

1 Unidad

Ecuaciones

El trabajo con ecuaciones se ha realizado desde culturas antiguas. Detallar su origen es complicado, pero junto con las ecuaciones estudiadas en grados anteriores, históricamente, se ha llevado el estudio de ecuaciones con particularidades, tal es el caso de las ecuaciones cuárticas (de grado 4) que tienen estructura de ecuación cuadrática, de ecuaciones expresadas con radicales, de ecuaciones racionales que se reducen a ecuaciones de primer grado, entre otras, que utilizan y cumplen las mismas propiedades de las igualdades y de los sistemas de ecuaciones.

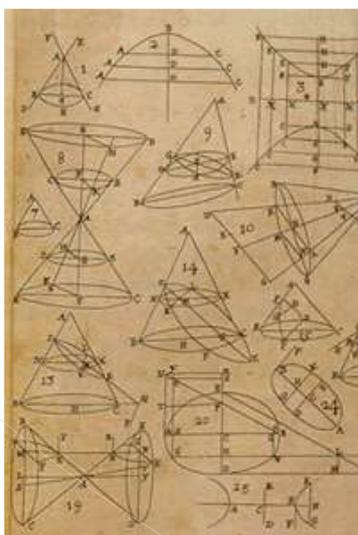


Imagen de las cónicas de Apolonio. La deducción de las ecuaciones de estas figuras necesita la resolución de ecuaciones con radicales.

En el modelamiento de situaciones de la naturaleza existen fenómenos que son complicados de modelar con ecuaciones de primer grado o ecuaciones cuadráticas, por lo que se hace necesario resolver otros tipos de expresiones. Para ello deben aplicarse los conocimientos adquiridos en la solución de las ecuaciones básicas (primer grado, cuadráticas y sistemas de ecuaciones de primer grado) a otros tipos de ecuaciones.

Se comenzará abordando los contenidos de ecuación bicuadrática, como aplicación de lo aprendido en ecuación cuadrática, y luego se pasará a resolver ecuaciones expresadas con signo de radical, para finalmente abordar las ecuaciones racionales, partiendo del concepto de mínimo común múltiplo para polinomios.

1.1 Ecuaciones bicuadráticas, parte 1

Problema inicial

Resuelve la ecuación $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$, haciendo los siguientes pasos:

1. Realiza el cambio de variable $y = x^2$.
2. Resuelve la ecuación de grado dos que resulta en 1.
3. Encuentra las soluciones de la ecuación original.

Solución

1. Si se observa la ecuación, puede escribirse como $(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = 0$, por lo que al hacer el cambio de variable $y = x^2$ se tiene

$$(x^2)^2 - 25(x^2) + 144 = y^2 - 25y + 144 = 0.$$

2. Se puede resolver esta ecuación cuadrática factorizando, por lo que se buscan dos números que multiplicados den 144 y sumados den -25 ,

$$y^2 - 25y + 144 = (y - 16)(y - 9) = 0.$$

De aquí se tiene que $y - 16 = 0$ o bien $y - 9 = 0$. Es decir, $y = 16$ o bien $y = 9$.

3. De 1 se tiene que $y = x^2$ y de 2 se sabe que $y = 16$ o $y = 9$. Entonces

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \text{ o bien } x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ son $x = -4, -3, 3, 4$.

Definición

Las ecuaciones de la forma $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$, donde A es distinto de cero, se llaman ecuaciones **bicuadráticas**.

Las ecuaciones bicuadráticas pueden resolverse haciendo el cambio de variable $y = x^2$ y resolviendo la ecuación cuadrática que resulta. Las ecuaciones bicuadráticas tienen cuatro soluciones, ya sean todas reales, todas imaginarias o dos reales y dos imaginarias.

Ejemplo

Determina todas las soluciones complejas de la ecuación $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$.

Al hacer el cambio de variable $y = x^2$, la ecuación resultante es $y^2 - 24y - 25 = 0$. Al factorizar se tiene

$$y^2 - 24y - 25 = (y - 25)(y + 1) = 0.$$

Luego, $y - 25 = 0$ o bien $y + 1 = 0$.

- Si $y - 25 = 0$ entonces $y = 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$.
- Si $y + 1 = 0$ entonces $y = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$.

De la Unidad 2 de Primer año de bachillerato se sabe que

$$\sqrt{-1} = i$$

Por lo tanto, las soluciones de $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$ son $x = -5, 5, i, -i$.

Problemas

Resuelve:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

e) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

f) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

1.2 Ecuaciones bicuadráticas, parte 2

Problema inicial

Resuelve la ecuación $2x^4 - 15x^2 + 27 = 0$.

Solución

Al hacer el cambio de variable $y = x^2$ resulta $2y^2 - 15y + 27 = 0$. Al resolver la ecuación por factorización, se obtiene con el método de la tijera que $2y^2 - 15y + 27 = (2y - 9)(y - 3) = 0$.

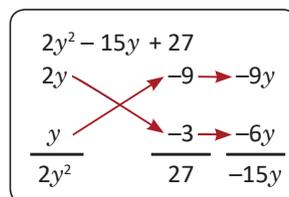
De aquí resulta

- $2y - 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$. Es decir, $x^2 = \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

- $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$. Es decir, $x^2 = 3$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$



Por lo tanto, las soluciones de $2x^4 - 15x^2 + 27 = 0$ son $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

Conclusión

Una expresión de la forma $Ax^4 + Bx^2 + C$ puede factorizarse en la forma $(ax^2 + b)(cx^2 + d)$ mediante el método de la tijera. Con este recurso puede evitarse el cambio de variable $y = x^2$ para resolver las ecuaciones bicuadráticas.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $2x^4 + 33x^2 + 16 = 0$.

Al factorizar $2x^4 + 33x^2 + 16$ con el método de la tijera se obtiene

$$2x^4 + 33x^2 + 16 = (2x^2 + 1)(x^2 + 16) = 0.$$

De aquí resulta

- $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$. Es decir,

$$\begin{aligned} x &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

- $x^2 + 16 \Rightarrow x^2 = -16$. Es decir, $x = \pm 4i$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $2x^4 + 33x^2 + 16 = 0$ son $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i, -4i, 4i$.

Problemas

Resuelve:

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

c) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$

d) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

e) $8x^4 - x^2 - 7 = 0$

f) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

1.3 Ecuaciones radicales, parte 1

Problema inicial

Resuelve la ecuación $\sqrt{x} - 3 = 5$.

Solución

Para resolver una ecuación de esta forma, donde aparecen radicales, se despeja el radical para luego elevar al cuadrado.

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - 3 &= 5 \\ \sqrt{x} &= 5 + 3 \quad \text{se despeja el radical,} \\ (\sqrt{x})^2 &= 8^2 \quad \text{se eleva al cuadrado,} \\ x &= 64.\end{aligned}$$

Al comprobar la solución, se tiene que $\sqrt{64} - 3 = 8 - 3 = 5$. Luego, $x = 64$ satisface la ecuación original, por lo tanto, $x = 64$ es la solución.

Definición

Una **ecuación radical** es aquella donde la incógnita o incógnitas aparecen bajo el signo radical.

Una ecuación radical puede convertirse a una ecuación donde no aparezcan radicales, despejando el radical y elevando al cuadrado.

Al haber resuelto la ecuación radical, hay que comprobar que los valores encontrados satisfacen la ecuación, sustituyéndolos en la ecuación original y comprobando la igualdad.

No se considerarán como soluciones aquellos valores que al comprobarlos en la ecuación original resulten números complejos.

Ejemplo

Resuelve $2\sqrt{2x+1} - 6 = 0$.

Al despejar el radical y elevar al cuadrado se obtiene

$$\begin{aligned}2\sqrt{2x+1} - 6 &= 0 \\ 2\sqrt{2x+1} &= 6 \\ \sqrt{2x+1} &= 3 \quad \text{se despeja el radical,} \\ 2x+1 &= 9 \quad \text{se obtiene una ecuación lineal la cual hay que resolver,} \\ 2x &= 8 \\ x &= 4.\end{aligned}$$

Al comprobar la solución se tiene: $2\sqrt{2(4)+1} - 6 = 2\sqrt{9} - 6 = 2(3) - 6 = 6 - 6 = 0$. Por lo tanto, $x = 4$ es la solución de la ecuación.

Problemas

Resuelve las ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{x+3} = 4$

c) $5 - \sqrt{3x+1} = 0$

e) $7 - \sqrt{x+2} = 3$

b) $\sqrt{x-8} = 2$

d) $5 + 3\sqrt{x} = 8$

f) $\sqrt{x+3} = \sqrt{5x-1}$

1.4 Ecuaciones radicales, parte 2

Problema inicial

Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$

b) $\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{2x} = x$

Solución

a) De la misma forma que en la clase anterior, se despeja el radical y luego se eleva al cuadrado.

$$\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$$

$$\sqrt{4x^2 - 15} = 2x - 1$$

$$4x^2 - 15 = 4x^2 - 4x + 1 \quad \text{elevando al cuadrado y desarrollando,}$$

$$\cancel{4x^2} - 15 = \cancel{4x^2} - 4x + 1$$

$$4x = 16$$

$$x = 4.$$

Se comprueba que 4 sea solución de la ecuación sustituyendo en la ecuación original

$$\sqrt{4(4)^2 - 15} - 2(4) = \sqrt{64 - 15} - 8 = \sqrt{49} - 8 = 7 - 8 = -1$$

Por lo tanto, $x = 4$ es solución de la ecuación $\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$.

b) Esta ecuación tiene dos radicales, por lo que se procura que ambos queden en miembros distintos.

$$\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{2x} = x$$

$$(\sqrt{x^2 + 6x})^2 = (x + \sqrt{2x})^2$$

$$x^2 + 6x = x^2 + 2x\sqrt{2x} + 2x \quad \text{desarrollando el binomio al cuadrado,}$$

$$\cancel{x^2} + 6x - 2x = \cancel{x^2} + 2x\sqrt{2x}$$

$$(4x)^2 = (2x\sqrt{2x})^2$$

$$16x^2 = 4x^2(2x)$$

$$16x^2 - 4x^2(2x) = 0$$

$$4x^2(4 - 2x) = 0.$$

Es recomendable no dividir entre $4x^2$ ya que no se sabe si puede ser cero.

De aquí se tiene que $4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, o bien $4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$. Comprobando ambos valores en la ecuación original,

$$x = 0: \sqrt{0^2 + 6(0)} - \sqrt{2(0)} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$x = 2: \sqrt{2^2 + 6(2)} - \sqrt{2(2)} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + 12} - \sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\Rightarrow 4 - 2 \stackrel{?}{=} 2$$

$$\Rightarrow 2 = 2 \quad \checkmark$$

Luego, $x = 0$ y $x = 2$ son las soluciones de la ecuación $\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{2x} = x$.

Conclusión

Al resolver ecuaciones radicales pueden resultar ecuaciones de grado mayor a 1 que pueden resolverse mediante factorización o mediante la fórmula general, cuando la ecuación resultante es una cuadrática que no pueda resolverse por factorización.

Problemas

Resuelve las ecuaciones radicales.

a) $x + 2 = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{4x + 5} = -1$

e) $\sqrt{3x - 11} + \sqrt{3x} = \sqrt{12x - 23}$

b) $3\sqrt{2x - 1} = 3x$

d) $\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x + 2} = 0$

f) $\sqrt{9x - 8} - \sqrt{4x + 1} = \sqrt{x - 3}$

1.5 Ecuaciones con radicales, parte 3

Problema inicial

Resuelve $x + \sqrt{4x + 1} = 5$.

Solución

Se despeja el radical y se eleva al cuadrado

$$x + \sqrt{4x + 1} = 5$$

$$\sqrt{4x + 1} = 5 - x$$

$$(\sqrt{4x + 1})^2 = (5 - x)^2$$

$$4x + 1 = 25 - 10x + x^2$$

$$x^2 - 14x + 24 = 0 \quad \text{se resuelve la ecuación cuadrática resultante,}$$

$$(x - 2)(x - 12) = 0.$$

Entonces, $x - 2 = 0$ o $x - 12 = 0$. Así, $x = 2$ o $x = 12$. Al comprobar las soluciones en la ecuación original se tiene:

$$x = 2: 2 + \sqrt{4(2) + 1} = 2 + \sqrt{8 + 1} = 2 + 3 = 5 \quad \checkmark$$

$$x = 12: 12 + \sqrt{4(12) + 1} = 12 + \sqrt{48 + 1} = 12 + 7 = 19 \neq 5 \quad \times$$

Por lo tanto, $x = 2$ es la solución de $x + \sqrt{4x + 1} = 5$.

La razón por la cual las soluciones de la ecuación obtenida al elevar al cuadrado no necesariamente son las soluciones de la ecuación original es porque si $A^2 = B^2$ no significa que $A = B$.

Por ejemplo, $3^2 = (-3)^2$ pero $3 \neq -3$.

Conclusión

No hay una forma de determinar el número de soluciones de una ecuación radical, por lo que cada valor encontrado al resolver la ecuación debe comprobarse sustituyéndolo en la ecuación original.

Ejemplo

Resuelve $\sqrt{2x^2 - 1} = \sqrt{x}$.

En esta ocasión hay dos radicales, por lo que se procura que ambos queden en miembros distintos de la ecuación.

$$(\sqrt{2x^2 - 1})^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$2x^2 - 1 = x$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Esta ecuación puede resolverse por factorización y puede comprobarse que

$$2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1) = 0.$$

Entonces, o bien $x = 1$ o bien $x = -\frac{1}{2}$. Lo primero que puede observarse es que x no puede ser $-\frac{1}{2}$, ya que el radical \sqrt{x} no sería un número real.

Comprobando para $x = 1$, se tiene $\sqrt{2(1)^2 - 1} = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} = 1$. \checkmark

Por lo tanto, $x = 1$ es la solución de $\sqrt{2x^2 - 1} = \sqrt{x}$.

Problemas

Resuelve cada ecuación radical.

a) $3x + \sqrt{x - 1} = 2x + 7$

c) $2 - \sqrt{2x + 3} = 2x - 1$

e) $\sqrt{3x + 10} = 5 - 3\sqrt{x + 3}$

b) $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{2x + 1} = 2$

d) $x = 2\sqrt{x + 2} + 1$

f) $\sqrt{3x + 7} + \sqrt{2x + 6} = \sqrt{13 - 3x}$

1.6 Mínimo común múltiplo de polinomios*

Problema inicial

Calcula el mínimo común múltiplo en cada caso.

a) 4, 6, 15

b) $6x$, $3x + 1$, $6x + 2$

c) $2m + 3$, $2m - 3$, $4m^2 - 9$

Factorizar polinomios es análogo a descomponer números en sus factores primos.

Solución

a) Para calcular el mínimo común múltiplo de 4, 6 y 15, se descompone cada número en sus factores primos.

$$4 = 2^2, \quad 6 = 2(3), \quad 15 = 3(5).$$

Luego, el mínimo común múltiplo de 4, 6 y 15 es $2^2(3)(5) = 4(3)(5) = 60$.

b) Para calcular el mínimo común múltiplo se hace de manera análoga que con números. Primero se factoriza cada expresión.

$$6x = 2(3)x, \quad 3x + 1 \text{ ya no puede factorizarse,} \quad 6x + 2 = 2(3x + 1).$$

Luego, el mínimo común múltiplo de $6x$, $3x + 1$ y $6x + 2$ es $2(3)(x)(3x+1) = 6(3x^2 + x) = 18x^2 + 6x$.

c) De igual manera que en b), se factoriza cada expresión y el mínimo común múltiplo será el producto de cada factor común y no común que aparece en cada factorización, con la mayor potencia que aparezca entre las tres expresiones.

$2m + 3$ y $2m - 3$ no pueden factorizarse y $4m^2 - 9 = (2m - 3)(2m + 3)$, por diferencia de cuadrados.

Por lo tanto, el mínimo común múltiplo de $2m + 3$, $2m - 3$ y $4m^2 - 9$ es $(2m - 3)(2m + 3)$.

Conclusión

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor número entre sus múltiplos comunes, y se denota por mcm.

Para calcular el mínimo común múltiplo de dos o más números, se descompone cada número en sus factores primos y se toma el producto de cada factor común y no común, con la mayor potencia a la que aparece.

También puede calcularse el mcm de expresiones algebraicas de manera análoga: se factoriza completamente cada expresión y el mcm será el producto de todos los factores, común y no común, con la mayor potencia a la que aparece.

Ejemplo

Calcula el mcm de $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$ y $x^2 - y^2$.

Se factoriza cada una de las expresiones anteriores:

$$x + y, \quad x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2, \quad x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Observación: No es necesario desarrollar $(x + y)^2(x - y)$.

Por lo tanto, el mcm de $x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$ y $x^2 - y^2$ es $(x + y)^2(x - y)$.

Problemas

Calcula el mcm para cada caso.

a) x^2 , y^2 , xy

c) $3a + 6$, $a^2 - 4$

e) $m - 1$, $m^2 - 1$, $m + 1$

b) $x + 5$, $x^2 - 25$, $x - 5$

d) 2 , $x - 3$, $2x - 6$

f) $3x + 15$, $x^2 - 25$, $6x$, $x - 5$

1.7 Ecuaciones racionales

Problema inicial

Resuelva cada ecuación.

a) $\frac{x+1}{x-2} = 4$

b) $\frac{1}{x+3} - \frac{3}{2x-1} = \frac{5}{2x^2+5x-3}$

Solución

- a) Cuando se tienen ecuaciones de esta forma, lo primero que hay que hacer es restringir los valores que puede tomar x , ya que pueden resultar divisiones entre cero, que no están definidas. Por lo tanto, en este caso, x no puede ser 2 ya que $x - 2$ se vuelve cero. Luego, hay que eliminar el denominador, y para ello se multiplica toda la ecuación por $x - 2$,

$$(x-2)\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = 4(x-2)$$

$$\cancel{(x-2)}\left(\frac{x+1}{\cancel{x-2}}\right) = 4(x-2)$$

$$x+1 = 4x-8 \quad \text{se resuelve la ecuación lineal,}$$

$$3x = 9$$

$$x = 3.$$

Si $x = 3$ el denominador $x - 2$ no se anula: $3 - 2 = 1$.

Por lo tanto, $x = 3$ es la solución de la ecuación.

- b) De nuevo, el objetivo es eliminar los denominadores. En este caso, como los tres denominadores son distintos, se debe multiplicar la ecuación por el mcm de estos.

Las expresiones $x + 3$ y $2x - 1$ no pueden factorizarse y $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$, por lo que el mcm de los tres denominadores es $(2x - 1)(x + 3)$. Además, x no puede ser -3 y $\frac{1}{2}$ ya que en ese caso algún denominador se vuelve cero. Entonces,

$$(2x-1)(x+3)\left(\frac{1}{x+3} - \frac{3}{2x-1}\right) = (2x-1)(x+3)\left(\frac{5}{2x^2+5x-3}\right)$$

$$(2x-1)\cancel{(x+3)}\frac{1}{\cancel{x+3}} - \cancel{(2x-1)}(x+3)\left(\frac{3}{\cancel{2x-1}}\right) = \cancel{(2x-1)}\cancel{(x+3)}\left(\frac{5}{\cancel{2x^2+5x-3}}\right)$$

$$2x-1-3(x+3) = 5$$

$$2x-1-3x-9-5 = 0$$

$$-x-15 = 0$$

$$x = -15$$

Si $x = -15$, ningún denominador se anula al evaluar -15 en cada uno de ellos. Por lo tanto, $x = -15$ es la solución de la ecuación.

Definición

Una ecuación que contiene fracciones y tal que la incógnita aparece en algún denominador se llama **ecuación racional**. Como en una ecuación racional la incógnita aparece en el denominador, se deben considerar valores de la incógnita que no hagan cero a algún denominador.

Para resolver una ecuación racional, primero debe analizarse qué valores de la incógnita hacen cero a algún denominador. Luego se multiplica toda la ecuación por el mcm de ellos y luego se resuelve la ecuación resultante. Se descartan aquellos valores de la incógnita que hagan cero a algún denominador en la ecuación original.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1}$.

En este caso, x no puede tomar los valores de 0 y 1. Además, el mcm de $x-1$ y x^2-x es $x(x-1)$, entonces,

$$\begin{aligned} x(x-1)\left(\frac{4}{x-1}\right) &= x(x-1)\left(\frac{3}{x^2-x}\right) + x(x-1)\left(\frac{x}{x-1}\right) \\ \cancel{x(x-1)}\left(\frac{4}{\cancel{x-1}}\right) &= \cancel{x(x-1)}\left(\frac{3}{\cancel{x^2-x}}\right) + \cancel{x(x-1)}\left(\frac{x}{\cancel{x-1}}\right) \\ 4x &= 3 + x^2 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x-3)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $x = 3$ o $x = 1$. Pero $x \neq 1$, por lo que esa solución queda descartada.

Por lo tanto, $x = 3$ es la solución de la ecuación $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1}$.

No es necesario comprobar que la solución es $x = 3$ sustituyendo en la ecuación original, porque si $x \neq 1$ y $x \neq 0$, entonces multiplicar por $x(x-1)$ es una operación reversible.

$$\begin{array}{ccc} & \frac{4}{x-1} = \frac{3}{x^2-x} + \frac{x}{x-1} & \\ \times x(x-1) \swarrow & & \searrow \div x(x-1) \\ & 4x = 3 + x^2 & \end{array}$$

Problemas

Resuelve cada ecuación racional.

a) $\frac{1}{x} = 3$

b) $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{5x} - 3 = 0$

d) $\frac{1}{2x+1} = 3$

e) $x + 3 = \frac{2x^2}{2x-1}$

f) $\frac{x-4}{x-1} = \frac{1-x}{x+1}$

g) $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+3} = 0$

h) $\frac{1}{2x} + \frac{3}{5x} = \frac{11}{x^2}$

1.8 Sistemas de ecuaciones

Problema inicial

Determina todas las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Solución

Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones y luego se sustituye en la otra ecuación.

En este caso, resulta más fácil si se despeja y de la ecuación lineal,

$$y = 2 - x \quad \text{----- (1)}$$

Luego, al sustituir y en la otra ecuación se tiene

$$x^2 - 3x - y + 2 = x^2 - 3x - (2 - x) + 2 = x^2 - 3x - 2 + x + 2 = x^2 - 2x = x(x - 2) = 0.$$

De aquí se tiene que $x = 0$ o $x = 2$.

Para determinar el valor de y se sustituye el valor de x en (1). Así, cuando $x = 0$, $y = 2$ y cuando $x = 2$, $y = 0$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son $x = 0$, $y = 2$ y $x = 2$, $y = 0$.

Conclusión

Para resolver un sistema de ecuaciones, donde una de ellas es lineal y la otra es de grado 2, se despeja una de las variables en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra, para luego resolver la ecuación en una variable resultante.

Es recomendable despejar en la ecuación lineal aquella variable que tiene menor grado en la ecuación de grado 2.

Ejemplo

Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Despejando y de la ecuación lineal se tiene que $y = x - 2$. Sustituyendo en la otra ecuación

$$x^2 + x + y - 1 = x^2 + x + (x - 2) - 1 = x^2 + x + x - 2 - 1 = x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Al resolver por factorización se tiene que $(x - 1)(x + 3) = 0$, por lo que $x = 1$ o $x = -3$.

Para $x = 1$ se tiene que $y = -1$ y para $x = -3$ se tiene que $y = -5$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son $x = 1$, $y = -1$ y $x = -3$, $y = -5$.

Problemas

Resuelve cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 2x - y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y - 3 = 0 \\ x^2 - 7x - y + 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = -14 \\ x^2 + 5x + y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ 2x^2 - x + y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x^2 + 4x + 2y = 1 \end{cases}$

1.9 Practica lo aprendido

1. Determina todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 9x^2 = 0$

c) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

d) $x^4 - 16 = 0$

e) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

f) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

g) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

h) $2x^4 + 9 = 11x^2$

i) $3x^4 + 64 = 52x^2$

j) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{5x+9} = 2x+3$

b) $\sqrt{2x+1} = x-1$

c) $\sqrt{2x+16} = 2x+4$

d) $\sqrt{x} + x = \sqrt{3x+x^2}$

e) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} = 7$

f) $\sqrt{x+16} - \sqrt{x} = 2$

g) $\sqrt{3x+12} - 1 = \sqrt{5x+9}$

h) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{3x-4}{3-x} = 2$

b) $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x}$

c) $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x+3}$

d) $\frac{2x+3}{5x-1} = \frac{6x+4}{15x+2}$

e) $\frac{4x-7}{12x+3} = \frac{x-16}{3x+5}$

f) $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2} = 3$

4. Determina todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a)
$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+x-y+3=0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x-y+3=0 \\ x^2-x-y-5=0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 6x-y-12=0 \\ x^2+2x-y=8 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x+y=-8 \\ x^2+2x+y=-7 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 8x-y-20=0 \\ 3x^2-7x-y=2 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 3x-y=4 \\ 2x^2+x+y=6 \end{cases}$$

1.10 Problemas de la unidad

1. Determina todas las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones bicuadráticas.

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

d) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$

e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

f) $8x^2 - 15 = x^4$

g) $3x^4 - 26x^2 - 9 = 0$

h) $12x^4 - 5x^2 - 3 = 0$

i) $-2x^4 - 9x^2 + 68 = 0$

j) $4x^4 = 13x^2 - 9$

k) $4x^4 = 5 - 19x^2$

l) $4x^4 + 91x^2 - 225 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{7 - 5x} = 8$

b) $x + \sqrt{5x + 19} = -1$

c) $2\sqrt{x} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{5 + x}$

d) $\sqrt{1 + 4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

e) $3\sqrt{2x - 3} + 2\sqrt{7 - x} = 11$

f) $\sqrt{7 - 2x} - \sqrt{5 + x} = \sqrt{4 + 3x}$

g) $\sqrt{2x + 15} - 2 = \sqrt{6x + 1}$

h) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{3x + 4} = \sqrt{5x + 9}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{5x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x} = 2$

b) $\frac{2x}{x+6} + \frac{3x}{x+4} = x$

4. Determina todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a)
$$\begin{cases} 6x - y + 2 = 0 \\ 2x^2 + 5x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 2y = 9 \\ 4x^2 - 12x - y + 9 = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ x^2 - 4x + 7y = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x^2 - 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

5. En un mismo plano cartesiano:

a) Grafica las ecuaciones $y = 2x - 2$ y $y = x^2 - 2x + 1$.

b) Encuentra los valores x y y que satisfacen ambas ecuaciones mostradas en a).

c) Ubica en el mismo plano cartesiano los pares ordenados (x, y) , donde x y y son los calculados en b).

d) ¿Qué sucede con los puntos ubicados en c) y las gráficas de las ecuaciones en a)?

e) ¿Qué se puede concluir sobre resolver sistemas de ecuaciones donde una es una ecuación lineal y la otra es una ecuación cuadrática?