Unidad 8. Probabilidad

Competencia de la unidad

Aplicar los conceptos básicos sobre probabilidad, resolviendo problemas del entorno y calculando probabilidades para tomar decisiones acertadas y oportunas en situaciones específicas de la vida cotidiana.

Relación y desarrollo

Segundo año de bachillerato

Unidad 7: Métodos de conteo

- Teoría de conjuntos
- Las permutaciones
- Las combinaciones

↓

Unidad 8: Probabilidad

- Axiomas de Kolmogórov
- Probabilidad condicional

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Axiomas de Kolmogórov	1	1. Actividad introductoria
	1	2. Probabilidad
	1	3. Intersección y regla de adición para probabilidad
	1	4. Aplicación de la regla de adición de probabilidad
	1	5. Axiomas de probabilidad (teórica)
	1	6. Probabilidad del complemento
	1	7. Practica lo aprendido
2. Probabilidad condicional	1	1. Probabilidad condicional
	1	2. Variantes de la probabilidad condicional
	1	3. Aplicación de la probabilidad condicional
	1	4. Problemas con probabilidad condicional
	1	5. Experimentos independientes
	1	6. Probabilidad de experimentos independientes, parte 1
	1	7. Probabilidad de experimentos independientes, parte 2
	1	8. Practica lo aprendido
	2	9. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la unidad 8
	2	Prueba del cuarto periodo

17 horas clase + prueba de la unidad 8 + prueba del cuarto periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Axiomas de Kolmogórov

Se introduce la necesidad del uso de las probabilidades, y su motivante histórica, pasando por los enfoques de probabilidad frecuentista y clásica, hasta llegar a establecer la axiomática que fundamente todos los enfoques anteriores y permita construir y argumentar formalmente los resultados más relevantes de la teoría de probabilidad.

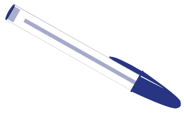
Lección 2: Probabilidad condicional

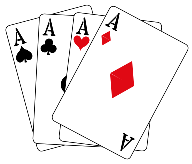
Una vez establecidos los axiomas de probabilidad, se puede continuar abordando el concepto de probabilidad condicional, a partir del cual se pueden trabajar diferentes variables de problemas, hasta poder utilizar de manera intuitiva los resultados sobre el teorema de probabilidad total y el teorema de Bayes. Esta lección concluye la parte de la estadística inferencial que permite realizar predicciones con cierto grado de certeza, para asegurar la toma de decisiones pertinentes según las condiciones de un fenómeno determinado.

Lección 1 Axiomas de Kolmogórov

1.1 Actividad introductoria

Materiales
- Una moneda, un lapicero, un juego de naipes.





Actividad
- Dibuja en tu cuaderno una tabla con 3 filas y 11 columnas, en la primera columna coloca los títulos, predicción y resultado, y en la primera fila los números del 1 al 10.
- Coloca en la segunda fila los resultados que podrías predecir al tirar una moneda, si en el primer lanzamiento crees que caerá cara coloca "Ca" abajo del número 1, sino coloca "Co". Observa el ejemplo y llena la fila de predicciones en tu cuaderno; como lo muestra el ejemplo:

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Predicción	Ca									
Resultado										

- Ahora realiza 10 lanzamientos con la moneda y llena la fila de resultados. Luego responde:

a) Analiza si es más factible que en 10 lanzamientos de la moneda se obtengan 10 caras, o que en 10 lanzamientos se obtengan 6 caras y 4 coronas.
b) ¿Cuáles son todos los posibles resultados que se podían obtener al lanzar una moneda?
c) ¿Cuántas veces se obtuvo cara como resultado al lanzar la moneda 10 veces? ¿Cuántas veces se obtuvo corona?
d) Divide la cantidad de caras obtenidas en los resultados entre 10 (frecuencia relativa).

Definición
Al lanzar una moneda no se puede saber con certeza el resultado que se obtendrá, sin embargo, puede existir una forma de tener un parámetro sobre los resultados que son más certeros y los que no. La rama de la matemática que estudia la forma de representar con números la mayor o menor certeza de la ocurrencia de un resultado para realizar predicciones se conoce como: **probabilidad**.

Un proceso que genera un conjunto de datos (o resultados, como el hecho de lanzar una moneda) se conoce como **experimento**. El conjunto de los posibles resultados que se pueden obtener al realizar un experimento se conoce como **espacio muestral**. Un elemento del espacio muestral se conoce como **evento simple** y cualquier subconjunto del espacio muestral se conoce como **evento**.

El valor obtenido dividiendo la cantidad de veces que se obtiene un resultado específico entre el total de veces que se realiza un experimento (frecuencia relativa) se conoce como: **probabilidad experimental**.

$$P_e(A) = \frac{\text{Número de veces que sucede un evento A}}{\text{Total de veces que se realiza un experimento}}.$$

Problemas
Utilizando el juego de naipes (baraja), realiza una predicción respecto al color que se puede obtener en cada carta, al sacar 10 cartas (después de sacar una carta, no se devuelve). Luego realiza el experimento y escribe los resultados en una tabla, así como lo hiciste en la actividad:

a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento del color que tiene una carta extraída de la baraja?
b) Ejemplifica al menos 5 eventos simples que pueden ocurrir en el experimento de extraer 10 cartas y ver su color.
c) Basado en los resultados obtenidos, calcula la probabilidad experimental que al extraer una carta, esta sea de color negro.

Indicador de logro:

1.1 Define y aplica los conceptos de probabilidad, experimento aleatorio, espacio muestral, evento, probabilidad experimental y evento simple.

Secuencia:

Durante la primera clase de esta unidad, se da el contexto motivante de la creación de la teoría de probabilidad, en ella se plantea el hecho de poder pronosticar con cierto grado de certeza la ocurrencia o no de un evento específico.

Propósito:

En la actividad se espera que los estudiantes se enfrenten a fenómenos aleatorios, e intenten predecir la ocurrencia de algún evento, asociando en cierta medida con la definición de la suerte. A partir de ello se puede establecer la definición de la probabilidad experimental como una frecuencia relativa.

Solución de problemas:

a) Representando por R si la carta es roja, y por N si la carta es negra, puesto que el experimento consiste en extraer una sola carta, solamente hay dos opciones en el espacio muestral, roja o negra, es decir, S = {R, N}.

b) Este ítem es para verificar la comprensión del concepto de evento, visto como elemento del conjunto del espacio muestral (que en este caso tiene $2^{10} = 1\,024$ elementos), considerando únicamente algunos 5 eventos simples que pueden ocurrir tales como RRRRRNNNNN (5 rojas al inicio y 5 negras después), RNRNRNRNRN (5 rojas y 5 negras intercaladas), NNNNNRRRRR, NRRNRRNRRN, NNNNNNNNNN, etc., en este literal el docente debe verificar que los eventos que escojan los estudiantes sean coherentes con el espacio muestral del experimento de sacar 10 cartas y ver su color.

c) Este literal dependerá de los resultados que se den al momento de realizar el experimento, sin embargo de manera teórica se puede esperar que la probabilidad experimental (frecuencia relativa) se aproxime a $\frac{1}{2}$ o 0.5, sin embargo, pueden darse casos en los que se aleje mucho de este valor, pero serían muy pocos (si ocurren).

Lección 1

1.2 Probabilidad

Problema inicial

Considerando el experimento de lanzar una moneda una vez.

a) ¿Piensas que la posibilidad de caer cara es mayor que la de caer corona?
b) ¿Con cuál número se podría expresar la posibilidad de caer cara?

Solución

a) Al lanzar una moneda solo hay dos posibles resultados, cae cara o cae corona. Ambas opciones tendrían la misma posibilidad de caer.

b) Solo hay dos posibles resultados y para que caiga cara solo hay una forma; además los resultados tienen la misma posibilidad de caer y esto se puede expresar como una fracción:

$$\frac{1}{2}$$

1 ← Una forma de caer cara.

Dos posibles resultados cara o corona. → 2

Definición

Si en un experimento se cumple que cada evento simple (cada posible resultado) tiene la misma posibilidad de ocurrir, entonces el valor obtenido dividiendo el total de elementos que tiene un evento A (casos favorables), es decir, $n(\text{A})$, entre el total de elementos del espacio muestral S (casos posibles), es decir, $n(\text{S})$, se conoce como **probabilidad teórica**, además:

$$\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})}.$$

Ejemplo

Calcula la probabilidad de que al lanzar un dado caiga un número par (la cantidad de puntos sea par).

Considerando el espacio muestral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Denotando el evento A = "Cae un número par", este evento se puede expresar como A = {2, 4, 6}.

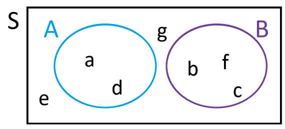
Por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Problemas

1. Determina la probabilidad de que al lanzar un dado dos veces caiga el número 3 en ambas ocasiones (la cantidad de puntos sea 3).

2. Determina la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de todos los puntos (de ambos dados) sea 7.

3. Considerando el espacio muestral (S) como conjunto, analiza el siguiente diagrama de Venn, si cada evento simple tiene la misma probabilidad de ocurrir, resuelve:
   a) Determina la probabilidad teórica de A.
   b) Determina la probabilidad teórica de B.



4. Calcula la probabilidad teórica del evento de sacar una carta roja en una extracción de una baraja y compárala con la probabilidad experimental. Para la probabilidad experimental utiliza la clase anterior.

Unidad 8

Indicador de logro:

1.2 Calcula la probabilidad teórica para situaciones específicas.

Secuencia:

Luego de haber trabajado con la probabilidad experimental, se puede definir la probabilidad teórica, cuyo abordaje será utilizando la idea de cardinalidad de conjuntos, puesto que este enfoque es más formal y contribuye a justificar los resultados de la teoría de probabilidades a partir de la teoría de conjuntos.

Propósito:

En la Conclusión se espera que los estudiantes logren asociar los casos favorables con la cardinalidad del conjunto A (evento A), y los casos posibles con la cardinalidad del espacio muestral (conjunto S); esta relación se intenta concretizar en el Ejemplo.

Solución de problemas:

1. Considerando el espacio muestral S: resultados al lanzar un dado dos veces.

Y denotando por A: cae 3 en la primera y segunda tirada de un dado.

$n(\text{S}) = 6 \times 6 = 36$ (Por el principio de la multiplicación, al lanzar el dado ambas veces, este tiene 6 opciones cada vez).

$n(\text{A}) = 1 \times 1 = 1$ (solamente hay una forma en que caiga 3 para ambas ocasiones).

Por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})} = \frac{1}{36}$.

2. Considerando el espacio muestral S: resultados al lanzar dos dados.

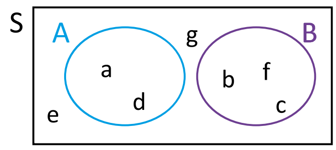
Y denotando A = {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}, donde el primer número corresponde a un dado y el segundo número al otro.

$n(\text{S}) = 6 \times 6 = 36$ (es un espacio muestral idéntico al del problema anterior) y $n(\text{A}) = 6$.

Por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

3a) $n(\text{S}) = 7$ y $n(\text{A}) = 2$, por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})} = \frac{2}{7}$.

3b) $n(\text{S}) = 7$ y $n(\text{B}) = 3$, por lo tanto, $\text{P(B)} = \frac{n(\text{B})}{n(\text{S})} = \frac{3}{7}$.



4. Considerando el espacio muestral S: extraer una carta de una baraja.

Y denotando A: extraer una carta roja.

$n(\text{S}) = 52$ (son 52 naipes en total) y $n(\text{A}) = 26$ (hay 26 cartas rojas en la baraja).

Por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

La probabilidad experimental se puede calcular de los datos de la clase anterior, para esta clase se ha pedido de las cartas rojas porque el de las cartas negras se hizo en la clase anterior, así se puede diferenciar entre probabilidad experimental y teórica. Al comparar los resultados se puede esperar que sean muy cercanos (excepto casos aislados).

Lección 1

1.3 Intersección y regla de adición para probabilidad

Problema inicial

Se tira un dado una vez y se definen los siguientes eventos:

A: Cae 1, 2 o 3　　　　　　　　B: Cae 1, 3 o 5

a) ¿Qué representa el evento "ocurre A o B"? Determina su probabilidad.
b) ¿Qué representa el evento "ocurre A y B"? Determina su probabilidad.

Solución

a) El evento ocurre A o B, significa que al lanzar el dado puede caer 1, 2, 3 o 5, es decir, A⋃B = {1, 2, 3, 5}. Entonces se tiene que los casos favorables son 4 y los casos posibles (al tirar un dado) son 6. Por lo tanto, P(A o B) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

b) El evento ocurre A y B, significa que al lanzar el dado puede caer 1 o 3 (para que se cumpla tanto A como B), es decir A⋂B = {1, 3}. Entonces se tiene que los casos favorables son 2 y los casos posibles son 6, por lo tanto, P(A y B) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Conclusión

Sean A y B dos eventos cualesquiera de un espacio muestral (S), al evento definido por "ocurre tanto A como B" se denota por A⋂B y se lee "evento A intersectado B".

Cuando la intersección de 2 eventos es vacía, es decir, A⋂B = ∅, se dice que **los eventos A y B son mutuamente excluyentes**.

Además, al evento definido por "ocurre el evento A o el evento B" se denota por A⋃B y se lee "evento A unido B". Puesto que se cumple que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, entonces:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Cuando los eventos A y B son mutuamente excluyentes se cumple que: P(A⋃B) = P(A) + P(B).

Ejemplo

¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja de 52 cartas, el resultado sea un "as" o 7?

Se puede denotar los eventos:　　A: La carta es un "as".　　　　B: La carta es un 7.

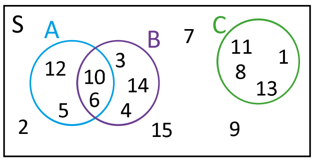
Se cumple que $n(A) = 4$ (los 4 "ases" de la baraja), $n(B) = 4$ (los 4 "sietes" de la baraja), y el evento de extraer un "as" o un 7 es A⋃B y además A⋂B = ∅, por lo tanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}.$$

Problemas

1. Determina la probabilidad de que al lanzar dos dados el resultado de sumar sus puntos sea 5 o 7.

2. Considerando los eventos A, B y C en el espacio muestral (S), analiza el diagrama de Venn y determina:
   a) P(A⋂B)　　b) P(A⋃B)　　c) P(A⋂C)　　d) P(A⋃C)
   e) ¿Cuáles eventos son mutuamente excluyentes y cuáles no?



3. Determina la probabilidad que al ordenar 3 niñas y 3 niños, dos niñas específicas estén siempre juntas y 2 niños específicos estén siempre juntos.

Indicador de logro:

1.3 Resuelve problemas de probabilidad aplicando la regla de adición para la unión de dos eventos excluyentes o no excluyentes.

Secuencia:

Luego de haber establecido la definición de la probabilidad teórica, ahora se trabajará con las propiedades de la cardinalidad de conjuntos y establecer la regla de adición para la probabilidad.

Propósito:

En la Conclusión se hace la deducción de la regla de adición utilizando la definición de la probabilidad teórica, y en el Ejemplo se presenta una manera concreta de utilizar este resultado.

Solución de problemas:

1. Considerando A: el resultado de la suma es 5 y B: el resultado de la suma es 7.

Luego A = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}, entonces, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Y $P(B) = \frac{1}{6}$, y puesto que no puede caer 5 y 7 a la misma vez, entonces A y B son mutuamente excluyentes, por lo tanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$.

2a) $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{15}$.

2b) $P(A) = \frac{4}{15}$, $P(B) = \frac{5}{15}$, entonces, $P(A \cup B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$.

2c) $P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{0}{15} = 0$.

2d) $P(C) = \frac{4}{15}$, entonces, $P(A \cup C) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$.

2e) A y C, B y C son mutuamente excluyentes; A y B no son mutuamente excluyentes.

3. Considerando el espacio muestral S: maneras de ordenar 6 niños en una fila.

Y denotando A: dos niñas y dos niños específicos están siempre juntos.

$n(A) = 4! \times 2! \times 2!$ y $n(S) = 6!$, por lo tanto, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 2! \times 2!}{6!} = \frac{2}{15}$.

1.4 Aplicación de la regla de adición de probabilidad*

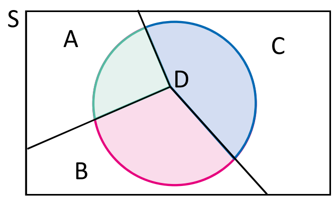
Problema inicial

En una empresa se producen 500 dispositivos, entre celulares, tablets, laptops; entre estos 500 dispositivos la probabilidad de que un producto sea un celular defectuoso es $\frac{1}{20}$, la probabilidad de que el producto sea una tablet defectuosa es $\frac{3}{125}$, y la probabilidad de que sea una laptop defectuosa es $\frac{1}{50}$. Determina la probabilidad de que al seleccionar uno de los 500 productos, este sea defectuoso.

Solución

Considerando los eventos A: es celular. B: es tablet. C: es laptop.

Sea D el evento: producto defectuoso; solo tiene tres opciones a saber, ser celular defectuoso, ser tablet defectuosa o ser laptop defectuosa.



Observando el diagrama de Venn a la derecha, se cumple que $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$.

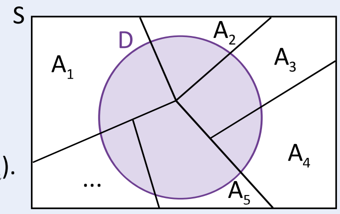
Además se sabe que $P(D \cap A) = \frac{1}{20}$, $P(D \cap B) = \frac{3}{125}$, $P(D \cap C) = \frac{1}{50}$.

Por lo tanto, la probabilidad de que al extraer uno de los 500 productos sea defectuoso es:

$$P(D) = P[(D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)] = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \frac{1}{20} + \frac{3}{125} + \frac{1}{50} = \frac{25 + 12 + 10}{500} = \frac{47}{500}.$$

Conclusión

Para calcular la probabilidad de un evento D que se divide en varios eventos particulares $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, mutuamente excluyentes y que la unión de todos los A_i conforman el evento D, se calcula de la siguiente manera:



$$P(D) = P[(D \cap A_1) \cup (D \cap A_2) \cup \ldots \cup (D \cap A_n)] = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + \ldots + P(D \cap A_n).$$

Ejemplo

Para una rifa se utilizan papeles de 4 colores diferentes, $\frac{1}{6}$ de todos los papeles están premiados. De todos los papeles $\frac{1}{18}$ están premiados y son verdes; $\frac{1}{36}$ están premiados y son rojos; y $\frac{1}{18}$ están premiados y son morados. Determina la probabilidad de que al extraer un papel sea de color amarillo y esté premiado.

Considerando los eventos D: El papel sale premiado. A_1: El papel es verde.

A_2: El papel es rojo. A_3: El papel es morado. A_4: El papel es amarillo.

Entonces, $P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) + P(D \cap A_4)$.

Luego, $P(D \cap A_4) = P(D) - P(D \cap A_1) - P(D \cap A_2) - P(D \cap A_3) = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} - \frac{1}{36} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36}$.

Problemas

1. Se encuesta a algunas personas acerca de su sexo y profesión, y a partir de ello se sabe que del total de personas, $\frac{1}{3}$ son mujeres médicas, $\frac{1}{6}$ son mujeres matemáticas, y $\frac{1}{16}$ son mujeres que laboran en otras actividades. Determina la probabilidad de que al seleccionar una persona encuestada, esta sea mujer.

2. En una clínica pediátrica se atiende la misma cantidad de niñas y de niños, y $\frac{1}{6}$ de todos los niños atendidos son niñas mayores de 12 meses. Determina la probabilidad de que sea atendida una niña de a lo sumo 12 meses.

Indicador de logro:

1.4 Encuentra la probabilidad de un evento que puede particionarse.

Secuencia:

En esta clase se analizará una aplicación de la regla de adición para probabilidad, aplicándola a intersecciones de eventos que particionan otro evento.

Propósito:

Esta aplicación será útil para abordar posteriormente el Teorema de probabilidad total y el teorema de Bayes, en donde solamente será necesario involucrar la probabilidad condicional a este resultado.

Solución de problemas:

1. Considerando los eventos, D: la persona encuestada es mujer. A_1: la persona encuestada es médica, A_2: la persona encuestada es matemática, A_3: la persona encuestada labora en otras actividades.

Luego, $P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} = \frac{16+8+3}{48} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$.

2. Considerando los eventos, D: Se atiende una niña, A_1: la niña atendida es mayor de 12 meses, A_2: la niña atendida tiene a lo sumo 12 meses.

Entonces, $P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2)$.

Luego, $P(D) = \frac{1}{2}$, puesto que se atiende la misma cantidad de niños que de niñas.

Por lo tanto, $P(D \cap A_2) = P(D) - P(D \cap A_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Este problema podría verse como una aplicación de la probabilidad del complemento (que se verá posteriormente), sin embargo, es un poco complejo interpretar que la probabilidad del evento completo (en este caso que sea niñas) no sea 1, es decir, que el evento no sea el espacio muestral, por ello se aborda en esta temática.

Lección 1

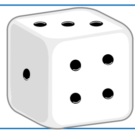
1.5 Axiomas de probabilidad (teórica)

Problema inicial

Considerando el experimento de tirar un dado, resuelve:

a) Determina la probabilidad de obtener un 3 en la tirada.

b) Determina la probabilidad de obtener 1, 2, 3, 4, 5 o 6 en la tirada.



Solución

Expresando el espacio muestral como S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Sean A y B los eventos correspondientes a cada literal.

a) Se cumple que A = {3}, entonces $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$.

b) Se cumple que B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, entonces $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$.

Axiomas de Kolmogórov

Para dos eventos A y B de un espacio muestral S se cumple:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$. Dado que $A \subseteq S$, entonces se cumple $0 \leq n(A) \leq n(S)$.

2) P(S) = 1. En esta situación los casos favorables son todos los casos posibles, o bien A = S.

3) Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Del axioma 2 y 3 se deduce que $P(S) = P(S \cup \varnothing) = P(S) + P(\varnothing)$, y entonces $P(\varnothing) = 0$.

Ejemplo

A partir del axioma 3 de Kolmogórov, demuestra que si A, B y C son eventos del espacio muestral S, y $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$, entonces $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

Para 3 conjuntos A, B y C se cumple que: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Puesto que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, entonces por el axioma 3:

$$P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) \quad \text{--------- (1)}$$

Luego como $A \cap B = \varnothing$, entonces por el axioma 3:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{--------- (2)}$$

Por lo tanto, sustituyendo (2) en (1), se cumple que

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A) + P(B) + P(C).$$

De la misma manera si cada pareja de los eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes, entonces se tiene que:

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Problemas

1. Determina la probabilidad que al formar un grupo de 5 personas entre 4 mujeres y 4 hombres si:
   a) está integrado por 2 hombres y 3 mujeres;
   b) está integrado por al menos un hombre o por al menos una mujer;
   c) está integrado por 3 o por 4 mujeres.

Utiliza las propiedades de los combinatorios para simplificar los cálculos.

2. Sean A, B, C y D eventos del espacio muestral S, y $A \cap B = A \cap C = B \cap C = B \cap D = C \cap D = D \cap A = \varnothing$, demuestra que $P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$.

Indicador de logro:

1.5 Comprueba y aplica los axiomas de Kolmogórov.

Secuencia:

Durante las clases anteriores se ha trabajado con conceptos sobre probabilidad frecuentista y clásica, a partir de los cuales se han podido deducir algunas propiedades de la probabilidad, en esta clase se establecen los axiomas de Kolmogórov como punto de partida para el desarrollo de la teoría de probabilidad.

Propósito:

El concepto de probabilidad se ha ido construyendo a partir de ideas intuitivas, los axiomas de Kolmogórov establecen de manera formal los resultados intuitivos que se han planteado en las clases anteriores (la misma función que representaron históricamente estos axiomas), es por ello que al lado de cada axioma se escribe una "justificación", aunque no son justificaciones (los axiomas no se demuestran), sino las ideas intuitivas que formalizan los axiomas de kolmogórov.

Solución de problemas:

1a) Sea A: el grupo está integrado por 2 hombres y 3 mujeres.

$n(\text{S}) = {}_8C_5$ y $n(\text{A}) = {}_4C_2 \times {}_4C_3$, por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})} = \frac{{}_4C_2 \times {}_4C_3}{{}_8C_5} = \frac{3}{7}$.

1b) En este caso el evento A: el grupo está integrado por al menos un hombre o al menos una mujer, coincide con el espacio muestral S, entonces P(A) = P(S) = 1 (por axioma 2).

1c) Sea A: el grupo está integrado por 3 mujeres y B: el grupo está integrado por 4 mujeres.

Puesto que $A \cap B = \varnothing$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_4C_3 \times {}_4C_2}{{}_8C_5} + \frac{{}_4C_4 \times {}_4C_1}{{}_8C_5} = \frac{3}{7} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2}$.

2. Puesto que $(A \cup B) \cap (C \cup D) = [(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap D] = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) = \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, entonces por el axioma 3:

$$P[(A \cup B) \cup (C \cup D)] = P(A \cup B) + P(C \cup D) \quad \text{-------} \ (1)$$

Luego como $A \cap B = \varnothing$ y $C \cap D = \varnothing$ entonces por el axioma 3:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ y } P(C \cup D) = P(C) + P(D) \quad \text{-------} \ (2)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2) en (1), se cumple que

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P[(A \cup B) \cup (C \cup D)] = P(A) + P(B) + P(C) + P(D).$$

Este problema también se puede resolver separando un evento y los otros 3, para luego aplicar lo demostrado en el Ejemplo de la clase.

Lección 1

1.6 Probabilidad del complemento*

Problema inicial

Calcula la probabilidad que al tirar un dado 3 veces caiga 1 al menos una vez.

Solución

Considerando el evento A: Cae 1 al menos una vez en 3 tiradas, entonces se puede definir el evento:

A^c = No cae 1 en las 3 tiradas.

Además, para el espacio muestral S, se cumple que $S = A \cup A^c$ y $A \cap A^c = \varnothing$ entonces:

$P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$, pero $P(S) = 1$ (por los axiomas de Kolmogórov), entonces $P(A) + P(A^c) = 1$.

Por lo tanto $P(A) = 1 - P(A^c)$.

Luego, $n(S) = 6^3$ (considerando que cada tirada tiene 6 opciones) y $n(A^c) = 5^3$ (hay 5 opciones, 2, 3, 4, 5 y 6) por lo tanto, $P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(S)} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$.

Finalmente $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

Conclusión

Sea A un evento dentro de un espacio muestral S. Al evento A^c se le conoce como **complemento del evento A**, y a $P(A^c)$ se le conoce como **probabilidad del complemento del evento A**. Se cumple que

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Ejemplo

Determina la probabilidad que al ordenar 3 niñas y 3 niños no queden las 3 niñas todas juntas.

Considerando el evento A: Las 3 niñas no quedan todas juntas.

Entonces A^c: Las 3 niñas quedan todas juntas.

Luego $n(A^c) = 4!3!$ y $n(S) = 6!$

Luego $P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(S)} = \frac{4!3!}{6!} = \frac{1}{5}$, y por lo tanto, $P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

> También puedes encontrar los casos favorables contando por el complemento y calcular directamente lo que se está pidiendo.

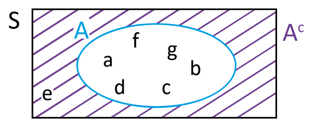
Problemas

1. La probabilidad de que una tuerca producida por una máquina sea defectuosa es $\frac{1}{40}$, determina la probabilidad que la tuerca sea no defectuosa.

2. Determina la probabilidad de que al tirar una moneda 10 veces se obtenga al menos una cara.

3. En un juego de dados se lanzan 6 dados, y un jugador gana si en la tirada se obtiene al menos un "1" en alguno de los dados. Determina la probabilidad de ganar en este juego de dados.

4. Considerando el evento A en el espacio muestral (S), analiza el diagrama de Venn y determina:
   a) $P(A^c)$ b) $1 - P(A^c)$ c) $P(A \cap A^c)$ d) $P(A \cup A^c)$



Unidad 8

Indicador de logro:

1.6 Determina la probabilidad de un evento calculando la probabilidad del evento complementario.

Secuencia:

Posteriormente de haber establecido los axiomas de Kolmogórov, se estudiará su aplicación en la probabilidad del complemento, la cual es muy útil en las probabilidades, y cuya base fue abarcada también en la unidad de métodos de conteo.

Propósito:

La intención es colocar problemas que se hayan resuelto en la unidad de métodos de conteo, para poder enfatizar únicamente su aplicación en la probabilidad.

Solución de problemas:

1. Sean A: la tuerca no es defectuosa y B: la tuerca es defectuosa.

Entonces se cumple que $P(A) = P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{40} = \frac{39}{40}$.

2. Sean A: obtener al menos una cara en 10 lanzamientos.

Entonces A^c: no obtener cara en los 10 lanzamientos (equivale a que caiga 10 veces corona).

Por lo tanto, $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1\,023}{1\,024}$.

3. Sea A: obtener al menos un "1" en los 6 dados.

Entonces A^c: no obtener algún "1" en los 6 dados.

Por lo tanto, $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5^6}{6^6} = \frac{31\,031}{46\,656} \approx 0.67$.

En este problema se hace la conversión a decimal, para hacer una mejor interpretación de la respuesta, a partir de lo cual se puede establecer que 0.67 es una probabilidad bastante alta para ganar el juego.

4a) Contando directamente del diagrama de Venn $P(A^c) = \frac{1}{7}$.

4b) $1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

4c) $P(A \cap A^c) = P(\varnothing) = 0$

4d) $P(A \cup A^c) = P(S) = 1$

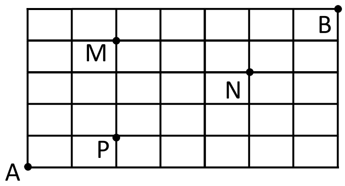
Solamente el literal a) necesita contarse directamente del diagrama de Venn.

1.7 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas sobre probabilidad.

1. Determina el espacio muestral del experimento de lanzar 2 dados al mismo tiempo. Luego expresa como subconjunto el evento "la suma de los puntos es 7", y el evento "la suma de los puntos es 5".

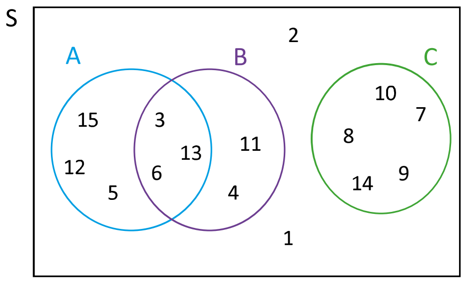
2. Carmen se transporta por la ciudad de Santa Ana, se encuentra en el punto A y desea llegar al punto B como lo muestra la figura. Determina la probabilidad de que tomando los caminos más cortos se cumpla lo siguiente:



   a) Carmen pasa por el punto M o por el punto N.
   b) Carmen pasa por el punto P y por el punto N.

3. Considerando los eventos A, B y C en el espacio muestral (S), analiza el diagrama de Venn y determina:

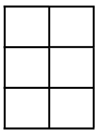
   a) El espacio muestral S, el evento A, el B y el C.
   b) P(A), P(B) y P(C).
   c) $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ y $P(A \cap C)$.
   d) $P(A \cup B)$, $P(B \cup C)$ y $P(A \cup C)$.
   e) $P(A^c)$, $P(B^c)$ y $P(C^c)$.
   f) $1 - P(A^c)$, $1 - P(B^c)$ y $1 - P(C^c)$.



4. Se eligen el presidente y vicepresidente de una comisión de entre 5 hombres y 5 mujeres. Determina la probabilidad de que el presidente sea mujer y el vicepresidente sea hombre.

5. Considerando las piezas de Braile formadas por un rectángulo con 6 celdas en el que cada celda puede estar vacía o tener un punto en relieve. Al seleccionar una pieza de Braile, determina:

   a) La probabilidad de que la pieza tenga exactamente 3 puntos y 3 vacíos.
   b) La probabilidad de que la pieza tenga un punto o un vacío.
   c) La probabilidad de que la pieza tenga 8 puntos.



6. En una tienda de electrodomésticos se determina que al llegar un cliente, la probabilidad de que compre un televisor es $\frac{4}{15}$, que compre una refrigeradora es $\frac{7}{30}$, y que compre una lavadora es $\frac{2}{15}$. Determina la probabilidad de que al llegar un cliente se venda alguno de estos 3 productos. Considera que cada cliente compra a lo sumo un producto.

7. En un juego de azar se descubre que un dado está cargado, pues al lanzarlo 20 veces, en 17 ocasiones cayó 6. Si el juego consiste en lanzar un dado una vez y que no caiga 6, determina la probabilidad de ganar el juego.

8. Se encargarán 12 pupusas para cenar, y se puede escoger entre pupusa de ayote, revueltas y de queso. Determina la probabilidad de que al encargarlas, al menos una pupusa sea revuelta, considerando que cada tipo de pupusa tiene la misma probabilidad de ser seleccionada.

Indicador de logro:

1.7 Resuelve problemas correspondientes a los axiomas de probabilidad.

Solución de problemas:

1. S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}.

A = {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)} y B = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}.

2a) Sea M: ir del punto A al B pasando por M, y N: ir del punto A al B pasando por N. Entonces, puesto que no se puede pasar tanto en el punto M como en el punto N, se tiene que $M \cap N = \varnothing$, por lo tanto, $P(M \cup N) = P(M) + P(N) = \frac{{}_6C_2 \times {}_6C_5}{{}_{12}C_7} + \frac{{}_8C_5 \times {}_4C_2}{{}_{12}C_7} = \frac{5}{44} + \frac{14}{33} = \frac{71}{132}$.

2b) Sea A: ir del punto A al B pasando por P y por N.
$P(A) = \frac{{}_3C_2 \times {}_5C_3 \times {}_4C_2}{{}_{12}C_7} = \frac{5}{22}$.

3a) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}; A = {3, 5, 6, 12, 13, 15}; B = {3, 4, 6, 11, 13}; C = {7, 8, 9, 10, 14}.

3b) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$; $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

3c) $P(A \cap B) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$; $P(B \cap C) = P(\varnothing) = 0$; $P(A \cap C) = P(\varnothing) = 0$.

3d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$; $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{5}{15} + \frac{5}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$;
$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$.

3e) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$; $P(B^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $P(C^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

3f) $1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$; $1 - P(B^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; $1 - P(C^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

4. Sea A: el presidente es mujer y el vicepresidente es hombre.

Entonces $P(A) = \frac{5 \times 5}{{}_{10}P_2} = \frac{5}{18}$.

5a) Sea A: la pieza tiene exactamente 3 puntos y 3 vacíos; entonces $n(A) = {}_6C_3$ (cantidad de maneras de escoger en donde irán los 3 puntos) y $n(S) = 2^6$, por lo tanto, $P(A) = \frac{{}_6C_3}{2^6} = \frac{5}{16}$.

5b) Sea B: la pieza tiene exactamente un punto; y C: la pieza tiene exactamente un vacío, entonces $n(B) = {}_6C_1$ y $n(C) = {}_6C_5$, y puesto que $B \cap C = \varnothing$, se tendrá que $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{{}_6C_1}{2^6} + \frac{{}_6C_5}{2^6} = \frac{3}{16}$.

5c) Sea D: la pieza tiene 8 puntos; entonces $D = \varnothing$, por lo tanto, P(D) = 0.

6. Considerando los eventos, D: vender alguno de los productos. A_1: vender un televisor.
A_2: vender una refrigeradora. A_3: vender una lavadora.
Luego, $P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) = \frac{4}{15} + \frac{7}{30} + \frac{2}{15} = \frac{8 + 7 + 4}{30} = \frac{19}{30}$.

7. Sea A: ganar el juego (no cae 6), entonces A^c: perder el juego (cae 6), por lo tanto,
$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$.

8. Sea A: Al menos una pupusa es revuelta, entonces $n(A) = {}_{(11+2)}C_2$ (utilizando separadores), por lo tanto, $P(A) = \frac{{}_{13}C_2}{{}_{14}C_2} = \frac{6}{7}$.

2.1 Probabilidad condicional

Problema inicial

Los resultados de una encuesta sobre profesiones se muestran en la tabla de la derecha. Calcula la probabilidad de que al elegir una persona sea una mujer matemática dado que ya se ha elegido una mujer.

Ocupación	Mujeres	Hombres	Total
Médico	40	31	71
Matemático	22	24	46
Oficios en el hogar	15	15	30
Total	77	70	147

Solución

Sea A: es matemático y B: es mujer.

Dado que ya se sabe que al elegir la persona esta fue mujer (ya no cabe la posibilidad de que sea hombre), entonces los casos posibles son 77.

Ocupación	Mujeres	Hombres	Total
Médico	40	31	71
Matemático	22	24	46
Oficios en el hogar	15	15	30
Total	77	70	147

Y los casos favorables están en la celda donde coincide que sea mujer como que sea matemático, es decir, son 22 casos favorables.

Por lo tanto, P(A si ya sucedió B) = $\frac{22}{77} = \frac{2}{7}$.

Definición

Dados dos evento A y B, se puede estar interesado en encontrar la probabilidad de que suceda el evento A suponiendo que ya sucedió el evento B. Esto se conoce como **probabilidad condicional**, se denota P(A/B), y se lee: "La probabilidad de A dado B". Para calcularla se puede considerar que los casos posibles son las formas en que puede suceder B, es decir n(B), y los casos favorables como las formas en que puede suceder A∩B, es decir n(A∩B). Entonces se cumple que

$$P(A/B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)}.$$

Considerando el total de casos que tiene el espacio muestral como n(S), se tiene que la igualdad anterior es equivalente a

$$P(A/B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Ejemplo

Determina la probabilidad de que al lanzar un dado el resultado es mayor que 4 dado que es impar.

Considerando, A: es mayor que 4 y B: es impar.

$P(A\cap B) = \frac{1}{6}$ (solo 5 cumple), $P(B) = \frac{3}{6}$ (cumplen el 1, 3 y 5), por lo tanto $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{\cancel{6}} \div \frac{3}{\cancel{6}} = \frac{1}{3}$.

Problemas

1. Considerando la tabla del Problema inicial, determina:
   a) La probabilidad de escoger un hombre dado que se ocupa de los oficios del hogar.
   b) La probabilidad de escoger un matemático dado que es hombre.
   c) La probabilidad de escoger una mujer dado que es matemático.

2. Determina la probabilidad de que al lanzar un dado el resultado es impar dado que es mayor que 3.

3. En una empresa de carros hay 3 máquinas que ensamblan la misma cantidad de carros, y al escoger un carro al azar, la probabilidad de que sea defectuoso y que sea de la máquina 1 es $\frac{1}{120}$. Determina la probabilidad de que un carro producido por la máquina 1 sea defectuoso.

Indicador de logro:

2.1 Aplica la probabilidad condicional para resolver situaciones específicas.

Secuencia:

Luego de haber trabajado con la parte de axiomas de Kolmogórov para probabilidad, se introducirá la definición de probabilidad condicional a partir de tablas de doble entrada, y asociando estas a la teoría de conjuntos.

Propósito:

Las tablas de doble entrada son un recurso gráfico de las intersecciones entre eventos, y se puede dar sentido a la idea de cambiar el conjunto universal según la fila o columna, en esta clase será muy útil trabajar la probabilidad como cardinalidad de conjuntos.

Solución de problemas:

1a) Considerando A: es hombre, y B: se ocupa de oficios domésticos, entonces:

$$P(A\cap B) = \frac{15}{147},\ P(B) = \frac{30}{147}, \text{ por lo tanto } P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{15}{147} \div \frac{30}{147} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$$

1b) Considerando A: es matemático, y B: es hombre, entonces:

$$P(A\cap B) = \frac{24}{147},\ P(B) = \frac{70}{147}, \text{ por lo tanto } P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{24}{147} \div \frac{70}{147} = \frac{24}{70} = \frac{12}{35}.$$

1c) Considerando A: es mujer, y B: es matemático, entonces:

$$P(A\cap B) = \frac{22}{147},\ P(B) = \frac{46}{147}, \text{ por lo tanto } P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{22}{147} \div \frac{46}{147} = \frac{22}{46} = \frac{11}{23}.$$

2. Sea A: el resultado es impar; y B: el resultado es mayor que 3, entonces $n(A\cap B) = 1$ (solamente 5 es mayor que 3 y además impar), y $n(B) = 3$ (4, 5 y 6 son las posibilidades). Luego se tiene que

$$P(A\cap B) = \frac{1}{6},\ P(B) = \frac{3}{6}, \text{ por lo tanto } P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{1}{3}.$$

3. Sea A: el auto es defectuoso; y B: el auto es de la máquina uno, entonces:

$$P(A\cap B) = \frac{1}{120},\ P(B) = \frac{1}{3}, \text{ por lo tanto } P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{120} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{40}.$$

2.2 Variantes de la probabilidad condicional

Problema inicial

En una bolsa hay 3 bolitas azules y 5 bolitas blancas, si se extraen dos bolitas, una después de la otra sin reposición (sin regresar la primera bolita que se saca a la bolsa), determina la probabilidad de que las dos bolitas sean de color azul.

Solución

Sea A: la primera bolita es azul y B: la segunda bolita es azul.

Se está interesado en que tanto la primera como la segunda bolita sean azules, es decir, $P(A \cap B)$.

Se tiene que $P(A) = \frac{3}{8}$, ahora quedan 7 bolitas, de las cuales 2 son azules. Por lo tanto $P(B/A) = \frac{2}{7}$.

De la definición de probabilidad condicional se sabe que $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, de lo cual se puede deducir que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de extraer dos bolitas azules es $\frac{3}{28}$.

Conclusión

Es posible calcular la probabilidad de una intersección a partir del resultado de probabilidad condicional que se estudió en la clase 2.1, para ello se cumple que: $P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$.

Este resultado se conoce como **Teorema del producto para probabilidad.**

Problemas

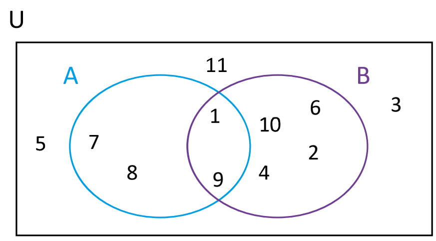
1. En una bolsa hay 2 bolitas azules y 4 bolitas blancas, si se extraen dos bolitas, una después de la otra sin reposición, determina la probabilidad que la primera bolita sea azul y la segunda sea blanca.

2. Se tiene una baraja con cartas de 4 colores diferentes (uno de esos colores es verde), cada color tiene 5 cartas numeradas del 1 al 5. Si se extraen 2 cartas, una tras otra sin reposición, determina la probabilidad de los siguientes eventos:

   a) Ambas sean 1.
   b) La primera sea 2 y la segunda sea 3.
   c) La primera sea 3 y la segunda sea 4 de color verde.
   d) Ambas sean del mismo color.
   e) La primera sea 2 y la segunda 1 del mismo color.

3. Utilizando el diagrama de Venn de la derecha calcula:

   a) P(B) y P(A).
   b) P(B/A) y P(A/B).
   c) Calcula $P(A \cap B)$ de dos formas diferentes a partir de los literales anteriores.



Indicador de logro:

2.2 Determina la probabilidad de la intersección de dos eventos aplicando el teorema del producto para la probabilidad.

Secuencia:

A partir de la definición de la probabilidad condicional se puede deducir directamente el Teorema del producto para probabilidad.

Posibles dificultades:

Lograr diferenciar entre la probabilidad de la intersección de dos eventos y la probabilidad condicional de que un evento suceda dado que sucede otro puede causar confusión en los estudiantes.

Solución de problemas:

1. Considerando A: la primera bolita es azul, y B: la segunda bolita es blanca, entonces:

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{4}{5}$, por lo tanto, $P(A\cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$.

2a) Sea A: la primera es 1, y B: la segunda es 1, entonces:

$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{3}{19}$, por lo tanto, $P(A\cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{19} = \frac{3}{95}$.

2b) Sea A: la primera es 2, y B: la segunda es 3, entonces:

$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{4}{19}$, por lo tanto, $P(A\cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{4}{19} = \frac{4}{95}$.

2c) Sea A: la primera es 3, y B: la segunda es 4 verde, entonces:

$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{1}{19}$, por lo tanto, $P(A\cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{95}$.

2d) Considerando primero un color, sea A: la primera del color verde, y B: la segunda es del color verde, entonces: $P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, $P(B/A) = \frac{4}{19}$, por lo tanto, $P(A\cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$.

Y se puede proceder de manera análoga para los otros 3 colores, por lo tanto, la probabilidad que ambas bolitas sean del mismo color es $\frac{1}{19} \times 4 = \frac{4}{19}$.

2e) Sea A: la primera es 2, y B: la segunda es 1 del mismo color que la primera, entonces:

$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{1}{19}$, por lo tanto, $P(A\cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{95}$.

3a) $P(B) = \frac{6}{11}$; $P(A) = \frac{4}{11}$.

3b) En A hay 4 elementos, y estando en el conjunto A, hay solamente hay 2 formas en que puede ocurrir B, por lo tanto, $P(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

De manera análoga $P(A/B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

3c) $P(A\cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{11}$, $P(A\cap B) = P(B)P(A/B) = \frac{6}{11} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{11}$.

2.3 Aplicación de la probabilidad condicional

Problema inicial

Se extraen dos cartas una tras otra de una baraja, determina la probabilidad de que la segunda carta sea de diamantes dado que la primera fue de diamantes, si:

a) La primera carta no se devuelve a la baraja para la segunda escogitación.
b) La primera carta se devuelve a la baraja para la segunda escogitación.

Solución

Considerando A: la segunda carta es de diamantes y B: la primera carta es de diamantes.

a) Para que la primera carta sea de diamantes hay 13 cartas disponibles, y luego dado que no se devuelve, para que la segunda carta sea de diamantes solamente habría 12 cartas disponibles. Y los casos posibles son 52 y luego 51 para la segunda carta, por lo tanto, $P(A \cap B) = \frac{13 \times 12}{52 \times 51} = \frac{1}{17}$.

Además, para que la primera carta sea de diamantes hay 13 posibilidades, y para la segunda carta habrían 51 cartas disponibles, por lo tanto, $P(B) = \frac{13 \times 51}{52 \times 51} = \frac{1}{4}$.

Por lo tanto, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{17} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{17}$.

b) La diferencia con el caso anterior es que para que la segunda sea de diamantes se tendrán 13 cartas disponibles de nuevo, y en los casos posibles 52 y 52, por lo tanto, $P(A \cap B) = \frac{13 \times 13}{52 \times 52} = \frac{1}{16}$.

Y análogamente $P(B) = \frac{13 \times 52}{52 \times 52} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{16} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Conclusión

La probabilidad condicional a menudo se utiliza para agregar condiciones dependiendo la conveniencia o la situación determinada. Por ejemplo para el Problema inicial podría ser de utilidad para estudiar las estrategias de juego, en otras situaciones podría utilizarse para pronosticar el clima, situaciones de epidemias y características de las personas que afecta, entre otros.

Problemas

1. En un juego de cartas la primera carta ha sido de tréboles, para ganar es necesario que la segunda carta también sea de tréboles. Analiza en qué situación se tienen mayores probabilidades de ganar, si la segunda carta es extraída de la misma baraja que la primera (sin reponer la primera carta), o si la segunda carta es extraída de una baraja íntegra (de la cual no se ha extraído ninguna carta aún).

2. En un estudio se quiere determinar si la diabetes es una consecuencia del sobrepeso,y se investigó que la probabilidad de que una persona tenga sobrepeso es $\frac{1}{2}$, y además cuando una persona tiene sobrepeso la probabilidad de que tenga también diabetes es $\frac{2}{3}$. Determina la probabilidad de que una persona tenga tanto sobrepeso como diabetes.

3. En una carpintería se han elaborado 25 pupitres de los cuáles 4 están defectuosos, 5 tienen pequeños problemas y los demás están en óptimas condiciones. Determina la probabilidad de que al escoger 2 pupitres uno tras otro, el primero esté defectuoso y el segundo tenga pequeños problemas.

4. En un juego se tienen 3 puertas, y tras una de ellas hay un premio de un carro; el juego consiste en que el concursante elige una de las 3 puertas, luego el presentador, quien conoce qué hay detrás de cada puerta, abre una puerta que sabe que no tiene premio, y da la opción al concursante que cambie de puerta. Utiliza la probabilidad condicional para determinar con cuál opción (cambiando o quedándose con la puerta) tiene mayores probabilidades de ganar.

Unidad 8

215

Indicador de logro:

2.3 Combina los principios básicos de conteo con los conceptos de probabilidad condicional para resolver problemas.

Secuencia:

En esta clase se resolverán algunos problemas sobre probabilidad condicional, en los cuales el razonamiento es un poco más complejo, debido a que integran los principios básicos de conteo y lo visto sobre probabilidad condicional.

Propósito:

Los Problemas que se resolverán son más apegados a la realidad y la toma de decisiones, por tal razón consideran otras variables cuyo análisis necesita la utilización de otros contenidos vistos en la Unidad 7.

Solución de problemas:

1. Analizando cada caso, en el escenario en donde se extrae de la misma baraja, se tiene que

sea A: la carta es de tréboles, entonces $P(A) = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$.

Y para el escenario en que se extrae la carta de otra baraja se tiene que

sea B: la carta es de tréboles, entonces $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Luego comparando ambas probabilidades $P(A) = \frac{4}{17} = \frac{16}{68}$ y $P(B) = \frac{1}{4} = \frac{17}{68}$, por lo tanto, es más probable conseguirlo en el segundo escenario.

2. Sean A: la persona tiene diabetes; y B: la persona tiene sobrepeso, entonces:

$P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A/B) = \frac{2}{3}$, por lo tanto, $P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

3. Sean A: el segundo tiene pequeños problemas; y B: el primero está defectuoso, entonces:

$P(B) = \frac{4}{25}$, $P(A/B) = \frac{5}{24}$, por lo tanto, $P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = \frac{4}{25} \times \frac{5}{24} = \frac{1}{30}$.

4. Al iniciar el juego, cada puerta tendría la misma probabilidad de tener el carro, es decir, al elegir la puerta tiene $\frac{1}{3}$ de probabilidad de ganar y $\frac{2}{3}$ de perder.

Luego si el presentador abre una puerta que no contiene el premio, y ofrece al concursante cambiar, puesto que la probabilidad que tenía de perder equivale a que el carro está en cualquiera de las otras 2 puertas, y dado que ya sabe en cuál de las dos puertas no está, al cambiar de puerta la probabilidad de ganar es igual a la de que no haya tomado la puerta del carro, que es equivalente a $\frac{2}{3}$, por el contrario, si se queda con la misma puerta, el concursante mantendrá la probabilidad de $\frac{1}{3}$ de inicio.

Primera elección	Cambia	No cambia
Cabra 1	Carro	Cabra 1
Cabra 2	Carro	Cabra 2
Carro	Cabra 1 o 2	Carro

Opción	Carro	Cabra	Total
Cambia	2	1	3
No cambia	1	2	3
Total	3	3	6

Usando la probabilidad condicional, sean A: gana el carro, B: cambia de puerta, y C: no cambia de puerta, entonces:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{1}{3}.$$

2.4 Problemas con probabilidad condicional

Problema inicial

En una carpintería se diseñan pupitres para personas zurdas, y en ella trabajan Marta, María y Carlos. Las probabilidades que un pupitre elaborado por Marta, María y Carlos tenga defectos son 0.1, 0.12 y 0.11, respectivamente. Si todos producen la misma cantidad de pupitres, determina:

a) La probabilidad de elegir un pupitre defectuoso.

b) La probabilidad de que al elegir un pupitre defectuoso este lo haya elaborado Marta.

Solución

a) Sean los eventos A: es de Marta, B: es de María, C: es de Carlos, D: es defectuoso.

Entonces se cumple que $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$.

Además se sabe que: $P(D/A) = 0.1$ (La probabilidad de que sea defectuoso, dado que es de Marta).
$P(D/B) = 0.12$ (La probabilidad de que sea defectuoso, dado que es de María).
$P(D/C) = 0.11$ (La probabilidad de que sea defectuoso, dado que es de Carlos).

Puesto que todos producen la misma cantidad de pupitres, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.

Además se sabe que $P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$, entonces $P(A \cap D) = P(A) \times P(D/A) = \frac{1}{3}(0.1)$.

Análogamente se cumple que $P(B \cap D) = \frac{1}{3}(0.12)$ y $P(C \cap D) = \frac{1}{3}(0.11)$.

Por lo tanto, $P(D) = \frac{1}{3}(0.1) + \frac{1}{3}(0.12) + \frac{1}{3}(0.11) = \frac{1}{3}(0.33) = 0.11$.

b) Ahora bastaría calcular $P(A/D)$ (la probabilidad de que un pupitre sea de Marta dado que es defectuoso).

Dado que $P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$, y del literal a), $P(A \cap D) = \frac{1}{3}(0.1)$ y $P(D) = 0.11$.

Por lo tanto, $P(A/B) = \frac{\frac{1}{3}(0.1)}{(0.11)} = \frac{10}{33}$.

Observa que una probabilidad se puede escribir como fracción o como decimal, y el Problema inicial también se puede trabajar convirtiendo los decimales a fracciones.

Conclusión

Para calcular la probabilidad de que un pupitre sea defectuoso fue necesario aplicar la regla de adición entre las intersecciones de eventos excluyentes (si un pupitre lo elabora Marta no pudo haber sido elaborado por Carlos o María), este resultado se conoce como **teorema de probabilidad total**.

Luego, se utilizó el resultado para calcular la probabilidad de que un pupitre sea de una persona en particular dado que ya se sabe que es defectuoso, este resultado se conoce como **teorema de Bayes**.

Problemas

1. En una fábrica hay 2 máquinas que ensamblan la misma cantidad de carros cada una; la probabilidad de que un carro ensamblado por la máquina 1 tenga problemas es 0.05 y la probabilidad de que un carro producido por la máquina 2 tenga problemas es 0.07, determina:
   a) La probabilidad de que un carro tenga problemas.
   b) La probabilidad de que un carro haya sido ensamblado por la máquina 1 dado que tiene problemas.

2. Una imprenta posee 3 impresoras, la impresora 1 produce el 20%, la impresora 2 el 40% y la 3 produce el resto. La probabilidad de que la impresora 1 imprima defectuosamente una página es $\frac{1}{100}$, que lo haga la impresora 2 es $\frac{1}{50}$ y que sea la impresora 3 es $\frac{1}{40}$. Determina la probabilidad de que al tener una página defectuosa esta haya sido impresa por la máquina 3.

Indicador de logro:

2.4 Resuelve problemas de aplicación del teorema de probabilidad total y teorema de Bayes.

Secuencia:

Finalmente uno de los resultados más importantes en donde se aplica la probabilidad condicional es el teorema de Bayes, cuyo resultado se establece a partir del teorema de probabilidad total.

Propósito:

En esta clase se pretende utilizar los resultados sobre el teorema de probabilidad total y teorema de Bayes, sin enunciar ni demostrar formalmente dichos resultados, únicamente utilizando lo visto en la lección anterior y la probabilidad condicional.

Solución de problemas:

1a) Sean los eventos A: es de la máquina 1, B: es de la máquina 2, C: tiene problemas.

Entonces se cumple que $P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$.

Además se sabe que: $P(C/A) = 0.05$ (El carro tiene problemas, dado que es de la máquina 1).

$P(C/B) = 0.07$ (El carro tiene problemas, dado que es de la máquina 2).

Puesto que todos producen la misma cantidad de carros, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

Además se sabe que $P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)}$, entonces $P(A \cap C) = P(A) \times P(C/A) = \frac{1}{2}(0.05)$.

Análogamente se cumple que $P(B \cap C) = \frac{1}{2}(0.07)$.

Por lo tanto, $P(C) = \frac{1}{2}(0.05) + \frac{1}{2}(0.07) = 0.06$.

1b) Se requiere encontrar $P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C/A)}{P(C)} = \frac{0.05}{2(0.06)} = \frac{5}{12}$.

2. Sean A: es de la impresora 1, B: es de la impresora 2, C: es de la impresora 3, D: es defectuosa.

Entonces se cumple que $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$.

Además se sabe que: $P(D/A) = \frac{1}{100}$,

$P(D/B) = \frac{1}{50}$,

$P(D/C) = \frac{1}{40}$.

Además $P(A) = \frac{20}{100}$, $P(B) = \frac{40}{100}$, $P(C) = \frac{40}{100}$.

Entones $P(A \cap D) = \frac{20}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{500}$, $P(B \cap D) = \frac{40}{100} \times \frac{1}{50} = \frac{1}{125}$, y $P(C \cap D) = \frac{40}{100} \times \frac{1}{40} = \frac{1}{100}$.

Luego, $P(D) = \frac{1}{500} + \frac{1}{125} + \frac{1}{100} = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$.

Por lo tanto, $P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{1}{100} \div \frac{1}{50} = \frac{1}{2}$.

Lección 2

2.5 Experimentos independientes*

Problema inicial

Se definen dos experimentos y dos eventos de la siguiente manera:

T_1: Lanzar una moneda — A_1: Cae cara

T_2: Lanzar un dado — A_2: Cae uno o dos

a) Encuentra la probabilidad de que en T_2 ocurra A_2, cuando en T_1 ocurre A_1.
b) Encuentra la probabilidad de que en T_1 ocurra A_1, cuando en T_2 ocurre A_2.
c) Encuentra la probabilidad de que en T_1 ocurra A_1 y en T_2 ocurre A_2.

Solución

Sean S_1 y S_2 los espacios muestrales de T_1 y T_2 respectivamente.

a) Puesto que el experimento T_1 no influye en el experimento T_2, la probabilidad de A_2 es: $\frac{n(A_2)}{n(S_2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b) Puesto que el experimento T_2 no influye en el experimento T_1, la probabilidad de A_1 es: $\frac{n(A_1)}{n(S_1)} = \frac{1}{2}$.

c) Considerando T_1 y T_2 como un solo experimento T con espacio muestral S, y denotando por C el evento ocurre A_1 en T_1 y A_2 en T_2, se tiene que $n(S) = n(S_1) \times n(S_2)$ y $n(C) = n(A_1) \times n(A_2)$, por lo tanto:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{n(A_1) \times n(A_2)}{n(S_1) \times n(S_2)} = \frac{n(A_1)}{n(S_1)} \times \frac{n(A_2)}{n(S_2)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

El resultado del literal c) se puede expresar como $P(C) = P(A_1) \times P(A_2)$.

Definición

Tomando dos experimentos T_1 y T_2 de modo que A_1 es un evento de T_1 y A_2 es un evento de T_2, se cumple que si la ocurrencia del experimento T_1 no influye en el experimento T_2 (y viceversa), se dice que T_1 y T_2 son **experimentos independientes**.

Se cumple que la probabilidad que ocurra tanto el evento A_1 en T_1 como el evento A_2 en T_2 es:

$$P(A_1) \times P(A_2).$$

Ejemplo

Determina la probabilidad de que al lanzar un dado 2 veces se obtenga “1” en la primera tirada y “2” en la segunda. Sea A: Cae “1” en la primera tirada, y B: Cae “2” en la segunda tirada.

Como A y B son eventos de dos experimentos independientes (lanzar el dado la primera vez es un experimento y lanzarlo la segunda vez es otro), entonces la probabilidad es:

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Problemas

1. Determina la probabilidad de que al extraer dos cartas de una baraja la primera sea de corazón y la segunda de trébol. Considera que después de la primera extracción se devuelve la carta.

2. Determina la probabilidad de que al lanzar una moneda 3 veces, se obtenga solamente una cara y sea en el último lanzamiento.

3. Determina la probabilidad de que al extraer 2 cartas una tras otra de una baraja (con reemplazo), se cumpla que la primera es una carta roja, y la segunda es “J” o de diamantes.

4. Determina la probabilidad de que al responder 5 preguntas de verdadero y falso al azar se obtengan 4 respuestas correctas.

Unidad 8

217

Indicador de logro:

2.5 Calcula la probabilidad de que ocurran al menos dos experimentos independientes.

Secuencia:

Durante esta clase se analizará la definición de experimentos independientes, lo cual servirá para trabajar con algunas ideas sobre probabilidad binomial, multinomial, binomial negativa, etc.

Posibles dificultades:

Puede que sea complicado diferenciar entre eventos independientes y experimentos independientes, para que quede claro, pueden mencionarse ejemplos como lanzar un dado dos veces y lanzar dos dados a la misma vez, etc.

Solución de problemas:

1. Puesto que la extracción de la primera carta será independiente de la extracción de la segunda, porque después de la primera extracción se devuelve la carta, entonces:

Sean A: la carta es de corazón; y B: la carta es de trébol, luego P(A) = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, y P(B) = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Por lo tanto, la probabilidad buscada es P(A) × P(B) = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

2. Cada lanzamiento de la moneda es independiente de los demás, entonces, considerando A: cae cara; y B: cae corona, se tiene que P(A) = $\frac{1}{2}$ y P(B) = $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la probabilidad buscada es P(B) × P(B) × P(A) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

3. Puesto que las tres extracciones son independientes, porque después de una extracción se devuelve la carta, entonces:

Sean A: la carta es roja; y B: la carta es “J” o de diamantes, luego P(A) = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$, y P(B) = $\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

Por lo tanto, la probabilidad buscada es P(A) × P(B) = $\frac{1}{2} \times \frac{4}{13} = \frac{2}{13}$.

4. Las preguntas son independientes una de las demás, y considerando A: responde correctamente y B: responde incorrectamente, entonces se tiene que P(A) = $\frac{1}{2}$ y P(B) = $\frac{1}{2}$.

Además hay que considerar que obtener 4 respuestas correctas es equivalente a obtener solamente una respuesta incorrecta, y para ello se pueden dar 5 casos ($_5C_1$), que la pregunta incorrecta sea la 1, la 2, la 3, la 4 o la 5.

Por lo tanto, la probabilidad buscada es $_5C_1$ × P(A) × P(A) × P(A) × P(A) × P(B) = $5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$.

Este problema se puede resolver con la probabilidad binomial, sin embargo, en esta clase se puede analizar por medio del principio de la suma, y puede considerarse una introducción a la próxima clase.

2.6 Probabilidad de experimentos repetidos, parte 1

Problema inicial

Determina la probabilidad de que al lanzar 5 veces un dado se obtengan "6 o 3" dos veces.

Solución

Considerando en un lanzamiento el evento A: Cae 6 o 3 y B: No cae 6 ni 3.

Lanzar el dado 5 veces son 5 experimentos independientes, y para obtener el evento se tienen los siguientes casos:

$$5C2 \text{ casos} \begin{cases} \text{A A B B B tiene probabilidad } P(A) \times P(A) \times P(B) \times P(B) \times P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3. \\ \text{A B A B B tiene probabilidad } P(A) \times P(B) \times P(A) \times P(B) \times P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3. \\ \vdots \end{cases}$$

El total de casos es igual al número de maneras que hay para escoger 2 de los 5 lugares en donde ocurrirá el evento A, por lo tanto hay $5C2$ casos, y todos estos casos son mutuamente excluyentes y de igual probabilidad, por lo tanto la probabilidad es: $5C2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$.

Conclusión

Sea p la probabilidad de que suceda el evento A en un experimento. Cuando se repite n veces el experimento, la probabilidad de que ocurra el evento A r veces ($0 \leq r \leq n$) es:

$$(nCr)p^r(1-p)^{n-r}.$$

Ejemplo

Analizando el desempeño de un jugador de fútbol se obtuvo la información de que al tirar una falta, la probabilidad de que marque gol es $\frac{3}{10}$, la probabilidad de que el tiro pegue en algún poste es $\frac{1}{2}$, y la probabilidad de que el tiro vaya fuera es $\frac{1}{5}$. Determina la probabilidad de que al realizar 6 tiros, 3 sean gol, 2 peguen en el poste y 1 vaya fuera.

Considerando en un tiro de falta los eventos A: es gol, B: pega en el poste, C: va fuera.

Puesto que cada tiro de falta es independiente del otro, se puede dar el caso de obtener los 3 goles en los primeros tiros, luego 2 al poste y 1 va fuera, cuya probabilidad es $P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(B) \times P(B) \times P(C)$.

Luego el total de casos es igual al total de formas en que se pueden escoger los experimentos (tiros) en que hará gol ($6C3$) y luego de los restantes experimentos (tiros) escoger cuáles pegarán en el poste ($3C2$).

Cada uno de estos casos tiene una probabilidad de ocurrir de $\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{3}{5\,000}$.

Por lo tanto, la probabilidad es: $6C3 \times 3C2 \times \frac{3}{5\,000} = \frac{9}{250}$.

Problemas

1. En una bolsa se tienen 3 bolitas rojas y 4 bolitas negras. Se extraen 4 bolitas una tras otra y con reemplazo (la bolita extraída se devuelve a la bolsa). Determina:
   a) La probabilidad de que hayan sido 2 bolitas rojas y 2 negras.
   b) La probabilidad de que haya sido a lo sumo 1 bolita roja.
   c) La probabilidad de que haya sido al menos 1 bolita negra.

2. Determina la probabilidad de que al extraer 7 cartas (una tras otra) con reemplazo de una baraja tradicional (de 52 cartas) 3 de ellas sean de diamantes, 2 sean de color negro y 2 sean de corazones.

Indicador de logro:

2.6 Encuentra probabilidades para valores específicos de la distribución binomial o multinomial, utilizando los conceptos de independencia de experimentos y combinaciones.

Secuencia:

Luego de introducir el concepto de independencia de experimentos, se pueden resolver algunos problemas sobre probabilidades particulares de la distribución binomial y la distribución multinomial.

Propósito:

Utilizar las combinaciones para resolver problemas sobre las probabilidades de eventos repetidos.

Solución de problemas:

1a) Sea A: la bolita es roja, entonces P(A) = $\frac{3}{7}$, entonces, puesto que se van a extraer 4 bolitas, de las cuales 2 deben ser rojas y 2 negras, esta probabilidad es:

$$_4C_2\left(\frac{3}{7}\right)^2\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{864}{2\,401}.$$

1b) Para resolver este problema hay que considerar 2 casos, que no hayan bolitas rojas y que haya únicamente una bolita roja, y puesto que la intersección de estos eventos es vacía, por el axioma 3 de probabilidad se tiene que la probabilidad buscada es:

$$_4C_0\left(\frac{3}{7}\right)^0\left(\frac{4}{7}\right)^4 + {}_4C_1\left(\frac{3}{7}\right)^1\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{256}{2\,401} + \frac{768}{2\,401} = \frac{1\,024}{2\,401}.$$

1c) Si se procede por el complemento, este problema equivale a encontrar la probabilidad de no tener bolitas negras, y luego realizar la diferencia con 1, es decir la probabilidad buscada es:

$$1 - {}_4C_4\left(\frac{3}{7}\right)^4\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1 - \frac{81}{2\,401} = \frac{2\,320}{2\,401}.$$

2. Sean A: es de diamantes, B: es de color negro, C: es de corazones, entonces P(A) = $\frac{1}{4}$, P(B) = $\frac{1}{2}$, y P(C) = $\frac{1}{4}$, y puesto que las extracciones son independientes una de otra (porque las cartas son devueltas) entonces la probabilidad es:

$$_7C_3 \times {}_4C_2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{105}{2\,048}.$$

2.7 Probabilidad de experimentos repetidos, parte 2

Problema inicial

En un juego se lanza un dado hasta que se obtiene 2 veces el número cinco, determina la probabilidad de lograr esto en 4 lanzamientos del dado.

Solución

En este caso en el cuarto lanzamiento debe caer cinco, y en los primeros 3 lanzamientos también debe caer 1 vez cinco. Como cada lanzamiento es independiente del otro, entonces se tiene que la probabilidad requerida es:

$$3C1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{432}.$$

Conclusión

Considerando un evento A del espacio muestral de un experimento, si el experimento se repite n veces hasta que ocurra r veces el evento A, entonces el evento A tuvo que haber ocurrido $(r-1)$ veces en las primeras $(n-1)$ repeticiones y en la última repetición del experimento.

Problemas

1. De una baraja tradicional se extrae una carta tras otra, con reposición (después de extraerla se devuelve a la baraja), los experimentos terminan cuando se extraen 3 cartas de diamante. Determina la probabilidad de obtener estas 3 cartas de diamantes en las primeras 6 extracciones.

2. En un juego de mesa se puede comenzar a mover el peón hasta que se obtiene 6 en el lanzamiento de un dado.

   Determina:
   a) La probabilidad de comenzar a mover el peón a partir del primer lanzamiento.
   b) La probabilidad de comenzar a mover el peón a partir del tercer lanzamiento.
   c) La probabilidad de comenzar a mover el peón después de a lo sumo 3 lanzamientos.
   d) La probabilidad de comenzar a mover el peón en al menos 3 lanzamientos.

3. La meta de producción individual de una empresa textil es de 4 camisas sin imperfecciones, y la probabilidad de producir una camisa con imperfecciones es $\frac{1}{3}$.

   Calcula:
   a) La probabilidad de lograr la meta produciendo exactamente 5 camisas.
   b) La probabilidad de lograr la meta produciendo a lo sumo 6 camisas.
   c) La probabilidad de lograr la meta produciendo al menos 7 camisas.

4. Determina la probabilidad de que al sacar cartas de una baraja tradicional (52 cartas) la segunda carta de tréboles sea en la quinta extracción, considerando que la extracción es con reposición.

5. Un experto de tiro lanza dardos a un blanco, y se sabe que acierta 7 de cada 10 tiros. Un juego consiste en que 3 participantes dicen cuántos tiros será necesario hacer para lograr que 4 dardos den en el blanco; el primer participante dice que se logrará en 5 tiros, el segundo dice que en 7 tiros y el tercero dice que en 10 tiros. Determina qué participante tiene mayor probabilidad de ganar.

Indicador de logro:

2.7 Aplica los conceptos de experimentos independientes y combinaciones en la resolución de problemas sobre el cálculo de probabilidades para valores específicos de la distribución binomial negativa.

Secuencia:

Para finalizar esta lección se trabaja con algunos problemas que tienen que ver con la probabilidad binomial negativa, en la cual solamente se espera que los estudiantes utilicen las combinaciones y lo visto sobre probabilidad para resolver los problemas sin analizar la distribución de probabilidad.

Propósito:

En esta clase y la anterior no se enfoca en el desarrollo de las distribuciones de probabilidad, dado que este es un concepto mucho más complejo y cuyo conocimiento puede resultar más útil en un nivel universitario, dada su generalidad.

Solución de problemas:

1. Sea A: la carta es de diamantes, entonces $P(A) = \frac{1}{4}$, y ahora garantizando la tercera carta de diamantes en la sexta extracción, se tiene que para las otras 2 cartas de diamantes hay 5 opciones, por lo tanto, la probabilidad pedida es: $_5C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{135}{2\,048}$.

2a) Sea A: cae 6, entonces $P(A) = \frac{1}{6}$, entonces, la probabilidad de que comience a mover el peón en el primer lanzamiento es equivalente a que caiga 6 en el primer lanzamiento, es decir, la probabilidad es $\frac{1}{6}$.

2b) Para este problema es equivalente a determinar la probabilidad de que caiga 6 hasta el tercer lanzamiento, es decir, la probabilidad es: $_2C_0\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{216}$.

2c) Se pueden dar 3 casos, moverlo después del primer lanzamiento, después del segundo o después del tercero, y puesto que los 3 casos son excluyentes, se puede aplicar el axioma 3 de probabilidad, por lo tanto, la probabilidad es:

$$\frac{1}{6} + {}_1C_0\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right) + {}_2C_0\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{36+30+25}{216} = \frac{91}{216}.$$

2d) Utilizando el complemento, la probabilidad es: $1 - \frac{1}{6} - {}_1C_0\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{36} = \frac{36-6-5}{36} = \frac{25}{36}$.

O considerando que los primeros dos lanzamientos no son 6, $P(A^c) \times P(A^c) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

3a) La probabilidad es $_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{64}{243}$.

3b) Pueden darse 3 casos (excluyentes entre sí), producirlas en 4, 5 o 6 intentos, por lo tanto, la probabilidad es: $_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right) + {}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right) + {}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81} + \frac{64}{243} + \frac{160}{729} = \frac{144+192+160}{729} = \frac{496}{729}$.

3c) Utilizando el complemento del literal 3b, se tiene que la probabilidad es: $1 - \frac{496}{729} = \frac{233}{729}$.

4. Sea A: la carta es de tréboles, entonces $p(A) = \frac{1}{4}$, y puesto que los experimentos son independientes (porque la extracción es con reposición), la probabilidad es: $_4C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{256}$.

5. Sea A: acierta el tiro, entonces $p(A) = \frac{7}{10}$, y calculando la probabilidad de ganar para cada uno:

participante 1, $_4C_3\left(\frac{7}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right)^1\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{28\,812}{100\,000}$; participante 2, $_6C_3\left(\frac{7}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{1\,296\,540}{10\,000\,000}$;

participante 3, $_9C_3\left(\frac{7}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right)^6\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{147\,027\,636}{10\,000\,000\,000}$. Por lo tanto el primer participante tiene mayores probabilidades de ganar.

2.8 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Determina la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja tradicional sea de corazones, si ya se sabe que la carta extraída es de color rojo.

2. La probabilidad de que un programa de televisión sea visto por un hombre casado es 0.3, la probabilidad de que sea visto por una mujer casada es 0.4, y la probabilidad de que un esposo vea el programa cuando su esposa lo ve es 0.7.

   Calcula:
   a) La probabilidad de que una pareja casada vea el programa.
   b) La probabilidad de que una esposa vea el programa dado que el esposo lo ve.
   c) La probabilidad de que al menos uno de los esposos vea el programa.

3. Para rifar 3 premios participan 15 personas, de las cuales 10 son mujeres y 5 son hombres, determina la probabilidad de que 3 hombres ganen un premio, si una misma persona no puede ganar dos premios.

4. La probabilidad de que llueva en un día de octubre es $\frac{1}{3}$.

   Calcula:
   a) La probabilidad de que no llueva durante 5 días seguidos.
   b) La probabilidad de que llueva 3 días de una semana (5 días).
   c) La probabilidad de que llueva hasta el sexto día del mes de octubre.

5. Determina la probabilidad de que al lanzar un dado 5 veces se obtenga exactamente un cuatro, un seis y un uno, en alguno de los lanzamientos.

6. El 30% de los conductores tienen un accidente de tránsito, el 30% de estos accidentes es debido a que el conductor estaba bajo los efectos del alcohol, el 20% por contestar el celular y el 5% cambiaba la emisora. Por otro lado, el 40% de los conductores van bajo los efectos del alcohol, el 50% contestan el celular y el 70% cambia la emisora mientras conduce.

   Determina:
   a) La probabilidad de que una persona choque dado que se conduce ebria.
   b) La probabilidad de que una persona choque dado que contestó el celular.
   c) La probabilidad de que una persona choque dado que cambió la emisora.

7. En el control de calidad de una envasadora de alimentos se extraen productos hasta completar 4 defectuosos, si el 95% del producto es producido de buena calidad.

   Determina:
   a) La probabilidad de que se extraigan 10 elementos en el control de calidad.
   b) La probabilidad de que los primeros 4 productos sean los defectuosos.

Indicador de logro:

2.8 Resuelve problemas correspondientes a la probabilidad condicional.

Solución de problemas:

1. Sean A: la carta es de corazones; y B: la carta es de color rojo, entonces:

$P(A\cap B) = \frac{13}{52}$, $P(B) = \frac{26}{52}$, por lo tanto $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2a) Sean A: el programa es visto por una mujer casada; y B: el programa es visto por un hombre casado, entonces: $P(A) = 0.4$, $P(B/A) = 0.7$, por lo tanto, $P(A\cap B) = P(A)P(B/A) = 0.4 \times 0.7 = 0.28$.

2b) $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0.28 \div 0.3 = 0.93$.

2c) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.28 = 0.42$.

3. Sea A: ganan 3 hombres, entonces $n(A) = {}_5C_3$, por lo tanto, $P(A) = \frac{{}_5C_3}{{}_{15}C_3} = \frac{2}{91}$

4a) Sea A: llueve, entonces $P(A) = \frac{1}{3}$ y puesto que llover es algo independiente de un día a otro, por lo tanto, la probabilidad que no llueva 5 días seguidos es: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$.

4b) La probabilidad es: ${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$.

4c) La probabilidad es: ${}_5C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{729}$.

5. Sean A: cae 4; B: cae 6; C: cae 1; y D: cae 2, 3 y 5 en el lanzamiento, entonces la probabilidad es:

${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2 \times P(A) \times P(B) \times P(C) \times P(D)^2 = 60 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{72}$.

6a) Sean A: la persona se conduce ebria, B: la persona contestó el celular, C: la persona cambió la emisora, D: la persona tiene un accidente de tránsito, entonces:

$P(A\cap D) = P(D)P(A/D) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$, por lo tanto, $P(D/A) = \frac{P(A\cap D)}{P(A)} = \frac{9}{100} \div \frac{2}{5} = \frac{9}{40}$.

6b) $P(B\cap D) = P(D)P(B/D) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$, por lo tanto, $P(D/B) = \frac{P(B\cap D)}{P(B)} = \frac{3}{50} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{25}$.

6c) $P(C\cap D) = P(D)P(C/D) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{20} = \frac{3}{200}$, por lo tanto, $P(D/C) = \frac{P(C\cap D)}{P(C)} = \frac{3}{200} \div \frac{7}{10} = \frac{3}{140}$.

Para este problema hay que indicar que los porcentajes sean expresados como fracción, para calcular las probabilidades.

7a) Este problema equivale a decir que el cuarto elemento defectuoso se da en la décima extracción, por lo tanto, la probabilidad es:

$${}_9C_3\left(\frac{1}{20}\right)^3\left(\frac{19}{20}\right)^6\left(\frac{1}{20}\right) = \frac{3\,951\,854\,004}{10\,240\,000\,000\,000}.$$

7b) Puesto que cada extracción es independiente de las otras, la probabilidad es:

$$\frac{1}{20} \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{160\,000}.$$

2.9 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Determina la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja tradicional sea de diamante o de picas o Jota.

♠ Picas	♣ Tréboles
♥ Corazones	♦ Diamantes

2. Calcula la probabilidad de que al lanzar 3 dados la suma sea 10.

3. Determina la probabilidad de que al ordenar 3 bolas azules (idénticas), 4 bolas moradas (idénticas) y 2 bolas negras (idénticas) las bolas negras queden todas juntas.

4. En un juego se tienen 2 bolsas, la primera contiene 3 bolas blancas, 2 rojas y una negra, la segunda contiene 2 bolas blancas, 3 rojas y 3 negras. Se extrae una bola de alguna de las bolsas.

   Calcula:
   a) La probabilidad de que se extraiga una bola negra de la segunda bolsa.
   b) La probabilidad de que se extraiga una bola roja.

5. En un ropero hay 3 pares de zapatos negros y 4 pares de zapatos cafés. Si se extrae un zapato, determina:

   a) La probabilidad de extraer un zapato café derecho o un zapato negro izquierdo.
   b) La probabilidad de extraer un zapato izquierdo o de color negro.

6. Calcula la probabilidad de que en una cadena binaria (de 0 y 1) de longitud 6 aparezcan al menos 3 ceros juntos al final de la cadena.

7. Determina la probabilidad de que al ubicar 2 torres en un tablero de ajedrez (8 × 8) estas queden alineadas vertical u horizontalmente.

8. Determina la probabilidad de que al ubicar 3 niñas y 3 niños en una mesa redonda ningún niño quede a la par de otro niño.

9. Considerando las piezas de Braile formadas por un rectángulo con 6 celdas en el que cada celda puede estar vacía o tener un punto en relieve. Determina la probabilidad de que al escoger una pieza del sistema Braile tenga al menos una casilla vacía (sin punto en relieve).

Indicador de logro:

2.9 Resuelve problemas correspondientes a probabilidad.

Solución de problemas:

1. Sea A: es de diamante, B: es de picas, y C: es Jota, entonces se tiene que n(A) = 13, n(B) = 13, n(C) = 4, n(A∩B) = 0 (A∩B = ∅), n(A∩C) = 1 (la Jota de diamantes), n(B∩C) = 1 (la Jota de picas), n(A∩B∩C) = 0, (A∩B∩C = ∅), por lo tanto:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - 0 - \frac{1}{52} - \frac{1}{52} + 0$$
$$= \frac{28}{52} = \frac{7}{13}.$$

2. Sea A: la suma de las tiradas es 10, entonces A = {(1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 5, 4), (1, 6, 3), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (2, 5, 3), (2, 6, 2), (3, 1, 6), (3, 2, 5), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (3, 5, 2), (3, 6, 1), (4, 1, 5), (4, 2, 4), (4, 3, 3), (4, 4, 2), (4, 5, 1), (5, 1, 4), (5, 2, 3), (5, 3, 2), (5, 4, 1), (6, 1, 3), (6, 2, 2), (6, 3, 1)}, por lo tanto, P(A) = $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

3. Sea A: las bolas negras quedan juntas, entonces $n(A) = \frac{8!}{1!\,3!\,4!} = 280$, y $n(S) = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1\,260$, por lo tanto, $P(A) = \frac{280}{1\,260} = \frac{2}{9}$.

4a) Sea A: es una bola negra, B: es de la primera bolsa, y C: es de la segunda bolsa, P(A/C) = $\frac{3}{8}$ y P(C) = $\frac{1}{2}$ por lo tanto, $P(A\cap C) = P(C)P(A/C) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$.

4b) Sea D: es una bola roja, entonces
$$P(D) = P(D\cap B) + P(D\cap C) = P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{8}$$
$$= \frac{17}{48}.$$

5a) Sea A: el zapato es café y derecho, B: el zapato es negro e izquierdo, entonces

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_4C_1}{{}_{14}C_1} + \frac{{}_3C_1}{{}_{14}C_1} = \frac{7}{14}.$$

5b) Sea C: el zapato es izquierdo, D: el zapato es negro, entonces

$$P(C\cup D) = P(C) + P(D) - P(C\cap D) = \frac{{}_7C_1}{{}_{14}C_1} + \frac{{}_6C_1}{{}_{14}C_1} - \frac{{}_3C_1}{{}_{14}C_1} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}.$$

6. Asegurando que los 3 ceros estén juntos al final, se tiene que la probabilidad es $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. O bien, utilizando la probabilidad del complemento, solamente es necesario calcular cuando aparecen 0, 1 o 2 ceros juntos al final de la cadena, por lo tanto, la probabilidad es: $1 - \frac{2^5}{2^6} - \frac{2^4}{2^6} - \frac{2^3}{2^6} = \frac{1}{8}$.

7. Sea A: las torres quedan alineadas vertical u horizontalmente, entonces se tiene que $P(A) = \frac{64\times 14}{64\times 63} = \frac{2}{9}$.

8. Sea A: ningún niño queda a la par de otro, entonces $n(A) = \frac{3!\times {}_4P_3 - 3!\times 3!\times 2}{6} = 12$, por lo tanto, $P(A) = \frac{12}{5!} = \frac{1}{10}$.

Para calcular n(A) es necesario restarle 3! × 3! × 2, que son los casos en los que al ordenar de manera lineal quedan 2 estudiantes en los extremos de la fila, luego valorar los dos espacios que quedan entre las niñas para colocar el niño restante y contarlo para cada forma de ordenar las niñas.

9. Utilizando la probabilidad del complemento, es suficiente con determinar la probabilidad del evento A: la pieza no tiene casillas vacías, entonces $P(A) = \frac{1}{2^6}$, por lo tanto, la probabilidad requerida es:

$$1 - \frac{1}{2^6} = \frac{63}{64}.$$

2.10 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. En un juego se tiene una baraja tradicional de la que se han quitado 3 cartas de corazones, una de diamante y 2 de tréboles, el juego consiste en adivinar de qué palo será la carta que se extraiga de la baraja modificada (picas, corazones, tréboles o diamantes). Determina la opción que tiene mayor probabilidad de ganar.

2. Un juego consiste en adivinar cuántas caras caerán al lanzar 7 veces una moneda, Carmen dice que caerán 4 caras y Carlos dice que caerán 3 caras. Determina quién tiene mayor probabilidad de ganar. Si fueran 8 lanzamientos, determina cuál sería la opción más probable.

3. Un juego de dados consiste en adivinar después de cuántas tiradas se obtendrá 3 veces el número 5. Una persona dice que se logrará después de 6 tiradas, otra dijo que después de 7, y otra dijo que después de 8 tiradas. Determina qué persona tiene mayores probabilidades de ganar. ¿Qué opción habrías dicho tú para tener la mayor probabilidad de ganar?

4. La probabilidad de que en una calle el semáforo esté arruinado es 0.2, la probabilidad de que en dicha calle ocurra un accidente es 0.5, y la probabilidad de que ocurra un accidente considerando que el semáforo está dañado es 0.75.

   Determina:
   a) La probabilidad de que ocurra un accidente y el semáforo esté arruinado.
   b) La probabilidad de que el semáforo esté arruinado dado que ocurrió un accidente.

5. Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 bolas rojas, todas indistinguibles entre sí, se extraen 3 bolas de la urna, una después de la otra, con la condición que si la bola es roja se devuelve a la urna, pero si la bola es blanca no se devuelve. Determina la probabilidad de que al sacar 3 bolas, exactamente una de ellas sea de color blanco.

6. En un consultorio se tiene que la probabilidad de que alguien tenga cáncer si se le ha diagnosticado es 0.9, y la probabilidad de que alguien lo padezca si se le ha diagnosticado que no lo tiene es 0.15, además se sabe que el 20% de los pacientes son diagnosticados con cáncer.

   Calcula:
   a) La probabilidad de que un paciente padezca de cáncer.
   b) La probabilidad de que un paciente sea diagnosticado con cáncer si lo padece.

7. En un juego de un programa de televisión se gira una ruleta de colores, participan 3 personas. El juego consiste en adivinar después de cuántas giradas caerá la ruleta en la casilla de color rojo. Una persona dice que en la tercera girada, otra dice que en la sexta girada, y la última dice que en la cuarta girada. Determina cuál de las personas tiene mayor probabilidad de ganar si la probabilidad de que caiga rojo en la ruleta es 0.3. ¿Qué opción habrías dicho tú para tener la mayor probabilidad de ganar?

Indicador de logro:

2.10 Resuelve problemas correspondientes a probabilidad.

Solución de problemas:

1. Sean A: es de corazones, B: es de diamantes, C: es de tréboles, y D: es de picas, luego P(A) = $\frac{10}{52}$, P(B) = $\frac{12}{52}$, P(C) = $\frac{11}{52}$ y P(D) = $\frac{13}{52}$, por lo tanto, la opción que tiene mayor probabilidad es que sea una carta de picas.

2. Sean A: caen 4 caras, B: caen 3 caras, y calculando cada caso:

$P(A) = {}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{35}{128}$ y $P(B) = {}_7C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}$ (${}_7C_4 = {}_7C_3$), por lo tanto, ambos tienen la misma probabilidad de ganar.

Por otro lado si fueran 8 lanzamientos se tiene el siguiente escenario:

$P(A) = {}_8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{70}{256}$ y $P(B) = {}_8C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{56}{256}$, por lo tanto, para este caso Carmen tiene mayores probabilidades de ganar.

3. Sean A: después de 6 tiradas, B: después de 7 tiradas y C: después de 8 tiradas, entonces las probabilidades son:

$P(A) = {}_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{625}{23\,328}$, $P(B) = {}_6C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3\,125}{93\,312}$, y $P(C) = {}_7C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{21\,875}{559\,872}$

Luego, utilizando aproximaciones decimales, P(A) ≈ 0.027, P(B) ≈ 0.033, P(C) ≈ 0.039, por lo tanto, la tercera persona tiene más probabilidades de ganar.

Para determinar cuál sería la mejor respuesta, se puede utilizar el método de prueba y error, lo ideal es que logren concluir que aproximadamente la mayor probabilidad se alcanza entre 15 y 17 tiradas, lo cual coincide con la esperanza matemática de la distribución binomial negativa para este caso.

4a) Sea A: el semáforo está arruinado, B: ocurre un accidente, entonces P(A) = 0.2, P(B) = 0.5, P(B/A) = 0.75, por lo tanto, P(A∩B) = P(A) P(B/A) = 0.2 × 0.75 = 0.15.

4b) $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0.15 \div 0.5 = 0.3$

5. Sean A: la bola es blanca, y B: la bola es roja, puesto que la bola blanca puede salir en la primera, segunda o tercera extracción, y estos casos no pueden suceder simultáneamente, hay 3 casos:

A, B, B; B, A, B; B, B, A; y la probabilidad es: $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}$

$$= \frac{5}{36} + \frac{10}{81} + \frac{80}{729} = \frac{405 + 360 + 320}{2\,916} = \frac{1\,085}{2\,916}$$

6a) Sea A: el paciente tiene cáncer, y B: el paciente es diagnosticado con cáncer, entonces P(B) = 0.2, $P(B^c) = 0.8$, P(A/B) = 0.9 y $P(A/B^c) = 0.15$; luego $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c)$, por lo tanto, la probabilidad es:

$$P(A) = P(A/B)\,P(B) + P(A/B^c)\,P(B^c) = 0.9 \times 0.2 + 0.15 \times 0.8 = 0.18 + 0.12 = 0.3$$

6b) $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = 0.18 \div 0.3 = 0.6$

7. Sean A: cae rojo en la tercera girada, B: cae rojo en la sexta girada, y C: cae rojo en la cuarta girada; entonces las probabilidades son: $P(A) = (0.7)^2(0.3) = 0.147$; $P(B) = (0.7)^5(0.3) = 0.05$; $P(C) = (0.7)^3(0.3) = 0.103$.

Por lo tanto, la primera persona tiene más probabilidades de ganar. Para determinar cuál sería la mejor respuesta, se puede utilizar el método de prueba y error, lo ideal es que logren concluir que aproximadamente la mayor probabilidad se alcanza en 2 giradas, lo cual coincide con la esperanza matemática de la distribución geométrica para este caso.