$:

$$(1 + -1)^n = ({}_nC_0)1^n + ({}_nC_1)1^{n-1}(-1) + ({}_nC_2)1^{n-2}(-1)^2 + \cdots + [{}_nC_{(n-1)}]1^1(-1)^{n-1} + ({}_nC_n)(-1)^n$$

$$0 = {}_nC_0 + [{}_nC_1 \times (-1)] + ({}_nC_2 \times 1) + \cdots + [{}_nC_{(n-1)} \times (-1)^{n-1}] + [{}_nC_n \times (-1)^n]$$

Por lo tanto, $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r {}_nC_r = 0$.

6b) Considerando $n = 2020$ en la fórmula de 6a), se tiene que:

$$\sum_{r=0}^{2020}(-1)^r {}_{2\,020}C_r = (-1)^0 {}_{2\,020}C_0 + (-1)^1 {}_{2\,020}C_1 + \sum_{r=2}^{2020}(-1)^r({}_{2\,020}C_r) = 0$$

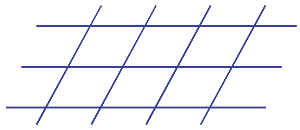
Por lo tanto, $\sum_{r=2}^{2020}(-1)^r({}_{2\,020}C_r) = 2\,020 - 1 = 2\,019$.

7. Puesto que se van a comprar 7 objetos y pueden ser de 7 clases diferentes, se pueden agregar (7 – 1) separadores, entonces el total de formas para comprar las paletas es ${}_{(7+6)}C_7 = {}_{13}C_7 = 1\,716$.

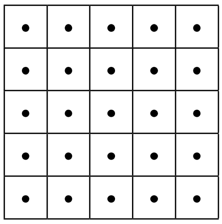
3.10 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Determina cuántos paralelogramos hay en la figura de la derecha. Las líneas horizontales y oblicuas son paralelas respectivamente.



2. Considerando el siguiente arreglo de puntos sobre el tablero de la figura.



Determina el número de formas en que se pueden seleccionar 3 puntos de modo que sean los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean paralelos a los lados de la cuadrícula.

3. De un grupo de 8 estudiantes se harán 4 grupos de 2 estudiantes. Determina cuántos grupos se pueden formar si:

a) Cada grupo hablará sobre un tema distinto que puede ser: equidad de género, democracia, medio ambiente o educación integral de la sexualidad.

b) Todos los grupos deben discutir sobre la inclusividad.

4. Determina de cuántas maneras se pueden agrupar 9 personas en 3 grupos, cuando el número de personas de cada grupo es:

a) 2, 3 y 4. b) 3, 3 y 3. c) 2, 2 y 5.

5. Demuestra la fórmula $\frac{n!}{r_1!\,r_2!\,\ldots\,r_k!}$ vista en la clase 2.10 aplicando combinaciones.

6. Demuestra la igualdad $n\mathrm{C}r = \frac{n(n-1)}{r\,(r-1)}[(n-2)\mathrm{C}(r-2)]$ aplicando la fórmula $p\mathrm{C}q = \frac{p!}{(p-q)!q!}$.

Unidad 7

Indicador de logro:

3.10 Resuelve problemas correspondientes a los métodos de conteo.

Solución de problemas:

1. Para formar un paralelogramo se necesitan 2 líneas paralelas en posición oblicua, y 2 líneas paralelas en posición horizontal, es decir, equivale a seleccionar 2 de las 4 líneas oblicuas y 2 de las 3 líneas horizontales, y esto se puede hacer de $4\text{C}2$ y $3\text{C}2$ maneras respectivamente, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de paralelogramos que se pueden formar es $4\text{C}2 \times 3\text{C}2 = 6 \times 3 = 18$.

2. Puesto que a partir de un rectángulo se pueden formar 4 triángulos rectángulos, entonces se puede contar primero el total de rectángulos que se pueden formar con los puntos, que es $5\text{C}2 \times 5\text{C}2$ (se necesitan 2 de los 5 puntos verticales, y 2 de los 5 puntos horizontales), por lo tanto, el total de triángulos rectángulos que se pueden formar con la cuadrícula es $5\text{C}2 \times 5\text{C}2 \times 4 = 400$.

3a) La cantidad de maneras que hay para distribuir los estudiantes en los grupos es $8\text{C}2$ para el primer tema, luego $6\text{C}2$ para el segundo, $4\text{C}2$ para el tercero y $2\text{C}2$ para el cuarto, luego, el total de maneras de repartir los temas es $8\text{C}2 \times 6\text{C}2 \times 4\text{C}2 \times 2\text{C}2 = 28 \times 15 \times 6 \times 1 = 2\,520$.

3b) Esta situación es equivalente a solamente formar los grupos sin ordenarlos, puesto que no hay diferencia en distribuir los temas, cada arreglo del literal anterior se estaría contando 4! veces, por lo tanto, si el tema es sobre inclusividad, el total de grupos que se pueden formar para hablar sobre la inclusividad es $8\text{C}2 \times 6\text{C}2 \times 4\text{C}2 \times 2\text{C}2 \div 4! = 28 \times 15 \times 6 \times 1 \div 24 = 105$.

4a) De entre las 9 personas se escogen las que integrarán el grupo de 2 de $9\text{C}2$ maneras, y quedan 7 personas, de entre ellas se escogen las que integrarán el grupo de 3 de $7\text{C}3$ maneras, y quedan 4 personas que son las que integrarán el último grupo, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras de formar los grupos es $9\text{C}2 \times 7\text{C}3 \times 4\text{C}4 = 36 \times 35 \times 1 = 1\,260$.

4b) De manera análoga a 4a), hay $9\text{C}3 \times 6\text{C}3 \times 3\text{C}3 = 84 \times 20 \times 1 = 1\,680$ grupos, sin embargo, en este caso los 3 grupos son similares (puesto que están integrados de 3 personas cada uno), entonces se estaría contando 3! veces cada arreglo, por lo tanto, hay $1\,680 \div 3! = 280$ maneras de formar los grupos.

4c) Utilizando un razonamiento similar al literal anterior, para este caso, el total de maneras de formar los grupos es $9\text{C}2 \times 7\text{C}2 \times 5\text{C}5 \div 2! = 36 \times 21 \times 1 \div 2 = 378$.

5. Considerando que los n espacios están vacíos, para los primeros r_1 objetos idénticos se tienen $n\text{C}r_1$ maneras de escoger los lugares en los que irán, luego para los siguientes r_2 objetos idénticos se tienen $(n - r_1)\text{C}r_2$ maneras de escoger los lugares en los que irán, y así sucesivamente hasta llegar al último grupo de objetos idénticos; luego aplicando el principio de la multiplicación se tendrá el total de maneras de ordenar los objetos es $n\text{C}r_1 \times (n - r_1)\text{C}r_2 \times \ldots \times (n - r_1 - r_2 - \ldots - r_{k-1})\text{C}r_k = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$.

6. $n\text{C}r = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!r(r-1)!} = \frac{n}{r} \times \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(r-1)]!(r-1)!} = \frac{n}{r}[(n-1)\text{C}(r-1)]$.

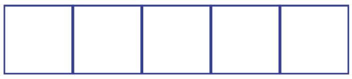
Ahora aplicando el resultado anterior a $[(n-1)\text{C}(r-1)] = \frac{n-1}{r-1}[(n-1)\text{C}(r-1)]$, luego

$n\text{C}r = \frac{n}{r}[(n-1)\text{C}(r-1)] = \frac{n(n-1)}{r\,(r-1)}[(n-2)\text{C}(r-2)]$.

3.11 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Se pintan los 5 cuadrados de la figura con los colores rojo, verde y azul; de modo que dos contiguos (a la par uno del otro) tengan diferentes colores, y no se requiere utilizar todos los colores. Determina de cuántas formas se pueden pintar en cada caso:



   a) Sin restricción b) Simétricamente c) Solo verde y azul

2. Determina el número de filas compuestas por las cifras: 1, 2, 3, 4 y 5 no repetidas y de modo que en los dos extremos hay números impares.

3. En un país que tiene varios aeropuertos, una aerolínea ofrece vuelos que conectan cualesquiera dos aeropuertos de dicho país. Si se sabe que la aerolínea realiza 42 vuelos diferentes (que conectan 2 aeropuertos diferentes en cada vuelo), determina cuántos aeropuertos tiene dicho país tomando en cuenta que el viaje que conecta un aeropuerto A con un aeropuerto B se considera diferente al viaje que conecta al aeropuerto B con el aeropuerto A.

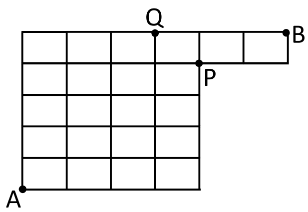
4. Una rana se ubica en el escalón 10 de unas gradas, la rana se mueve un escalón por salto (hacia arriba o hacia abajo). ¿Cuántas formas existen para que la rana en su décimo salto quede en el escalón 14?

5. Determina de cuántas formas se puede ir por la ruta más corta en las condiciones siguientes:

   a) De A a B pasando por P.

   b) De A a B pasando por Q.

   c) De A a B.



6. Demuestra que ${}_{15}C_0 + {}_{16}C_1 + {}_{17}C_2 + {}_{18}C_3 = {}_{19}C_3$.

Puedes sustituir el primer término ${}_{15}C_0$ (= 1) por ${}_{16}C_0$ (= 1), y luego aplicar la fórmula ${}_pC_q + {}_pC_{(q+1)} = {}_{(p+1)}C_{(q+1)}$ repetidamente.

Indicador de logro:

3.11 Resuelve problemas correspondientes a los métodos de conteo.

Solución de problemas:

1a) A la primera casilla se le puede dar cualquiera de los tres colores, luego a la segunda, puesto que debe ser de un color diferente a la primera, se le puede dar cualquiera de los 2 colores restantes, para la tercera no se le puede dar el color de la segunda pero ya se puede volver a utilizar el de la primera, por lo que también tendrá 2 opciones, y así en las casillas sucesivas habrán siempre 2 opciones para los colores, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras para pintarlo es $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$.

1b) De manera análoga al literal 1a, la primera casilla tendrá 3 opciones, pero la última casilla queda determinada por dicho color, la segunda casilla tendrá 2 opciones y determina el color de la cuarta casilla también, y la tercera casilla tendrá 2 opciones, por lo tanto, el total de maneras de pintarlo simétricamente es $3 \times 2 \times 2 = 12$.

1c) Tomando solo dos colores, la primera casilla tendrá 2 opciones, la segunda solamente el color alternativo, la tercera tendrá el color alternativo a la segunda, y así sucesivamente, solamente habrán dos opciones $2 \times 1 \times 1 = 2$.

1a)

3	2	2	2	2

1b)

3	2	2	1	1

1c)

2	1	1	1	1

2. Se cuenta con 3 números impares, entonces el primer extremo tendrá 3 opciones y el otro tendrá 2 opciones, luego para las posiciones centrales habrán 3, 2 y 1 opción respectivamente, por lo tanto utilizando el principio de la multiplicación, el total de filas es $_3P_2 \times 3! = 36$.

$\underline{3}\quad \underline{3}\quad \underline{2}\quad \underline{1}\quad \underline{2}$

3. Tomando como n la cantidad de aeropuertos, el total de viajes que se pueden hacer con n aeropuertos es $_nP_2$ (para iniciar el viaje hay n opciones, y para completarlo $n-1$ hay opciones), y esto debe ser igual a 42, luego trabajando la expresión $_nP_2 = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) = 42 \Rightarrow n^2 - n - 42 = 0$ $\Rightarrow (n-7)(n+6) = 0 \Rightarrow n = 7$, por lo tanto, la ciudad tiene 7 aeropuertos.

4. La rana debe subir 4 escalones, si da x saltos hacia arriba y y saltos hacia abajo, se debe cumplir el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

De donde se puede determinar que $x = 7$, $y = 3$, entonces se dan 7 saltos hacia arriba y 3 hacia abajo, por lo tanto, el total de formas en que puede llegar la rana hasta el escalón 14 es $_{10}C_3 = 120$.

5a) El total de caminos de A a P es $_{(4 + 4)}C_4$, y para llegar de P a B hay $_{(2 + 1)}C_2$ caminos, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, se tendrá que el total de caminos es $_8C_4 \times {_3C_2} = 70 \times 3 = 210$.

5b) De manera análoga al literal 5a, se tendrá que el total de caminos es $_8C_3 \times {_3C_3} = 56 \times 1 = 56$.

5c) Para llegar de A a B solo hay dos casos, pasando por P o pasando por Q, y ambos casos no curren simultáneamente, por lo tanto, por el principio de la suma, se tiene que el total de caminos es la suma de los resultados de los literales 5a y 5b, es decir, $210 + 56 = 266$.

6. $_{15}C_0 + {_{16}C_1} + {_{17}C_2} + {_{18}C_3} = {_{16}C_0} + {_{16}C_1} + {_{17}C_2} + {_{18}C_3} = {_{17}C_1} + {_{17}C_2} + {_{18}C_3} = {_{18}C_2} + {_{18}C_3} = {_{19}C_3}$