Unidad 3

Secciones cónicas

Las secciones cónicas ha sido un tema que se ha estudiado desde la antigua Grecia, fueron descubiertas por el matemático griego Menecmo hacia el año 350 a.C. aproximadamente. Este trabajo fue retomado y ampliado por el matemático turco Apolonio de Perge, quién clasificó las cónicas según el tipo de corte que se hace en el cono de doble hoja, y cuyo aporte más importante se encuentra en el descubrimiento de las propiedades reflectivas que tienen; a partir de lo cual la física retoma estos aportes para el diseño de sólidos geométricos cuyas propiedades se aplican en óptica, diseño de radares, antenas, sistemas de navegación, señales, etc.

El telescopio Maksutov - Cassegrain tiene como principio el uso de lentes con forma parabólica e hiperbólica.

Las trayectorias de cuerpos celestes pueden describir elipses (como el sistema solar), parábolas o hipérbolas (como los cometas).

Por otra parte, la aplicación de las secciones cónicas resultó mucho más interesante conforme el estudio del universo retomó auge, hasta el punto en que el astrónomo alemán Johannes Kepler, descubre que la trayectoria de los planetas en el sistema solar describe una curva elíptica y cuyo resultado fue generalizado por el matemático y físico inglés Isaac Newton, quien demostró que la trayectoria de un cuerpo celeste (cometa, planeta, estrella, etc.) alrededor de una fuerza gravitatoria es una curva cónica.

En la unidad se abordan los contenidos de parábola, circunferencia, elipse e hipérbola, vistos desde la geometría analítica. Además se incluyen las clases sobre aplicaciones de las secciones cónicas, en las cuales se utilizan las propiedades reflectivas de estas en la elaboración de instrumentos científicos y tecnológicos. Posteriormente se trabajan algunas prácticas en GeoGebra para consolidar los contenidos abordados.

1.1 Lugar geométrico de una ecuación

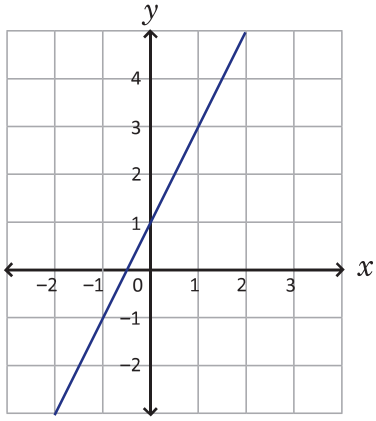
Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano el conjunto de puntos que satisfacen las ecuaciones:

a) $y = 2x + 1$ b) $y = x^2 - 1$

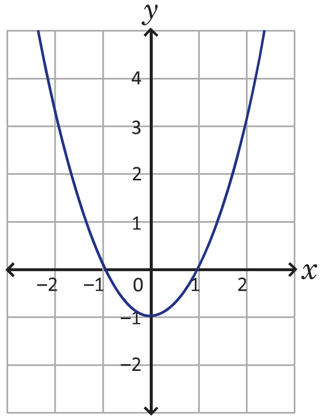
Solución

a) La ecuación es una función lineal y su gráfica en el plano es:



Por lo tanto, el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $y = 2x + 1$ es una línea recta.

b) La ecuación es una función cuadrática y su gráfica en el plano es:



Por lo tanto, el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $y = x^2 - 1$ es una parábola.

Definición

El **lugar geométrico** determinado por una ecuación es el conjunto de puntos que satisfacen dicha ecuación; en casos particulares pueden ser figuras conocidas como un punto, una línea recta, una circunferencia, una parábola, etc.

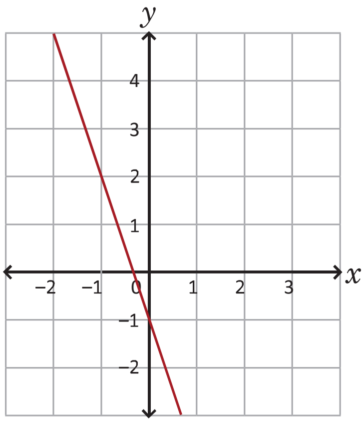
Problemas

1. Grafica en el plano cartesiano el lugar geométrico determinado por cada ecuación.

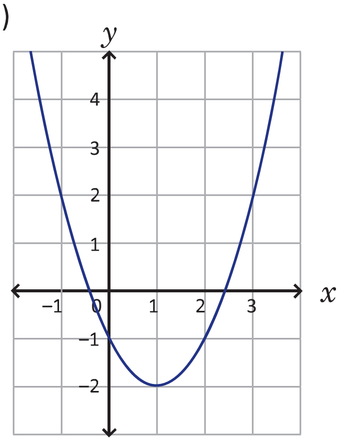
 a) $y = x - 4$ b) $y = -3x + 2$ c) $y = x^2 - 3$

2. Determina las ecuaciones cuyo lugar geométrico corresponda a cada gráfica.

 a)



 b)



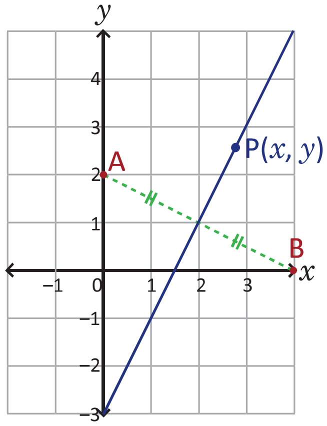
1.2 Ecuación de un lugar geométrico*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto A (0, 2) es igual a la distancia al punto B(4, 0).

Solución

Se colocan los puntos A y B en el plano cartesiano.



Puedes comprobar que las rectas son perpendiculares.

En particular un punto que cumple es el punto medio del segmento AB.

Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos:

$$d(\text{A, P}) = d(\text{P, B})$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2} \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} \quad \text{simplificando la ecuación,}$$

$$8x - 4y - 12 = 0.$$

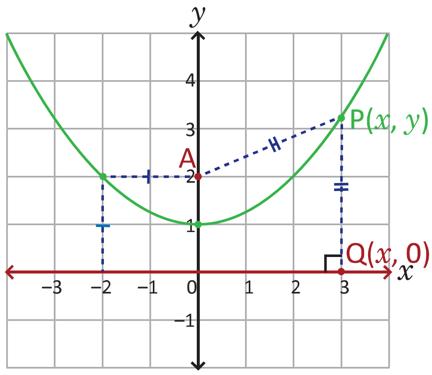
Por lo tanto, la ecuación que determina el lugar geométrico es $2x - y - 3 = 0$, y gráficamente es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio (mediatriz del segmento AB).

Conclusión

Para deducir la ecuación que determina un lugar geométrico con condiciones específicas, se plantea la ecuación que cumple las condiciones requeridas, aplicando conceptos de distancia entre puntos, entre punto y recta, etc.

Ejemplo

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al eje x es siempre igual a la distancia al punto A(0, 2).



En particular un punto que cumple es el punto medio de la distancia entre el punto A y el eje x.

Planteando la ecuación para P(x, y) que cumple las condiciones:

$$d(\text{P, Q}) = d(\text{A, P})$$

$$|y| = \sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$\cancel{y^2} = x^2 + \cancel{y^2} - 4y + 4 \quad \text{simplificando la ecuación,}$$

$$x^2 - 4y + 4 = 0.$$

Y se puede expresar como: $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

Por lo tanto, la ecuación que determina el lugar geométrico es $x^2 - 4y + 4 = 0$, y es una parábola.

Problemas

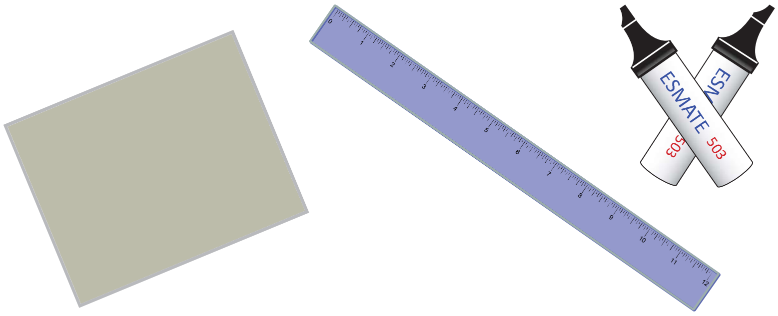
1. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto A(2, –3) es igual a la distancia al punto B(0, –1).
2. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $y = -1$ es siempre igual a la distancia al punto A(0, 1).
3. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que están a 2 unidades de distancia del eje y.
4. Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia del eje x como del eje y.

Unidad 3

1.3 Actividad introductoria

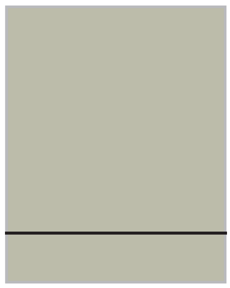
Materiales

- Hoja de papel vegetal
- Plumón
- Regla

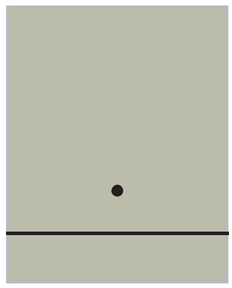


Actividad

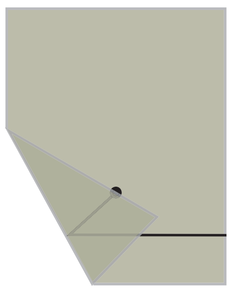
1. Dibuja una recta paralela al lado más angosto de la página, cercana al final de la misma.



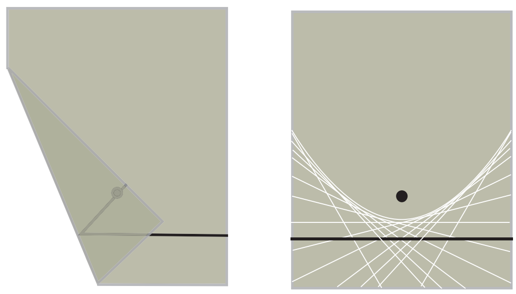
2. Dibuja un punto arriba de la recta, y en medio de la página.



3. Tomando el inicio de la recta, dobla la página hasta hacer coincidir el inicio de esta con el punto dibujado.



4. Realiza el mismo proceso con puntos cercanos en la línea recta hasta llegar al final de esta. Analiza la figura formada.



Definición

La figura que queda marcada por los cortes de los dobleces es una **parábola**. Observa que cada punto de ella cumple la condición de estar a igual distancia del punto dibujado como de la recta dibujada.

Preguntas

1. ¿Qué pasaría con la parábola si el punto se separa más de la recta dibujada?
2. ¿Qué pasaría si el punto se dibujara por debajo de la línea?
3. ¿Qué pasaría si la recta se dibujara vertical y con el punto a la derecha o izquierda de ella?
4. Analiza por qué se cumple que los puntos que determinan la parábola están a igual distancia del punto como de la recta.

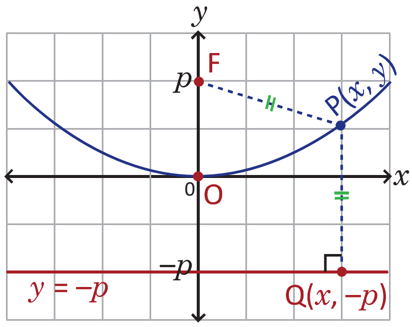
1.4 La parábola*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $y = -p$ es igual a la distancia al punto F(0, p).

Solución

Se toman en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y se utiliza la distancia de un punto a una recta y la distancia de dos puntos.



Como la recta $y = -p$ es horizontal, d(P, Q) $= |y - (-p)|$.

Expresando la igualdad d(P, Q) = d(P, F):

$$|y - (-p)| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} \quad \text{elevando al cuadrado,}$$
$$|y + p|^2 = x^2 + (y-p)^2 \quad \text{desarrollando los cuadrados,}$$
$$y^2 + 2yp + p^2 = x^2 + y^2 - 2yp + p^2 \quad \text{simplificando,}$$
$$4yp = x^2 \quad \text{despejando } y,$$
$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$

Por lo tanto, el lugar geométrico es una parábola de la forma $y = ax^2$, donde $a = \frac{1}{4p}$.

Definición

La ecuación que determina el espacio geométrico de **una parábola** está dada por: $y = \frac{1}{4p}x^2$.

En esta ecuación, **el vértice** de la parábola siempre estará en el origen (0, 0). El valor de p recibe el nombre de **parámetro**.

El punto F(0, p) es conocido como **el foco** de la parábola, la recta $y = -p$ es conocida como **la directriz** de la parábola. La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco de la parábola se conoce como **eje**.

Si el parámetro p es negativo, la ecuación determina una parábola abierta hacia abajo.

Si la directriz es una recta vertical de la forma $x = -p$, la parábola sería horizontal y su ecuación sería:

$$x = \frac{1}{4p}y^2$$

Ejemplo 1

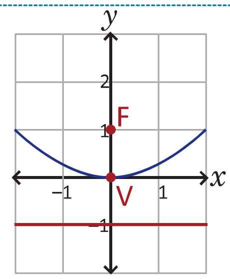
Determina la ecuación de la parábola con foco F(0, −3) y directriz $y = 3$.

El valor de $p = -3$, entonces la ecuación de la parábola es $y = \frac{1}{4(-3)}x^2$, simplificando queda: $y = -\frac{1}{12}x^2$.

Por lo tanto, la ecuación es $y = -\frac{1}{12}x^2$, y es una parábola abierta hacia abajo.

Ejemplo 2

Determina el foco, la directriz y el vértice de la parábola $y = \frac{1}{4}x^2$, luego localiza cada uno en el plano cartesiano y grafica la parábola.



Se tiene que $\frac{1}{4} = \frac{1}{4p}$, es decir, $p = 1$.

Foco: F(0, 1) Directriz: $y = -1$ Vértice: V(0, 0)

Problemas

1. Deduce la ecuación y grafica la parábola con el foco y la directriz indicada en cada literal.

   a) F(0, 2), $y = -2$ b) F(0, −1), $y = 1$ c) F$\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $y = -\frac{1}{8}$ d) F$\left(0, -\frac{1}{16}\right)$, $y = \frac{1}{16}$ e) F(2, 0), $x = -2$

2. Determina las coordenadas del foco, el vértice y la ecuación de la directriz, luego localízalos en el plano cartesiano y grafica la parábola.

   a) $y = 2x^2$ b) $y = -x^2$ c) $y = \frac{1}{8}x^2$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2$ e) $x = 2y^2$

Unidad 3

1.5 Desplazamientos paralelos

Problema inicial

Aplica desplazamientos verticales y horizontales para graficar el lugar geométrico que determina la ecuación $y = (x - 2)^2 + 1$ en el plano cartesiano. Determina las coordenadas del foco, el vértice y la ecuación de la directriz.

La gráfica de la función $f(x - h) + k$, es la gráfica de la función $f(x)$ desplazada h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba.

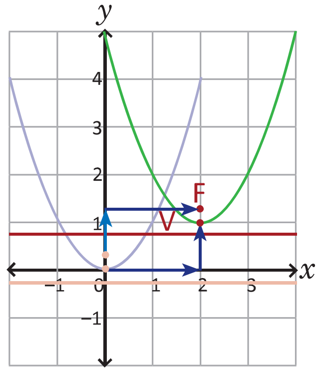
Solución

La gráfica de la función $y = (x - 2)^2 + 1$, es la gráfica de la función $y = x^2$ desplazada 2 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba.

Determinando p de $y = x^2$: $1 = \frac{1}{4p}$, solucionando, $p = \frac{1}{4}$.

Además las coordenadas del vértice, el foco y la ecuación de la directriz se desplazan de igual manera.

Ecuación	$y = x^2$	$y = (x - 2)^2 + 1$
Foco	$F\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$F\left(0 + 2, \frac{1}{4} + 1\right) = F\left(2, \frac{5}{4}\right)$
Vértice	V(0, 0)	V(0 + 2, 0 + 1) = V(2, 1)
Directriz	$y = -\frac{1}{4}$	$y = \frac{3}{4}$



En general

Para desplazar una gráfica horizontalmente h unidades, se cambia la variable x por la expresión $x - h$; y para desplazar una gráfica verticalmente k unidades se cambia la variable y por la expresión $y - k$.

Entonces la ecuación de una parábola de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente es: $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$.

En una parábola desplazada con ecuación $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$, se cumple que: $V(h, k)$ $F(h, p + k)$ Directriz: $y = -p + k$

Ejemplo

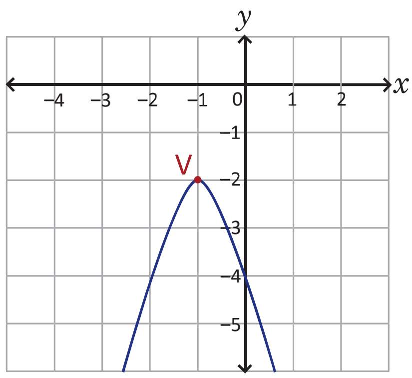
a) Determina la ecuación que resulta al desplazar la parábola $y = 2x^2$, –3 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente.

Sustituyendo x por la expresión $x - (-3)$, y por la expresión $y - 1$:

$$y - 1 = 2(x + 3)^2, \text{ o bien } y = 2(x + 3)^2 + 1$$

b) Grafica la parábola determinada por la ecuación $y + 2 = -2(x + 1)^2$.

Es la ecuación de la parábola $y = -2x^2$ desplazada –1 unidad horizontalmente y –2 unidades verticalmente, como muestra la figura.



Problemas

1. Determina la ecuación de la parábola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, en cada literal.

a) $y = x^2$, $h = 3$, $k = 2$ b) $y = 3x^2$, $h = -1$, $k = 3$ c) $y = -x^2$, $h = 1$, $k = -1$

d) $y = -2x^2$, $h = -2$, $k = -1$ e) $y = 2x^2$, $h = 0$, $k = 3$ f) $y = -3x^2$, $h = -2$, $k = 0$

2. Grafica en el plano cartesiano la parábola determinada por las siguientes ecuaciones. Luego determina las coordenadas del foco, el vértice y la ecuación de la directriz de cada una.

a) $y - 1 = (x - 4)^2$ b) $y + 2 = 2(x - 3)^2$ c) $y - 3 = -(x + 1)^2$ d) $y + 1 = -2(x + 1)^2$

1.6 Procedimiento para completar cuadrados perfectos

Problema inicial

Escribe el polinomio $x^2 + 4x$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

Solución

Para completar el cuadrado perfecto en la expresión se suma y resta la misma cantidad para no alterar la expresión:

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$= (x^2 + 4x + 2^2) - 4$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

Por lo tanto, $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$.

En el desarrollo del cuadrado de un binomio se cumple que:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

El término a^2 puede obtenerse al dividir el coeficiente que acompaña a "x" entre 2 y elevarlo al cuadrado.

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$$

Unidad 3

Conclusión

El método en el cual se suma y resta una cantidad adecuada para que una expresión se convierta en cuadrado perfecto se conoce como **completar cuadrados perfectos**, y es una estrategia muy útil para la resolución de problemas en matemática.

Ejemplo

Completa cuadrados perfectos en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^2 - 8x$ b) $x^2 - 4x + 2$ c) $2x^2 + 12x + 10$ d) $-3x^2 + 12x - 13$

a) $x^2 - 8x = (x^2 - 8x + 4^2) - 4^2$
$= (x - 4)^2 - 16$

b) $x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 2$
$= (x - 2)^2 - 4 + 2$
$= (x - 2)^2 - 2$

c) $2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x) + 10$
$= 2(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2) + 10$
$= 2[(x + 3)^2 - 9] + 10$
$= 2(x + 3)^2 - 18 + 10$
$= 2(x + 3)^2 - 8$

d) $-3x^2 + 12x - 13 = -3(x^2 - 4x) - 13$
$= -3(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 13$
$= -3[(x - 2)^2 - 4] - 13$
$= -3(x - 2)^2 + 12 - 13$
$= -3(x - 2)^2 - 1$

Problemas

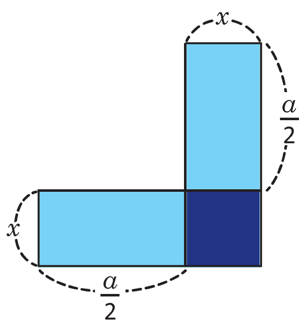
1. Completa cuadrados perfectos en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^2 + 2x$ b) $x^2 + 6x$ c) $x^2 + 8x$ d) $x^2 - 4x$ e) $x^2 + 10x + 15$
f) $x^2 - 2x - 1$ g) $2x^2 + 8x + 6$ h) $3x^2 - 6x - 2$ i) $-x^2 - 4x - 4$ j) $-2x^2 + 8x + 3$

2. Utilizando la figura de la derecha:

a) Determina cuánto es el área de la figura mostrada.

b) Determina el área del rectángulo que debe agregarse para formar un cuadrado.

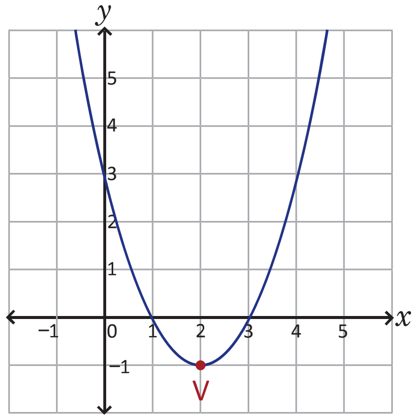


1.7 Ecuación general de la parábola

Problema inicial

Grafica el lugar geométrico determinado por la ecuación $-x^2 + 4x - 3 + y = 0$.

Solución



Despejando y y completando cuadrados perfectos para x.

$$y = x^2 - 4x + 3$$
$$y = (x^2 - 4x + 2^2) - 2^2 + 3$$
$$y = (x - 2)^2 - 4 + 3$$
$$y = (x - 2)^2 - 1$$

Expresando de otra manera: $y - (-1) = (x - 2)^2$.

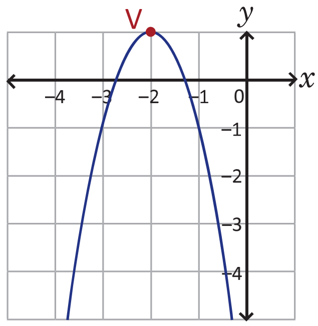
Por lo tanto la ecuación $y - x^2 + 4x - 3 = 0$ es la gráfica de la parábola $y = x^2$ desplazada 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo.

Conclusión

Una parábola puede ser representada desarrollando los cuadrados perfectos de la ecuación $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ y dejando la ecuación igualada a 0.

En general, para determinar los desplazamientos verticales y horizontales en una ecuación de la forma $ax^2 + bx + cy + d = 0$, se completan cuadrados perfectos y se expresa en la forma $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$. A la ecuación de la forma $ax^2 + bx + cy + d = 0$ se le llama **ecuación general de la parábola**.

Ejemplo



Grafica la parábola determinada por la ecuación $2x^2 + 8x + 7 + y = 0$. Determina las coordenadas del vértice, el foco y la directriz.

Despejando y y completando cuadrados perfectos para x.

$$y = -2x^2 - 8x - 7$$
$$y = -2(x^2 + 4x) - 7$$
$$y = -2(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2) - 7$$
$$y = -2(x + 2)^2 + 8 - 7$$
$$y = -2(x + 2)^2 + 1$$

Por lo tanto, es la parábola $y = -2x^2$ desplazada 2 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia arriba.

Determinando p: $-2 = \frac{1}{4p}$, solucionando, $p = -\frac{1}{8}$.

Entonces:

Ecuación	$y = -2x^2$	$y = -2(x + 2)^2 + 1$
Foco	$F\left(0, -\frac{1}{8}\right)$	$F\left(-2, \frac{7}{8}\right)$
Vértice	V (0, 0)	V (−2, 1)
Directriz	$y = \frac{1}{8}$	$y = \frac{9}{8}$

Problemas

Para cada literal determina el vértice y grafica la parábola correspondiente.

a) $x^2 + 2x + 2 - y = 0$ b) $x^2 - 4x + 3 - y = 0$ c) $x^2 + 4x + 5 + y = 0$ d) $-x^2 + 2x + 1 - y = 0$

e) $-2x^2 - 12x - 20 + y = 0$ f) $2x^2 - 8x + 5 + y = 0$ g) $3x^2 - 6x + 5 + y = 0$ h) $3x^2 + 6x + y + 6 = 0$

1.8 Líneas rectas y parábolas

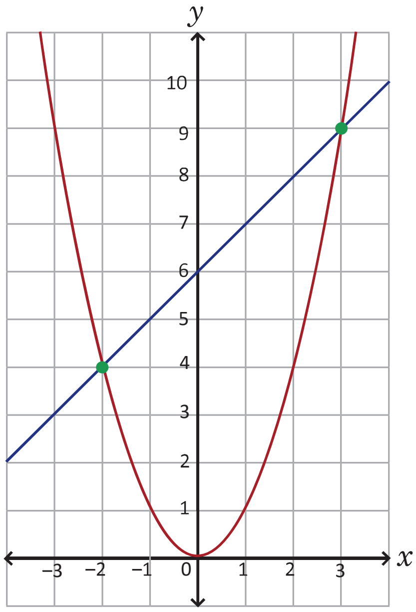
Problema inicial

Determina las coordenadas de los puntos de intersección entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 6$.

Solución

Si un punto está en la intersección de las dos gráficas, dicho punto debe cumplir tanto la ecuación de la recta como la ecuación de la parábola. Así, determinar los puntos de intersección equivale a encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 & \text{----------} \ (1) \\ y = x + 6 & \text{----------} \ (2) \end{cases}$$



Utilizando el método de sustitución y solucionando:

$$\begin{aligned} x^2 &= x + 6 && \text{igualando a cero,} \\ x^2 - x - 6 &= 0 && \text{factorizando,} \\ (x - 3)(x + 2) &= 0 && \text{solucionando la ecuación cuadrática,} \\ x = 3 &\text{ o } x = -2. \end{aligned}$$

Determinando el valor de y para cada valor de x:

Si $x = 3$, entonces: $y = 3 + 6 = 9$.

Si $x = -2$, entonces: $y = -2 + 6 = 4$.

Por lo tanto, los puntos de intersección son (3, 9) y (–2, 4).

Conclusión

Las coordenadas de los puntos de intersección entre una parábola y una línea recta, corresponden a las soluciones del sistema formado por sus ecuaciones.

Al resolver el sistema pueden tenerse 3 casos:

1. La recta corta a la parábola en 2 puntos diferentes (es secante).
2. La recta corta a la parábola en 1 punto (es tangente o vertical).
3. La recta no corta a la parábola.

Problemas

Determina los puntos de intersección entre la parábola y la línea recta de cada literal. Realiza la gráfica en el plano cartesiano.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 5x - 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x - 1 \end{cases}$

Unidad 3

1.9 Determinación de parámetros

Problema inicial

Determina el valor de m en la recta $y = 4x + m$, para que esta sea tangente a la parábola $y = x^2$.

Solución

Para determinar los puntos de intersección se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 & \text{---------- (1)} \\ y = 4x + m & \text{---------- (2)} \end{cases}$$

Para que $x^2 + 2ax + b$ sea cuadrado perfecto se debe cumplir:

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = b$$

Porque: $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

O bien en el discriminante de $ax^2 + bx + c$: $b^2 - 4ac = 0$.

Resolviendo:

$$x^2 = 4x + m$$
$$x^2 - 4x - m = 0$$

Para que la recta toque en un punto a la parábola, la ecuación cuadrática $x^2 - 4x - m = 0$ debería tener solamente una solución, para ello, la expresión $x^2 - 4x - m$ debería ser un cuadrado perfecto.

Forma 1

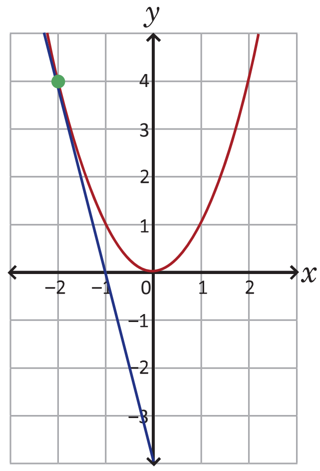
Utilizando la forma del cuadrado perfecto:

$$-m = \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$m = -4$$

Forma 2

Analizando el discriminante de la ecuación cuadrática:

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(-4)^2 - 4(1)(-m) = 0$$
$$16 = -4m$$
$$m = -4$$



Por lo tanto, el valor de m para que la recta $y = 4x + m$ sea tangente a la parábola $y = x^2$ es $m = -4$.

Conclusión

La constante cuyo valor se desconoce, y se adecúa para que la figura cumpla ciertas condiciones se conoce como **parámetro**.

Para determinar el parámetro en una ecuación de recta para que esta sea tangente a una parábola, es necesario aplicar el análisis del discriminante o bien la forma del desarrollo de un cuadrado perfecto, de modo que la ecuación cuadrática tenga una sola solución.

Problemas

Determina el valor (o valores) del parámetro p en cada ecuación, para que la recta sea tangente a la parábola respectiva.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 6x - p \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 2x + p \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -x^2 - 3x \\ y = -x - p \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x^2 - 3x - 5 \\ y = 3x + p \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 4x - p \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = -3x^2 + 2x - 3 \\ y = -10x + p \end{cases}$

g) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = px - 4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y = -x^2 \\ y = px + 16 \end{cases}$

1.10 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación y grafica la parábola con el foco y la directriz indicada en cada literal.

   a) F(0, –2), $y = 2$ b) $F\left(0, \frac{1}{12}\right)$, $y = -\frac{1}{12}$

2. Determina la ecuación de la parábola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, en cada literal.

   a) $y = 4x^2$, $h = -2$, $k = 4$ b) $y = -2x^2$, $h = -3$, $k = -3$

3. Completa cuadrados perfectos en las siguientes expresiones algebraicas.

   a) $x^2 - 10x$ b) $x^2 - 4x - 9$ c) $-3x^2 + 6x - 2$

4. Grafica las siguientes parábolas en el plano cartesiano.

   a) $y = -2x^2$ b) $y - 1 = -(x + 2)^2$ c) $2x^2 + 4x - y = 0$

5. Determina las coordenadas del vértice, el foco y la directriz de cada parábola.

   a) $y = \frac{1}{8}x^2$ b) $y + 3 = 2(x + 5)^2$ c) $3x^2 - 12x + 7 - y = 0$

6. Determina los puntos de intersección entre la parábola y la recta de cada literal. Grafica en el plano cartesiano.

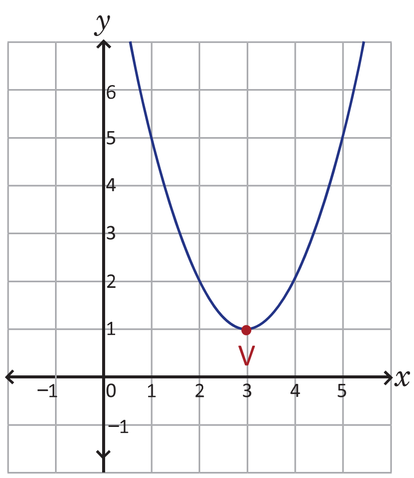
   a) $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \\ y = -3x - 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x^2 \\ x = -2 \end{cases}$

7. Determina el valor (o valores) del parámetro p en cada ecuación, para que la recta sea tangente a la parábola respectiva.

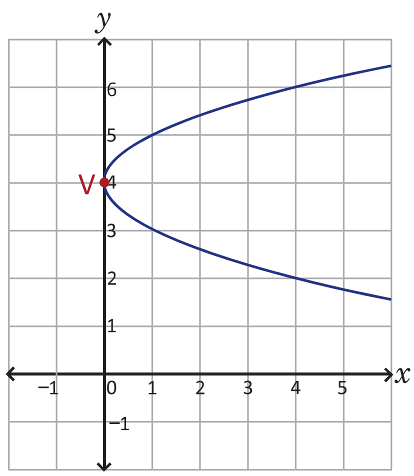
   a) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x + p \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -9x^2 - 6x - 2 \\ y = 6x + p \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = px - 1 \end{cases}$

8. Determina la ecuación que corresponde a la gráfica de cada literal.

   a)



   b)

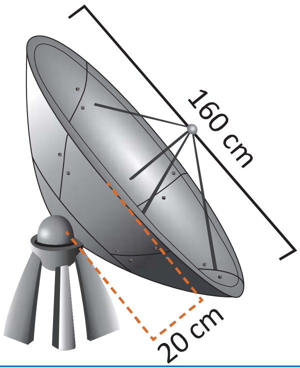


Unidad 3

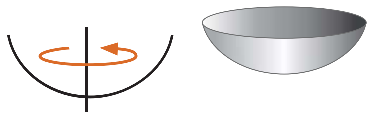
1.11 Aplicaciones de la parábola*

Problema inicial

Una antena parabólica de un canal de televisión de cultura de El Salvador tiene 160 centímetros de diámetro y una altura de 20 centímetros, si se desea reparar el foco de la antena que se dañó con la lluvia, ¿a qué distancia del centro del disco debe colocarse el nuevo foco de la antena parabólica?

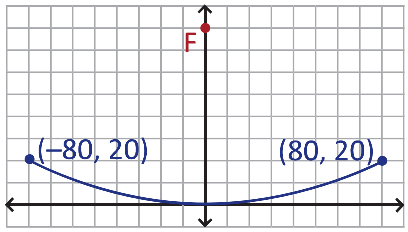


Una forma parabólica es un cuerpo geométrico, y resulta de girar una parábola alrededor de su eje.



Solución

Modelando la situación en el plano cartesiano, por conveniencia se puede utilizar una parábola de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$.



Entonces, como la parábola tiene ancho de 160 cm, se puede considerar la distancia desde el punto –80 hasta el punto 80 sobre el eje x.

Y dado que la altura es 20 cm, se puede considerar la distancia desde el punto 0 hasta el punto 20 sobre el eje y.

Entonces, la ecuación de la parábola es de la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$ y pasa por los puntos (–80, 20) y (80, 20).

Para determinar p, se puede sustituir el punto (80, 20) en la ecuación, así:

$$20 = \frac{1}{4p}80^2 \quad \text{Resolviendo la ecuación.}$$

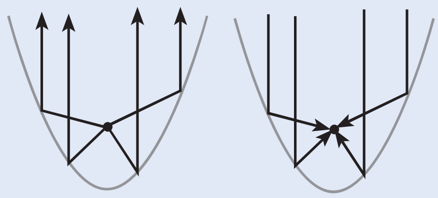
$$p = \frac{80^2}{80} = 80$$

Luego, las coordenadas del foco son F(0, 80).

Por lo tanto, el nuevo foco de la antena parabólica debe estar a 80 cm de distancia del vértice.

Conclusión

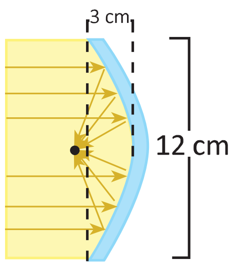
En una parábola, el foco cumple una propiedad reflectora importante: tomando cualquier línea desde el foco, esta será reflejada en una misma dirección, y también al recibir una línea paralela al eje, esta será reflejada hacia el foco. Esto vuelve a la parábola muy útil para su aplicación a objetos de la vida cotidiana, como la antena parabólica.



Problemas

1. Una antena parabólica que emite señal de internet tiene desperfectos, su foco no irradia correctamente la señal, al cambiarlo es necesario saber a qué distancia del centro del disco estaba. Determina dicha distancia si se sabe que el diámetro del disco es de 1 metro y su altura es de 0.5 metros.

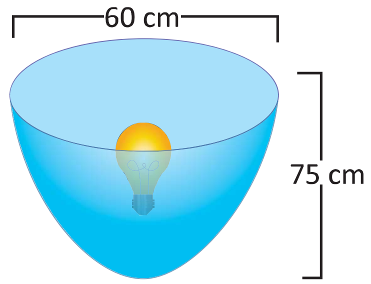
2. Un espejo para un telescopio reflector tiene la forma parabólica de 12 cm de diámetro y 3 cm de profundidad, ¿a qué distancia del centro del espejo se concentrará la luz entrante?



1.12 Practica lo aprendido

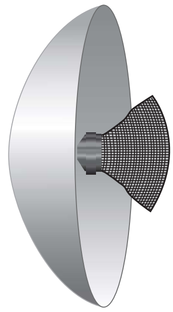
Resuelve los siguientes problemas de aplicación de parábola. Modela cada situación en el plano cartesiano.

1. En la escuela de María hay un problema de iluminación por las noches, y para mejorar la situación, María planea construir una lámpara parabólica móvil para el vigilante. Para ello cuenta con un recipiente parabólico de 60 centímetros de diámetro y 75 centímetros de altura. ¿A qué distancia del centro del disco debe colocar María el foco para que refleje la luz en una sola dirección?

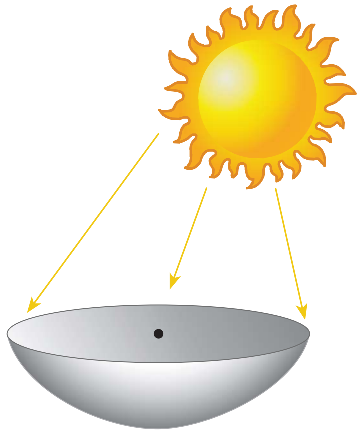


2. El reflector de un proyector tiene forma parabólica, con la fuente de luz en el foco. Si el reflector mide 12 centímetros de diámetro y 8 centímetros de profundidad, ¿a qué distancia del vértice está el foco?

3. En la comunidad de Antonio se quiere instalar un sistema de alarmas, en caso de cualquier emergencia. Antonio debe construir algunos parlantes parabólicos, si el recipiente parabólico tiene 24 cm de diámetro y 9 cm de profundidad, ¿dónde debe ser colocada la bocina para que emita el sonido en la misma dirección?



4. José va de viaje de campo con su familia al Parque Nacional Montecristo, ya que no desea contaminar, evita utilizar leña para cocinar, en cambio, lleva un recipiente parabólico de metal, de modo que refleje los rayos solares en un punto fijo (el foco). Determina a qué distancia del vértice del recipiente debe colocar José la parrilla para cocinar, si este tiene 1 metro de diámetro y 0.25 metros de altura.



5. Un plato receptor de sonido, que se emplea en eventos sobre la equidad de género, está construido en forma parabólica con su foco a 12 cm del vértice, si en uno de estos eventos se dañó el plato y en los repuestos tienen de todas alturas pero de anchura solo hay de 8 cm, ¿de qué altura debe ser el recipiente parabólico para que el plato receptor de sonido funcione idóneamente?

Unidad 3

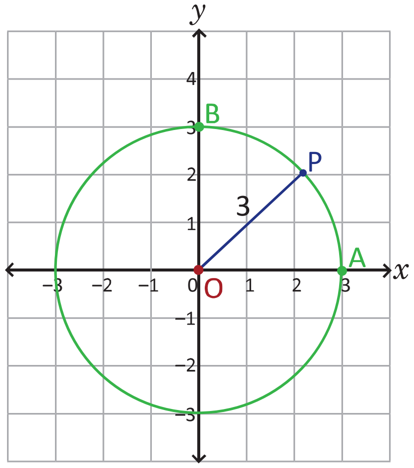
2.1 La circunferencia

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al origen O(0, 0) es igual a 3.

Solución

Se identifican en particular los puntos A(3, 0), B(0, 3) que cumplen la condición.



Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.

$$d(\text{P, O}) = 3$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Por lo tanto, la ecuación que determina el lugar geométrico es:

$$x^2 + y^2 = 3^2.$$

Definición

El lugar geométrico de los puntos cuya distancia r a un punto fijo llamado **centro** se mantiene constante se conoce como **circunferencia**.

La ecuación que determina la gráfica de una circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano y con radio r está dada por: $x^2 + y^2 = r^2$.

Ejemplo 1

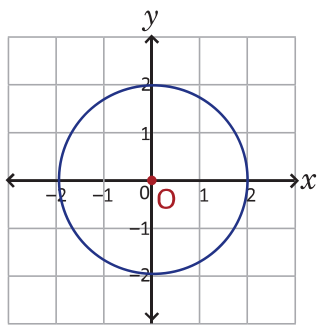
Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y de radio 4.

La ecuación es, $x^2 + y^2 = 4^2$ o bien, expresado de otra manera, $x^2 + y^2 = 16$.

Ejemplo 2

Grafica en el plano cartesiano la figura (o lugar geométrico) determinada por la ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Expresando la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ como $x^2 + y^2 = 2^2$, es una circunferencia con centro en el origen y radio 2.



Problemas

1. Deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el origen con el radio dado en cada literal.

a) $r = 1$ b) $r = 6$ c) $r = \frac{1}{2}$ d) $r = \frac{1}{3}$ e) $r = \sqrt{5}$

2. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $x^2 + y^2 = 100$ c) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ d) $x^2 + y^2 = 3$

2.2. Desplazamientos paralelos de la circunferencia*

Problema inicial

Deduce la ecuación de una circunferencia con centro en el punto C(2, 3) y radio 1.

Solución 1

Tomando en general los puntos P(x, y) que cumplen la condición y utilizando la distancia entre un punto P y el punto C(2, 3).

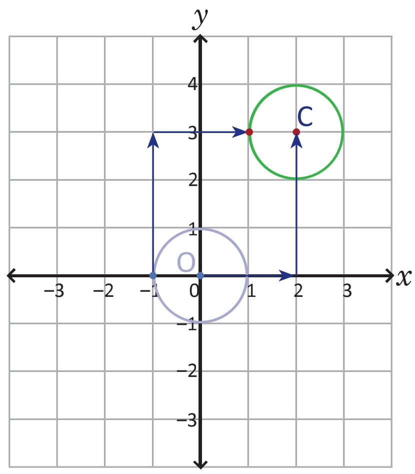
$$d(\text{P}, \text{C}) = 1$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 1 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1.$$

Solución 2

Tomando la ecuación de la circunferencia de radio 1, con centro en el origen, $x^2 + y^2 = 1$.



Entonces, la circunferencia de radio 1 y centro C(2, 3) resulta de desplazar la circunferencia con centro en el origen, 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba (como lo muestra la figura).

La ecuación de la circunferencia desplazada 2 unidades a la derecha es: $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Ahora, la ecuación de la circunferencia desplazada 3 unidades hacia arriba es: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C(2, 3) y radio 1 es: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Conclusión

La ecuación que determina la gráfica de una circunferencia con centro C(h, k) y radio r está dada por:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

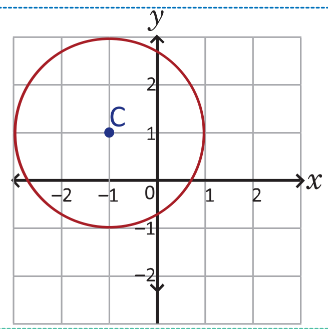
Ejemplo 1

Determina la ecuación de la circunferencia con centro C(2, −1) y radio 2.
La ecuación es, $(x-2)^2 + [y-(-1)]^2 = 2^2$ o bien, expresado de otra manera, $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Ejemplo 2

Grafica en el plano cartesiano la figura (o lugar geométrico) determinado por la ecuación: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

Expresando la ecuación $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ como $[x-(-1)]^2 + (y-1)^2 = 2^2$, es una circunferencia con centro C(−1, 1) y radio 2.



Problemas

1. Para cada literal deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C y radio r.

   a) C(4, 1), $r = 3$ b) C(−2, 5), $r = 2$ c) C(3, −4), $r = \frac{2}{3}$ d) C(−2, −2), $r = \sqrt{6}$

2. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

   a) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ b) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$ c) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = \frac{25}{4}$ d) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$

Unidad 3

2.3 Ecuación general de la circunferencia

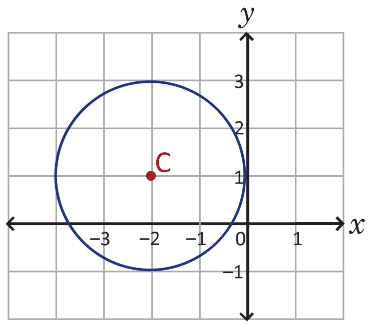
Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

Solución

Completando cuadrados para expresar la ecuación en la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 &= 0 && \text{reordenando y agrupando,}\\
(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + 1 &= 0 && \text{completando cuadrados,}\\
(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + 1 &= 0 && \text{simplificando,}\\
(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 + 1 &= 0 && \text{transponiendo,}\\
(x + 2)^2 + (y - 1)^2 &= 4 && \text{expresado de otra manera,}\\
(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 &= 2^2.
\end{aligned}$$



Por lo tanto la figura determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ es una circunferencia con centro C(–2, 1) y radio 2.

Conclusión

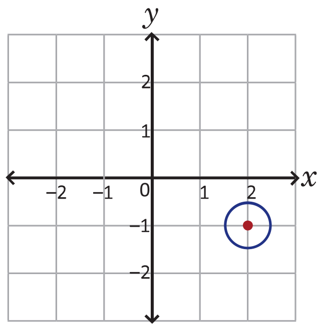
Una circunferencia puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y dejando la ecuación igualada a 0.

En general, para determinar el centro y el radio de una circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, se expresa en la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. A la ecuación de la forma $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$ se le llama **ecuación general de la circunferencia.**

Ejemplo

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 19 = 0$.

$$\begin{aligned}
4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 19 &= 0 && \text{dividiendo por 4 cada miembro,}\\
x^2 - 4x + y^2 + 2y + \frac{19}{4} &= 0 && \text{completando cuadrados,}\\
(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 + \frac{19}{4} &= 0 && \text{simplificando y transponiendo,}\\
(x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= \frac{1}{4} && \text{expresado de otra manera,}\\
(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$



Es una circunferencia con centro C(2, –1) y radio $\frac{1}{2}$.

Problemas

En las siguientes ecuaciones, determina el centro y el radio de las circunferencias. Grafica en el plano cartesiano la figura que corresponde a cada ecuación.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$

f) $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$

g) $4x^2 + 4y^2 - 32x - 16y + 71 = 0$

h) $9x^2 + 9y^2 + 54x + 18y + 74 = 0$

2.4 Recta tangente a una circunferencia*

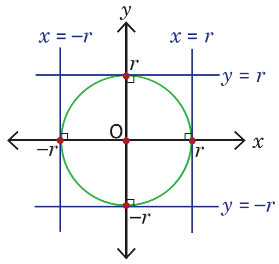
Problema inicial

Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto P(x_1, y_1) está dada por: $x_1 x + y_1 y = r^2$.

Solución

El punto P(x_1 , y_1) satisface la ecuación $x_1^{\,2} + y_1^{\,2} = r^2$.

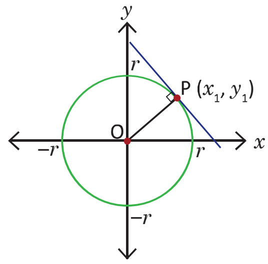
Si $x_1 = 0$, entonces $y_1 = r$ o $y_1 = -r$. La recta tangente es: $y = r$ o $y = -r$ y se cumple que: $y_1 y = r^2$.



Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente está dada por: $x_1x + y_1y = r^2$.

Si $y_1 = 0$, se procede análogamente.

Si $x_1 \neq 0$ y $y_1 \neq 0$, el radio $\overline{\text{OP}}$ es perpendicular a la tangente en el punto P, además la pendiente de $\overline{\text{OP}}$ es $\frac{y_1}{x_1}$, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es: $m = -\frac{x_1}{y_1}$.



Aplicando la ecuación punto-pendiente con m y P:

$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$ multiplicando por y_1 y simplificando: $x_1x + y_1y = x_1^{\,2} + y_1^{\,2} = r^2$.

Por lo tanto, la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto P(x_1, y_1) está dada por la ecuación:

$$x_1x + y_1y = r^2$$

Conclusión

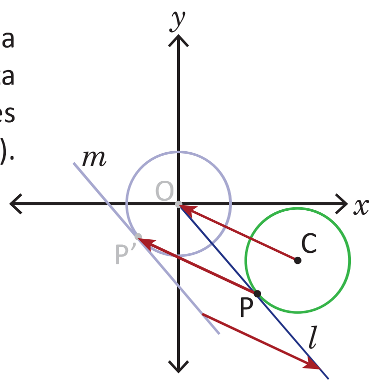
La ecuación de la tangente en el punto (x_1, y_1) de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ es $x_1x + y_1y = r^2$. Por ejemplo, para determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ en el punto P(–1, 1), se puede hacer de la siguiente manera:

$$-1x + 1y = 2, \text{ o bien } x - y + 2 = 0.$$

Ejemplo

Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ en el punto P(2, –4).

La circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ desplazada 4 unidades a la derecha y 3 hacia abajo, entonces se puede calcular la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ pero en el punto P desplazado 4 unidades a la izquierda y 3 hacia arriba, es decir, en el punto P’(2 – 4, –4 + 3) = P’(–2, –1).



Ahora aplicando el resultado del Problema inicial, la recta tangente m será:

$$-2x + (-1)y = 5, \text{ o bien } 2x + y + 5 = 0.$$

Y desplazando la recta 4 unidades a la derecha y 3 hacia abajo:

$$2(x - 4) + (y + 3) + 5 = 0, \text{ o bien } 2x + y = 0.$$

Por lo tanto, la recta tangente l a la circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ en el punto P(2, –4) es: $2x + y = 0$.

Problemas

Para cada literal determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P.

a) $x^2 + y^2 = 25$, P(–3, 4)
b) $x^2 + y^2 = 5$, P(1, 2)
c) $x^2 + y^2 = 13$, P(2, –3)
d) $x^2 + y^2 = 10$, P(3, –1)
e) $x^2 + y^2 = 1$, P(–1, 0)
f) $x^2 + y^2 = 9$, P(0, –3)
g) $x^2 + (y - 4)^2 = 2$, P(–1, 3)
h) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$, P(–1, –1)
i) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$, P(3, 1)

2.5 Rectas secantes a una circunferencia

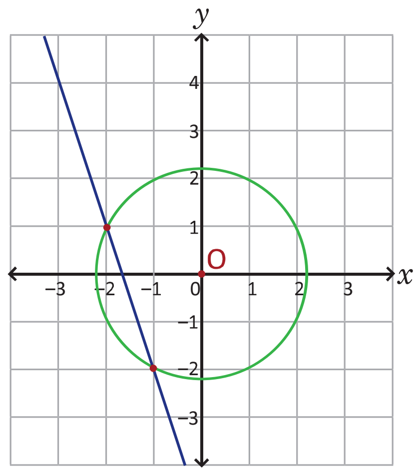
Problema inicial

Determina los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ con la recta $3x + y + 5 = 0$.

Solución

La intersección es un punto que está en la recta y también en la circunferencia, entonces encontrar los puntos de intersección entre una circunferencia y una recta equivale a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \text{----------} \ (1) \\ 3x + y + 5 = 0 & \text{----------} \ (2) \end{cases}$$



Utilizando el método de sustitución, despejando y en la ecuación (2).

$$y = -3x - 5$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y resolviendo:

$$x^2 + (-3x - 5)^2 = 5$$
$$x^2 + 9x^2 + 30x + 25 - 5 = 0$$
$$10x^2 + 30x + 20 = 0$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x + 1)(x + 2) = 0$$
$$x = -1 \text{ o } x = -2$$

Entonces las coordenadas en x de los puntos donde se intersecan la recta $y + 3x + 5 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ son $x = -1$ y $x = -2$, y la coordenada en y puede determinarse sustituyendo cada valor de x en la ecuación (2):

Si $x = -1$, entonces $y = -3(-1) - 5 = 3 - 5 = -2$

Si $x = -2$, entonces $y = -3(-2) - 5 = 6 - 5 = 1$

Por lo tanto, los puntos de intersección son: $(-1, -2)$ y $(-2, 1)$.

Conclusión

Para determinar los puntos de intersección entre una recta y una circunferencia, se resuelve el sistema de ecuaciones, una lineal y otra cuadrática, utilizando el método de sustitución.

Si el sistema tiene dos soluciones reales, significa que la recta es secante a la circunferencia.
Si el sistema tiene una solución real, la recta es tangente a la circunferencia.
Si el sistema no tiene solución real, significa que la recta no corta a la circunferencia.

El valor de y de los puntos (o punto) de intersección se determinan sustituyendo en alguna ecuación los valores de las soluciones al sistema de ecuaciones que se resuelve.

Problemas

Determina los puntos de intersección de las gráficas determinadas por las ecuaciones de cada literal.

a) $x^2 + y^2 = 1$; $x + y = 0$
b) $x^2 + y^2 = 25$; $x + y - 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 = 5$; $-x + y + 1 = 0$
d) $x^2 + y^2 = 13$; $x + 5y - 13 = 0$
e) $x^2 + y^2 = 10$; $x - 2y - 5 = 0$
f) $x^2 + y^2 = 17$; $3x + 5y - 17 = 0$

2.6 Practica lo aprendido

1. Para cada literal deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y el radio indicado.

   a) $r = 2$

   b) $r = \sqrt{7}$

2. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2 + y^2 = 16$

   b) $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

3. Deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C y el radio r de cada literal.

   a) C $(3, -2)$, $r = 10$

   b) C $(4, -3)$, $r = \frac{2}{3}$

4. Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por las siguientes ecuaciones.

   a) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$

   b) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{4}$

5. En las siguientes ecuaciones, determina el centro y el radio de las circunferencias. Grafica en el plano cartesiano la figura que corresponde a cada ecuación.

   a) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$

   b) $4x^2 + 4y^2 + 24x + 16y + 27 = 0$

6. Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P de cada literal.

   a) $x^2 + y^2 = 10$, P$(-3, 1)$

   b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$, P$(0, -4)$

7. Determina los puntos de intersección de las gráficas determinadas por las ecuaciones de cada literal.

   a) $x^2 + y^2 = 8$; $x - y = 0$

   b) $x^2 + y^2 = 20$; $3x - y - 10 = 0$

8. Determina la ecuación de la recta (o rectas) tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 10$ cuya pendiente es -3.

9. Determina la ecuación de la recta (o rectas) tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ que pasan por el punto P$(2, 0)$.

   Puedes graficar para comprender mejor la situación.

10. Demuestra que la tangente en el punto P(x_1, y_1) de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es:
    $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$.

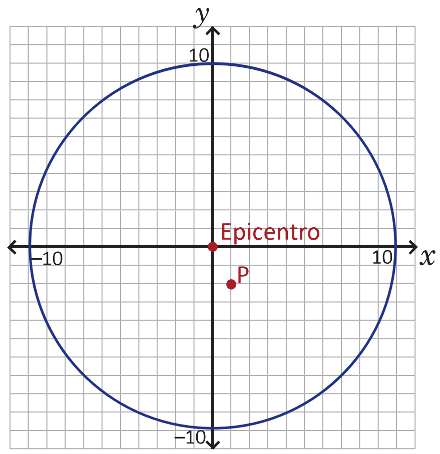
2.7 Aplicaciones de la circunferencia*

Problema inicial

El epicentro de un terremoto en El Salvador fue la ciudad de San Salvador, específicamente el parque Bicentenario de esta ciudad; el terremoto afectó a todos los lugares a 10 km a la redonda. Si la ciudad de Antiguo Cuscatlán se ubica a 1 km hacia el oriente y 2 km hacia el sur del epicentro, entonces ¿fue afectada por dicho terremoto?

Solución

Representando la situación en el plano cartesiano y ubicando el epicentro en el origen del plano cartesiano.



Dado que el terremoto tuvo un alcance de 10 km a la redonda, se puede modelar con la ecuación de la circunferencia con centro en el origen (epicentro) y radio 10, así:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Ubicando Antiguo Cuscatlán en el punto P(1, –2).

Con el gráfico se puede observar que si el punto está dentro de la circunferencia entonces es afectado por el terremoto, y si está fuera no.

Analizando en la ecuación, si se sustituye el valor de x y de y del punto P se tiene:

$$1^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$$

El resultado es menor que 100 ($5 < 100$), si el punto fuera igual a 100 estaría en la circunferencia, y si fuera mayor que 100 entonces estaría fuera de la circunferencia.

Por lo tanto, Antiguo Cuscatlán sí fue afectado por el terremoto con epicentro en el parque Bicentenario.

Conclusión

Es posible resolver algunos problemas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones de circunferencias, para ello es necesario modelar la situación en el plano cartesiano, a partir de ello se puede interpretar la información y dar solución a la situación.

Problemas

1. El epicentro de un terremoto en El Salvador fue la ciudad de San Salvador, específicamente el parque Bicentenario de esta ciudad; el terremoto afectó a todos los lugares a 10 km a la redonda. Si el volcán del Boquerón se ubica a 7 km hacia el poniente y 8 km hacia el norte del epicentro, entonces ¿fue afectado por dicho terremoto?

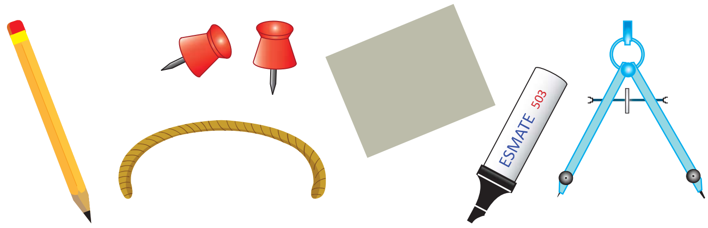
2. Una avioneta de fumigación vuela en círculos, y alcanza a fumigar hasta 13 m a la redonda, considerando como centro la casa de un campesino. El terreno tiene 30 metros de largo por 20 metros de ancho, y la casa del campesino se encuentra justo al centro del terreno. Determina si las plantaciones de frijol ubicadas a 11 metros al poniente de la casa y 5 metros al sur, llegan a ser fumigadas por la avioneta.

3. En las fiestas patronales de San Salvador se coloca el juego mecánico conocido como “la voladora”. Si esta rueda apagada cubre un radio de 2 metros y los asientos cuelgan de cadenas de 1 metro de longitud, determina si al ubicar la caseta de control a un metro al oriente y 3 metros al sur del centro de “la voladora”, dicha caseta no será impactada por la máquina al encenderse.

3.1 Actividad introductoria

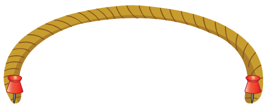
Materiales

- 2 tachuelas
- Trozo de cuerda
- Lapicero
- Hoja de papel vegetal
- Compás
- Plumón

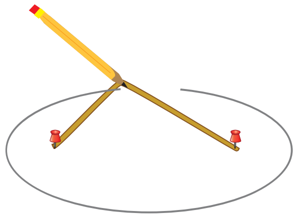


Actividad 1

1. Asegura los extremos de la cuerda con las tachuelas sobre una superficie adecuada.

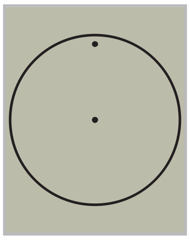


2. Toma la cuerda con la punta del lapicero hasta tensarla, desliza el lapicero manteniendo la cuerda tensada hasta llegar al punto donde iniciaste.

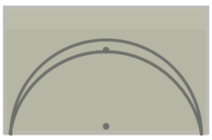


Actividad 2

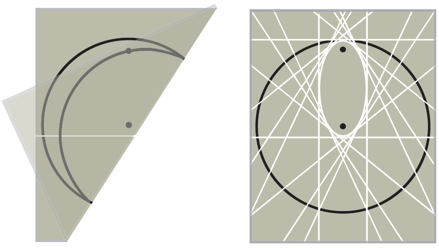
1. Dibuja una circunferencia lo más grande posible sobre el papel vegetal. Y coloca un punto adentro de dicha circunferencia.



2. Dobla el papel de modo que el punto dibujado quede exactamente sobre un punto de la circunferencia.



3. Realiza el mismo proceso con puntos cercanos en la circunferencia hasta llegar al punto donde se inició. Analiza la figura formada.



Definición

La figura que queda marcada en ambas actividades es una **elipse**. Observa que cada punto de ella cumple la condición de que la suma de la distancia de un punto a dos puntos fijos se mantiene constante.

Preguntas

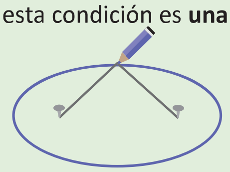
1. ¿Cuánto mide la suma de las distancias de un punto de la figura dibujada a cada tachuela?
2. ¿Cómo es la suma de la distancia de un punto a las dos tachuelas respecto de la longitud de la cuerda?
3. ¿Qué sucede si en la Actividad 2 el punto está sobre la circunferencia?
4. ¿Qué sucede si en la Actividad 2 el punto es el centro de la circunferencia?

3.2 La elipse*

Problema inicial

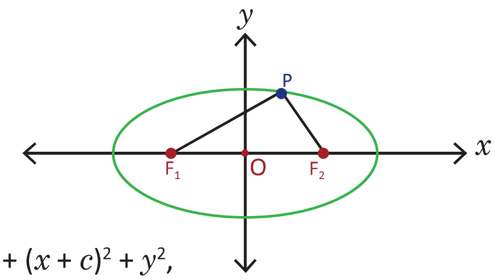
Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que cumplen que su distancia a un punto fijo $F_1(-c, 0)$ sumada con la distancia a otro punto fijo $F_2(c, 0)$ es siempre igual a $2a$, donde $0 < c < a$.

Recuerda que el lugar geométrico que cumple esta condición es **una elipse**.



Solución

Tomando en general los puntos $P(x, y)$ que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.



$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

elevando al cuadrado: $(x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2,$

simplificando: $a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx,$

elevando al cuadrado: $a^2[(x+c)^2+y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$

simplificando: $(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$

Dado que $0 < c < a$, se cumple que $a^2 - c^2 > 0$, y por ello es posible definir el número b tal que $b^2 = a^2 - c^2$, donde $b > 0$. Sustituyendo en la última igualdad:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo por a^2b^2 ambos miembros de la igualdad se puede expresar como: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Definición

La ecuación que determina el lugar geométrico de **una elipse** está dada por: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Los puntos fijos F_1 y F_2 se conocen como **focos** de la elipse, y tienen coordenadas:

$$F_1(-\sqrt{a^2-b^2}, 0) \text{ y } F_2(\sqrt{a^2-b^2}, 0).$$

Y la suma de las distancias de un punto de la elipse a cada uno de los focos es $2a$.

En la ecuación de la elipse, si $a = b$, el resultado es una circunferencia. Por lo tanto la circunferencia es un caso particular de la elipse.

Ejemplo

Deduce la ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1(-3, 0)$ y $F_2(3, 0)$, y cumple que $a = 5$.

De la coordenada en x de los focos se deduce que $c = 3$ y $a = 5$ por hipótesis, para calcular b se tiene que:

$$a^2 - c^2 = b^2, \text{ entonces, } b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Problemas

1. Deduce la ecuación de las elipses de cada literal.

   a) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $a = 5$ b) $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, $a = 3$ c) $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, $a = 2$

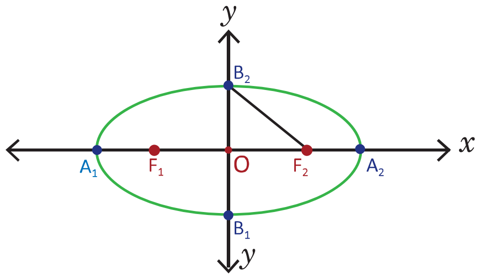
2. Determina las coordenadas de los focos de cada elipse.

   a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ c) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$

3.3 Elementos y propiedades de la elipse

Problema inicial

En la gráfica de la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, determina las coordenadas de los puntos A_1, A_2, B_1 y B_2.



Solución

Dado que A_1 y A_2 están sobre el eje x, se puede evaluar la ecuación de la elipse en $y = 0$.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$, entonces, $\frac{x^2}{a^2} = 1$ y resolviendo.

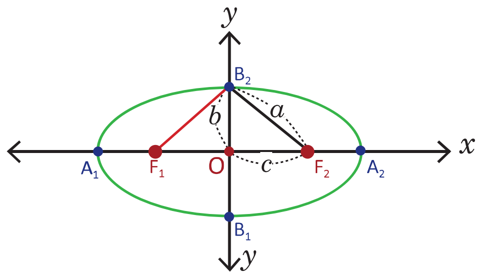
$$x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$

Análogamente, como B_1 y B_2 están sobre el eje y, se puede evaluar la ecuación de la elipse en $x = 0$ y se tiene que:

$$y = \pm b$$

Por lo tanto, las coordenadas de estos puntos son:

$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ y $B_2(0, b)$.

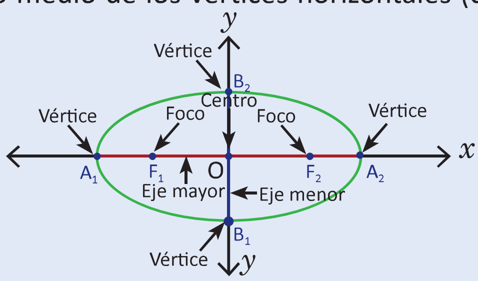


Conclusión

Los puntos extremos de la elipse que se encuentran sobre el eje x y sobre el eje y se llaman **vértices**, y tienen coordenadas $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ y $B_2(0, b)$. El punto medio de los vértices horizontales (o verticales) se llama **centro** de la elipse.

El segmento de recta que pasa por los focos de la elipse y cuyos extremos son vértices de la misma, se llama **eje mayor** de la elipse, y su longitud mide $2a$.

El segmento de recta cuyos extremos son vértices de la misma y es perpendicular al eje mayor se llama **eje menor** de la elipse, y su longitud mide $2b$.



Para graficar la elipse, coloca los vértices A_1, A_2, B_1 y B_2; o bien traza los ejes mayor y menor.

Ejemplo

Determina las coordenadas de los vértices, los focos, longitudes del eje mayor y el eje menor de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano.

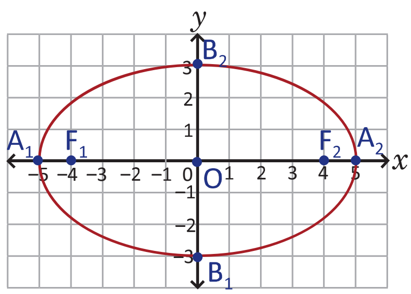
Determinando los valores de a, b y c: $a = 5$, $b = 3$ y $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

Vértices $\begin{cases} A_1(-5, 0), A_2(5, 0) \\ B_1(0, -3), B_2(0, 3) \end{cases}$

Longitud del eje mayor = 2(5) = 10

Longitud del eje menor = 2(3) = 6

Focos $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$



Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y longitudes del eje mayor y el eje menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

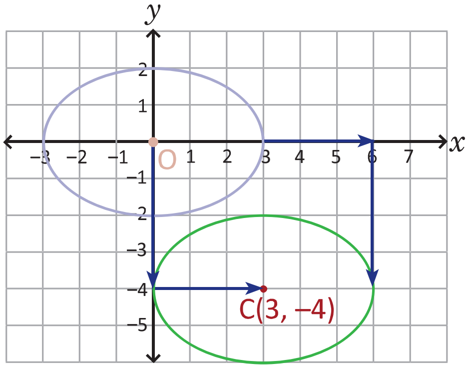
a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ d) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

3.4 Desplazamientos paralelos de la elipse

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{4} = 1$.

Solución



Considerando la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ y desplazándola 3 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia abajo, se obtiene la ecuación:

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{4} = 1.$$

Por lo tanto, la gráfica es la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ con centro (3, −4).

Conclusión

La ecuación de una elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente está dada por: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Para graficarla, se puede ubicar el centro y graficarla como si este fuese el origen del plano cartesiano, o bien, graficarla en el origen y desplazarla.

Recuerda que para desplazar una gráfica h unidades horizontalmente, y k unidades verticalmente se cambia la variable x por la expresión $x - h$; y la variable y por la expresión $y - k$.

Ejemplo 1

Determina la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ desplazada −3 unidades horizontalmente y 2 unidades verticalmente.

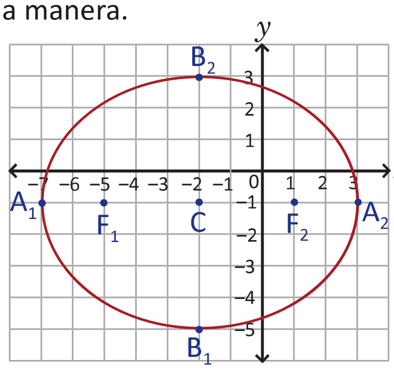
Tomando la ecuación original y reemplazando x por $[x - (-3)]$, y y por $(y - 2)$: $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

Ejemplo 2

Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y eje menor de la elipse $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

Esta elipse es equivalente a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ desplazada −2 unidades horizontalmente y −1 unidad verticalmente. Nota que los vértices y los focos se desplazan de la misma manera.

Ecuación	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$
Vértices	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$ $B_1(0, -4)$, $B_2(0, 4)$	$A_1(-7, -1)$, $A_2(3, -1)$ $B_1(-2, -5)$, $B_2(-2, 3)$
Focos	$F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$	$F_1(-5, -1)$, $F_2(1, -1)$
Longitudes del eje mayor y eje menor	$2a = 10$, $2b = 8$	$2a = 10$, $2b = 8$



Problemas

1. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

   a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $h = -1$, $k = 2$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $h = 3$, $k = -1$ c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$, $h = -2$, $k = -2$

2. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y longitudes del eje mayor y eje menor. Luego grafica en el plano cartesiano la elipse de cada literal.

   a) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ b) $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ c) $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

3.5 Ecuación general de la elipse

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$.

Expresa la ecuación en la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Solución

Completando cuadrados para x y para y:

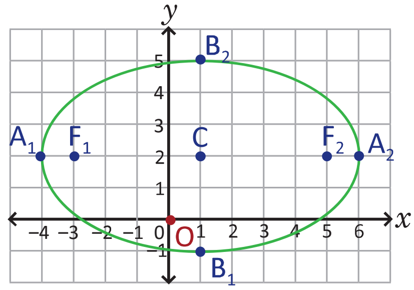
$$9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 4y) - 116 = 0 \quad \text{ordenando y agrupando,}$$

$$9(x-1)^2 + 25(y-2)^2 - 9 - 100 - 116 = 0 \quad \text{completando cuadrados,}$$

$$\frac{9(x-1)^2}{225} + \frac{25(y-2)^2}{225} = 1 \quad \text{sumando e igualando a 1,}$$

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad \text{simplificando.}$$



Por lo tanto, la gráfica es la elipse con centro (1, 2) y vértices $A_1(-4, 2)$, $A_2(6, 2)$, $B_1(1, -1)$ y $B_2(1, 5)$.

Conclusión

Una elipse puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ y dejando la ecuación igualada a 0.

En general para determinar el centro y los vértices (eje mayor y menor) de una elipse cuya ecuación sea de la forma $dx^2 + ey^2 + fx + gy + h = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, para expresarla en la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. A la ecuación de la forma $dx^2 + ey^2 + fx + gy + h = 0$ se le llama **ecuación general de la elipse.**

Ejemplo

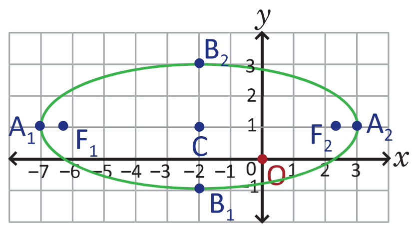
Determina las coordenadas de los vértices, los focos y longitudes del eje mayor y menor de la elipse: $4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$ y grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

$$4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$$

$$4(x+2)^2 + 25(y-1)^2 - 16 - 25 - 59 = 0$$

$$\frac{4(x+2)^2}{100} + \frac{25(y-1)^2}{100} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$



Entonces el centro de la elipse es el punto C(–2, 1).

Esta elipse es equivalente a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ desplazada –2 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente.

Ecuación	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
Vértices	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(0, -2)$, $B_2(0, 2)$	$A_1(-7, 1)$, $A_2(3, 1)$, $B_1(-2, -1)$, $B_2(-2, 3)$
Focos	$F_1(-\sqrt{21}, 0)$, $F_2(\sqrt{21}, 0)$	$F_1(-2-\sqrt{21}, 1)$, $F_2(-2+\sqrt{21}, 1)$
Longitudes de los ejes	$2a = 10$, $2b = 4$	$2a = 10$, $2b = 4$

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y longitudes del eje mayor y menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$

b) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 16 = 0$

c) $8x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 55 = 0$

d) $7x^2 + 16y^2 + 14x - 64y - 41 = 0$

e) $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$

f) $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$

3.6 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación de las elipses de cada literal.

a) $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, $a = 3$

b) $F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$, $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$

2. Determina las coordenadas de los focos de cada elipse.

a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

b) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

3. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, las longitudes del eje mayor y el eje menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

4. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $h = -2$, $k = -2$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $h = 3$, $k = -2$

5. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y eje menor. Luego grafica en el plano cartesiano la elipse de cada literal.

a) $\frac{(x + 2)^2}{16} + \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$

b) $\frac{(x + 3)^2}{8} + \frac{(y + 3)^2}{4} = 1$

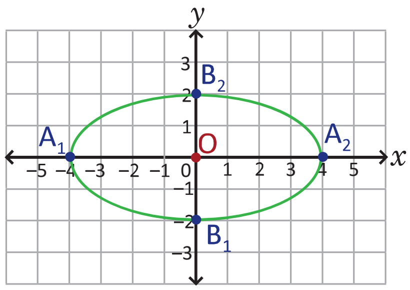
6. Determina las coordenadas de los vértices, los focos, y las longitudes del eje mayor y el eje menor de cada elipse. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$

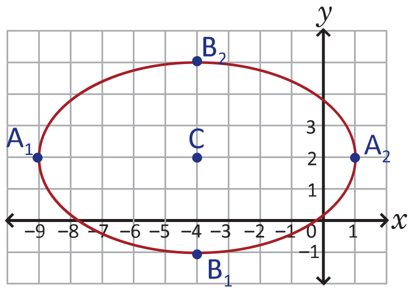
b) $4x^2 + 9y^2 + 24x = 0$

7. Encuentra la ecuación que determina cada una de las siguientes elipses.

a)



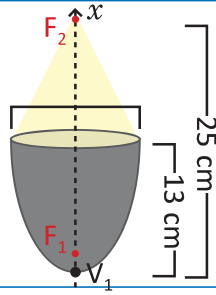
b)



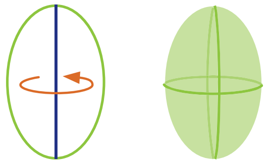
3.7 Aplicaciones de la elipse*

Problema inicial

Se diseña una lámpara con forma semi-elíptica (la mitad de una forma elíptica) de 13 cm de altura de modo que proyecta la luz emanada desde un foco hacia el otro que está a 25 cm de distancia del vértice de la lámpara. Determina de cuánto debería ser el diámetro de la lámpara para que funcione correctamente.



Una forma elíptica es un cuerpo geométrico que resulta de girar una elipse alrededor de su eje mayor.



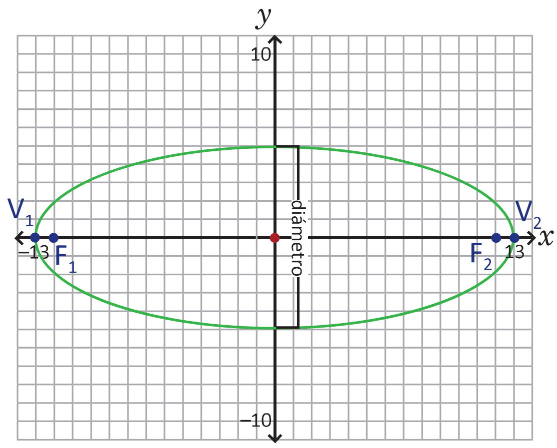
Solución

Considerando una elipse con centro en el origen, entonces uno de los vértices tendrá coordenadas (13, 0), y uno de los focos (12, 0), por lo tanto $a = 13$, $c = 12$, entonces:

$$b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 5^2$$
$$a^2 = 13^2$$

Y la ecuación de dicha elipse será: $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.

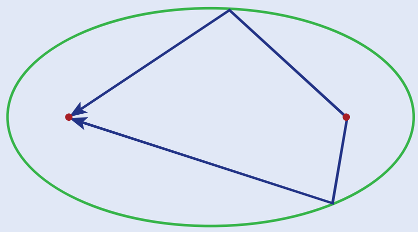
Entonces el diámetro estará dado por la medida del eje menor de la elipse, es decir, $2b = 2(5) = 10$.
Por lo tanto, el diámetro de la lámpara debe ser 10 cm.



Conclusión

En una elipse, los focos cumplen una propiedad reflectora importante: una línea tomada desde un foco de la elipse, será reflejada por esta exactamente sobre el otro foco.

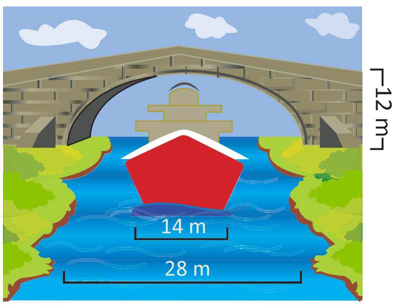
Esta propiedad reflectora parecida a la de la parábola hace que la elipse o las formas elípticas posean gran aplicación en ámbitos científicos, arquitectónicos, acústicos o artísticos.



Problemas

1. Una ingeniera eléctrica diseña un reflector de luz semi-elíptico para un teatro, dicho reflector tiene 13 centímetros de altura y 10 centímetros de diámetro. Determina a qué distancia del vértice del reflector concentrará la luz dicho reflector.

2. Un puente cuya abertura tiene forma semi-elíptica sobre un río tiene 28 metros de largo y una altura de 12 metros sobre el nivel del río. Determina la altura máxima que debe tener un barco de 14 metros de ancho para que pase con total seguridad bajo el puente.



Asume que el barco es simétrico respecto el eje vertical, y que pasa justo en medio del puente. Además piensa que el barco tiene la misma altura en todo punto.

Unidad 3

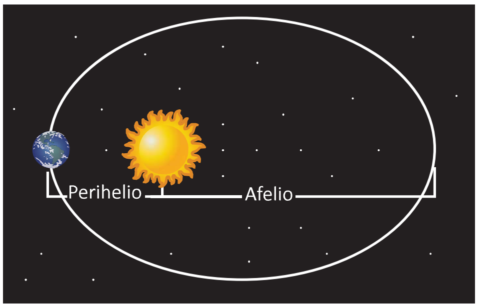
3.8 Aplicaciones de la elipse

Resuelve los siguientes problemas de aplicación de elipse. Modela cada situación en el plano cartesiano.

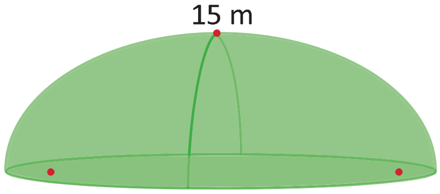
1. Un paso a desnivel construido en forma semi-elíptica tiene 12 metros de largo y una altura máxima de 3 metros a partir del centro. Determina la altura máxima que debe tener un camión para pasar por debajo del paso a desnivel, si la anchura de este camión es de 3 metros del centro de la calle hacia cada lado.

2. Una arquitecta y un ingeniero trabajan en el diseño de un puente con forma semi-elíptica para un río de 30 metros de ancho. El puente debe ser tal que un barco de a lo sumo 20 metros de ancho y 3 metros de alto pueda cruzar debajo de este con total seguridad. Determina la altura que debe tener el puente.

3. La Tierra cumple con recorrer una órbita elíptica en exactamente un año, dicha elipse tiene como uno de sus focos el Sol. El instante en el que la Tierra se ubica más cerca del Sol se conoce como perihelio y son aproximadamente 147 millones de kilómetros de distancia; mientras que el instante en el que está más alejada del Sol se conoce como afelio y se ubica a una distancia aproximada de 153 millones de kilómetros. Determina la ecuación de la órbita de la Tierra.



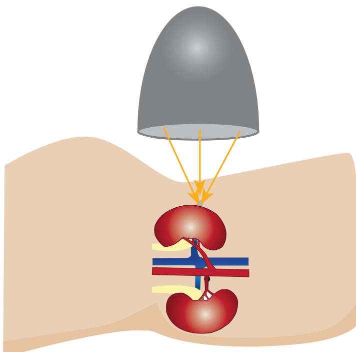
El astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler, estudió y descubrió **las tres leyes del movimiento de los planetas**, la primera de las cuales se enuncia: *"Los planetas tienen movimientos elípticos alrededor del Sol, estando este situado en uno de los dos focos que contiene la elipse"*.



4. Una estructura arquitectónica fue diseñada para poder enviar secretos a otra persona sin que los demás los escuchen. La forma de su diseño es semi-elíptico (aprovechando las propiedades focales de la elipse), la altura de dicha estructura en el punto más alto es de 15 metros y la distancia entre los vértices del salón es de 34 metros. Determina la ubicación que deben tener dos personas para que uno pueda escuchar al otro aunque se hablen por susurros.

Si dos personas están sobre los focos de la elipse, las ondas de sonido que salgan de un foco serán reflejadas directamente hacia el otro foco.

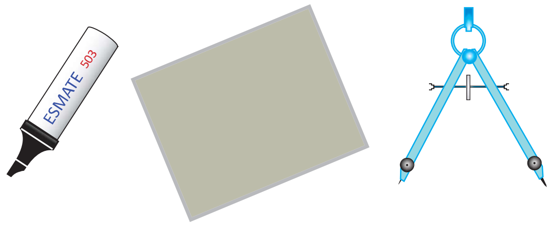
5. Para curar los cálculos renales en una persona, en ocasiones se utiliza un procedimiento conocido como litotripcia. Este procedimiento utiliza una cubierta semi-elíptica, y se fundamenta en la propiedad de los focos de una elipse: se localiza un aparato generador de ondas de choque en el foco de la elipse y estas tendrán efecto sobre el otro foco, lugar donde se encuentra el cálculo renal. Si el aparato tiene 13 cm de altura y 10 cm de diámetro, determina a qué distancia podría estar el cálculo para poder pulverizarlo utilizando este aparato.



4.1 Actividad introductoria

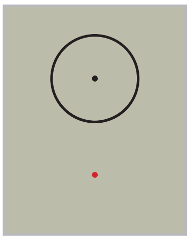
Materiales

- Hoja de papel vegetal
- Compás
- Plumón
- Regla

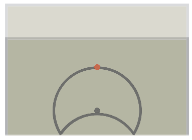


Actividad

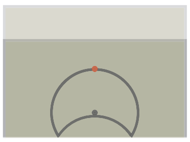
1. Dibuja una circunferencia no demasiado grande sobre el papel vegetal, coloca un punto en su centro y otro afuera un poco lejos de dicha circunferencia y alineados verticalmente.

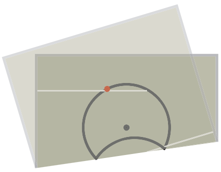


2. Dobla el papel de modo que el punto dibujado quede exactamente sobre un punto de la circunferencia.

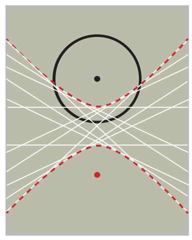


3. Realiza el mismo proceso con puntos cercanos en la circunferencia hasta volver al punto con el que se inició. Analiza la figura formada.





4. La figura que se forma tiene dos ramas y el centro de la circunferencia está dentro de una rama y el punto dibujado fuera de la circunferencia está dentro de la otra.



Definición

La figura de las dos ramas que queda marcada en la actividad es una **hipérbola**. Observa que cada punto de ella cumple la condición de que la diferencia de la distancia de un punto a dos puntos fijos se mantiene constante.

Preguntas

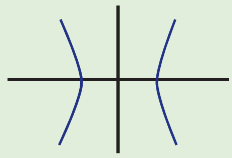
1. ¿Qué sucede si el punto dibujado fuera de la circunferencia está más lejos de ella?
2. ¿Qué sucede si el punto dibujado fuera de la circunferencia está muy cerca de la circunferencia?
3. ¿Qué sucede si el punto dibujado fuera de la circunferencia no está alineado verticalmente con su centro?
4. ¿Cuánto es la diferencia de un punto de la hipérbola hacia los dos puntos fijos dibujados?
5. Explica por qué se cumple que la diferencia de un punto de la hipérbola a dos puntos fijos se mantiene constante.

4.2 La hipérbola*

Problema inicial

Deduce la ecuación que determina el lugar geométrico de los puntos que cumplen que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ es siempre igual a $2a$, donde $0 < a < c$.

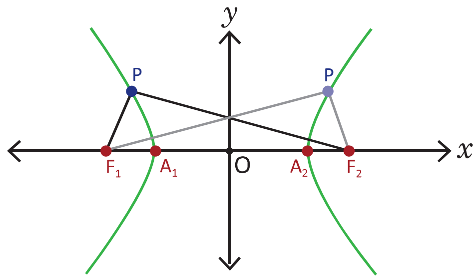
Recuerda que el lugar geométrico que cumple esta condición es **una hipérbola**.



Solución

Si el punto P está en la rama izquierda: $d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$.

Si el punto P está en la rama derecha: $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$.



Tomando en general los puntos $P(x, y)$ que cumplen la condición y utilizando la distancia entre dos puntos.

$$d(P, F_2) - d(P, F_1) = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{transponiendo,}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \quad \text{simplificando,}$$

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad \text{simplificando.}$$

Dado que $0 < a < c$, se cumple que $c^2 - a^2 > 0$, y por ello es posible definir el número b tal que $b^2 = c^2 - a^2$, donde $b > 0$. Sustituyendo en la última igualdad: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Esta igualdad se puede expresar como: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, dividiendo por a^2b^2 ambos miembros.

Definición

La ecuación que determina el lugar geométrico de una hipérbola está dada por: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Los puntos fijos F_1 y F_2 se conocen como **focos** de la hipérbola y tienen coordenadas:

$$F_1(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0) \text{ y } F_2(\sqrt{a^2 + b^2}, 0).$$

La diferencia de las distancias de un punto de la hipérbola a cada uno de los focos siempre es $2a$.

Ejemplo

Deduce la ecuación de la hipérbola con focos $F_1(-5, 0)$ y $F_2(5, 0)$ y $a = 3$.

De la coordenada en x de los focos se deduce que $c = 5$ y $a = 3$ por hipótesis, para calcular b se tiene que:

$$c^2 - a^2 = b^2, \text{ entonces, } b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Problemas

1. Deduce la ecuación de la hipérbola de cada literal.

   a) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $a = 4$ b) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, $a = 2$ c) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $a = 3$

2. Determina las coordenadas de los focos de cada hipérbola.

   a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

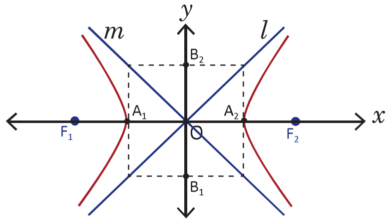
4.3 Elementos y propiedades de la hipérbola

Problema inicial

Utilizando la gráfica de la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

a) Determina las coordenadas de los puntos A_1 y A_2.

b) Determina la ecuación de las diagonales del rectángulo que muestra la figura, si $B_1(0, -b)$ y $B_2(0, b)$.



Solución

a) Dado que A_1 y A_2 están sobre el eje x, y pertenecen a la hipérbola, se puede evaluar la ecuación de la hipérbola en $y = 0$. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$ y resolviendo: $\frac{x^2}{a^2} = 1$

$$x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$

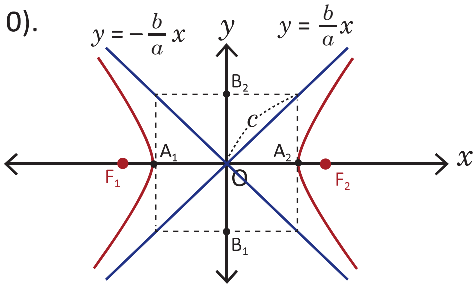
Por lo tanto, las coordenadas de estos puntos son: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$.

b) Para la recta l, dado que pasa por los puntos (a, b) y $(0, 0)$:

Utilizando la ecuación dos puntos: $y = \frac{b}{a}x$.

Para la recta m, dado que pasa por los puntos $(-a, b)$ y $(0, 0)$:

Utilizando la ecuación dos puntos: $y = -\frac{b}{a}x$.

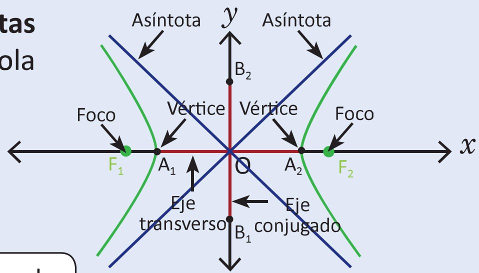


Conclusión

Los puntos A_1 y A_2 de la hipérbola se llaman **vértices**, y tienen coordenadas $A_1(-a, 0)$ y $A_2(a, 0)$. Además, el punto medio del segmento A_1A_2 se conoce como **centro** de la hipérbola.

Las rectas que tienen ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ se llaman **asíntotas** de la hipérbola, y cumplen que sus gráficas se aproximan a la hipérbola pero nunca la tocan.

El segmento de recta cuyos extremos son los vértices de la hipérbola se conoce como **eje transverso**, y el segmento de recta cuyos extremos son los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ se conoce como **eje conjugado**.



Para graficar la hipérbola, primero traza las asíntotas y los vértices.

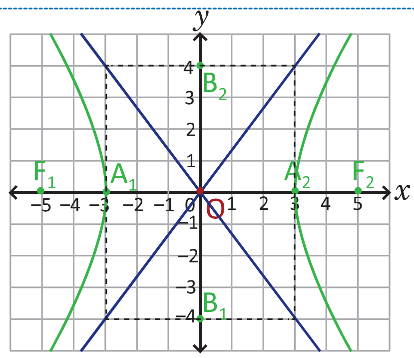
Ejemplo

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Luego grafícala en el plano cartesiano.

Determinando los valores de a, b, c: $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Vértices: $A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$ Focos: $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$

Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$



Al rectángulo formado entre los puntos A_1, A_2, B_1 y B_2 en ocasiones se le llama **rectángulo asintótico**, y puede utilizarse para trazar las asíntotas de la hipérbola a partir de las diagonales de dicho rectángulo.

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, ecuaciones de las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ d) $x^2 - y^2 = 1$

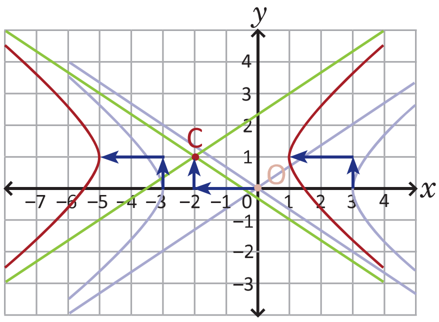
Unidad 3

4.4 Desplazamientos paralelos de la hipérbola

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

Solución



Considerando la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ y desplazándola 2 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia arriba, se obtiene la ecuación:

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Por lo tanto, la gráfica es la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ con centro (–2, 1).

Conclusión

La ecuación de una hipérbola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente está dada por: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Para graficarla, se puede ubicar el centro y graficarla como si este fuese el origen del plano cartesiano, o bien, graficarla en el origen y desplazarla.

Recuerda que para desplazar una gráfica h unidades horizontalmente, y k unidades verticalmente se cambia la variable x por la expresión $x - h$; y la variable y por la expresión $y - k$.

Ejemplo 1

Determina la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ desplazada –4 unidades horizontalmente y –3 unidades verticalmente.

Tomando la ecuación original y reemplazando x por $[x - (-4)]$, y y por $[y - (-3)]$.

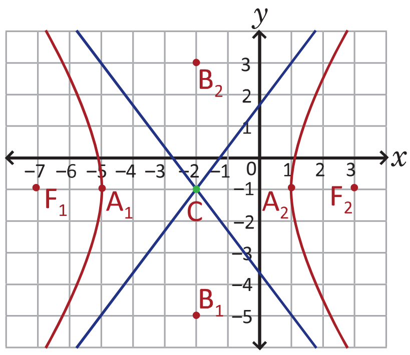
$$\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Ejemplo 2

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$. Luego gfícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

Esta hipérbola es equivalente a $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ desplazada –2 unidades horizontalmente y –1 unidad verticalmente, es decir, tiene centro C(–2, –1).

Ecuación	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$
Vértices	$A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$	$A_1(-5, -1)$, $A_2(1, -1)$
Focos	$F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$	$F_1(-7, -1)$, $F_2(3, -1)$
Asíntotas	$y = \frac{4}{3}x,\ y = -\frac{4}{3}x$	$y + 1 = \frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$, $y + 1 = -\frac{4}{3}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$



Problemas

1. Para cada literal determina la ecuación de la elipse desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

   a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $h = 3$, $k = 1$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, $h = 2$, $k = -4$ c) $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$, $h = -3$, $k = -2$

2. Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de cada hipérbola. Luego grafica en el plano cartesiano.

   a) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ b) $\frac{(x-3)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$ c) $(x+2)^2 - (y+1)^2 = 1$

4.5 Ecuación general de la hipérbola

Problema inicial

Grafica en el plano cartesiano la figura determinada por la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$.

Solución

Completando cuadrados para x y para y:

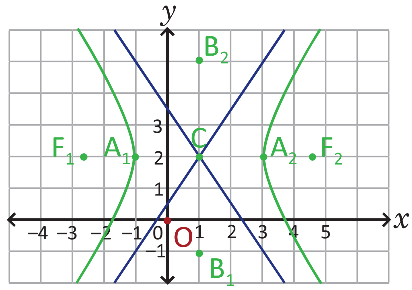
$$9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 4y) - 43 = 0 \quad \text{ordenando y agrupando,}$$

$$9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 - 9 + 16 - 43 = 0 \quad \text{completando cuadrados,}$$

$$\frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y-2)^2}{36} = 1 \quad \text{sumando e igualando a 1,}$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad \text{simplificando.}$$



Por lo tanto, la gráfica es una hipérbola con centro (1, 2), vértices $A_1(-1, 2)$, $A_2(3, 2)$ y asíntotas

$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$, es decir, $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; $y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$, es decir, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Conclusión

Una hipérbola puede ser representada desarrollando los cuadrados de la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ y dejándola igualada a 0.

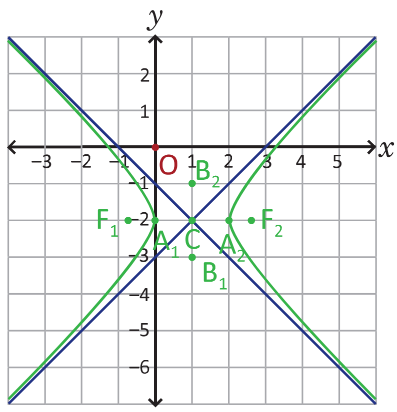
En general, para determinar el centro, los vértices y asíntotas de una hipérbola cuya ecuación sea de la forma $dx^2 - ey^2 + fx + gy + h = 0$, se completan cuadrados perfectos en x y y, para expresar en la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Ejemplo

Determina las coordenadas de los vértices, los focos y asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$, luego grafícala en el plano cartesiano con todos sus elementos.

$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 - (y+2)^2 - 1 + 4 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$$



Esta hipérbola es equivalente a $x^2 - y^2 = 1$ desplazada 1 unidad horizontalmente y –2 unidades verticalmente, es decir, tiene centro C(1, –2).

Ecuación	$x^2 - y^2 = 1$	$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$
Vértices	$A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$	$A_1(0, -2)$, $A_2(2, -2)$
Focos	$F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$	$F_1(-\sqrt{2} + 1, -2)$, $F_2(\sqrt{2} + 1, -2)$
Asíntotas	$y = x$, $y = -x$	$y = x - 3$, $y = -x - 1$

Problemas

Determina las coordenadas de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$
b) $25x^2 - 4y^2 - 100x - 16y - 16 = 0$
c) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$
d) $16x^2 - 9y^2 + 32x - 54y - 209 = 0$
e) $x^2 - y^2 - 4y - 8 = 0$
f) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 32 = 0$

4.6 Practica lo aprendido

1. Deduce la ecuación de la hipérbola de cada literal.

a) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$, $a = 3$

b) $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, y vértices $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$.

2. Determina las coordenadas de los focos de cada hipérbola.

a) $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

3. Determina las coordenadas de los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

b) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

4. Para cada literal determina la ecuación de la hipérbola desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, $h = 2$, $k = 3$

b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$, $h = -3$, $k = -1$

5. Determina las coordenadas de los vértices, las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano para cada literal.

a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

b) $(x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

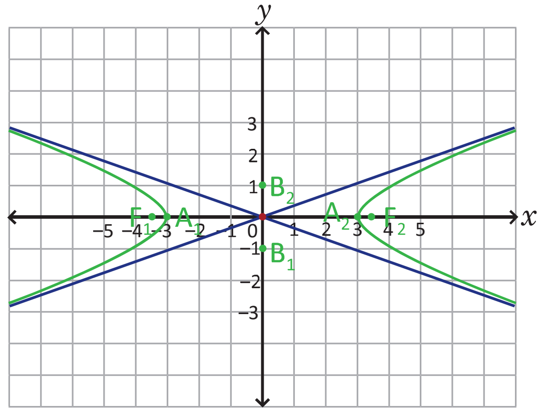
6. Determina las coordenadas de los vértices, las asíntotas y los focos de cada hipérbola. Luego grafícala en el plano cartesiano para cada literal.

a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$

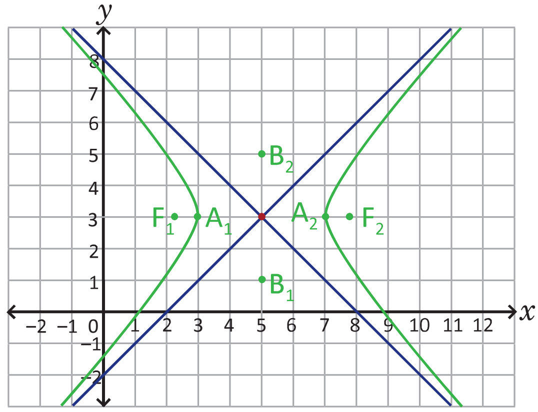
b) $9x^2 - y^2 + 6y - 18 = 0$

7. Encuentra la ecuación que determina cada una de las siguientes gráficas.

a)



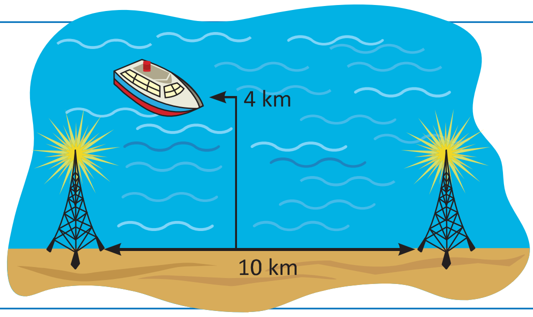
b)



4.7 Aplicaciones de la hipérbola*

Problema inicial

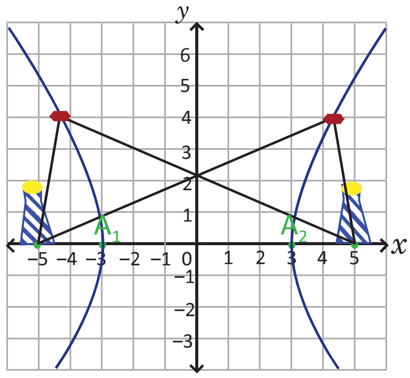
Un barco envía señales hacia dos torres ubicadas sobre la costa a 10 km una de la otra, si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco a una de las torres es 6 km más lejana que la distancia a la otra torre. Determina la posible posición del barco si este navega a 4 km de distancia de la costa.



Solución

Considerando la situación como una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ cuyos focos son las torres, entonces dado que la diferencia de las distancias a las dos torres en ese instante es 6 km, se puede determinar el valor de a, y como también se conoce la distancia entre las dos torres (focos), es posible conocer el valor de c, así:

$$|d_2 - d_1| = 2a = 6, \text{ entonces } a = 3,$$
$$2c = 10, \text{ entonces } c = 5,$$
$$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2.$$



Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola que modela la situación es: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$.

Para localizar el barco bastará encontrar la coordenada en x cuando $y = 4$:

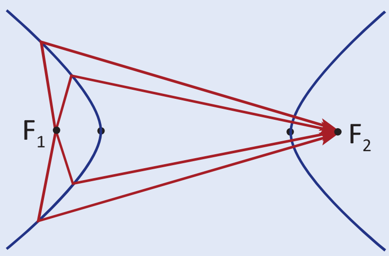
$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{4^2}{4^2} = 1 \quad \text{despejando } x^2:$$
$$x^2 = 2(3^2)$$
$$x = \pm 3\sqrt{2}.$$

El sistema de navegación ruso CHAYKA y el sistema LORAN utilizan este principio para la localización de navíos, sin embargo poco a poco este tipo de sistemas está siendo reemplazado por la localización GPS.

Conclusión

En una hipérbola los focos cumplen una propiedad reflectora importante: si se toma una línea desde un foco esta, será reflejada por la hipérbola exactamente sobre el otro foco.

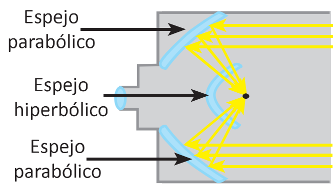
Esta propiedad reflectora parecida a la de la elipse y la parábola; hace de las formas hiperbólicas herramientas de aplicación en diversos ámbitos científicos.



Problemas

1. Las señales de un barco recibidas por un sistema CHAYKA cuyas torres están ubicadas sobre la costa a 26 km una de la otra, si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco a una de las torres es 10 km más lejana que la distancia a la otra torre. Determina la posible posición del barco si este navega a 12 km de distancia de la costa.

2. Un telescopio Maksutov-Cassegrain funciona de modo que recibe las señales de luz, y son reflejadas por un espejo parabólico (cortado) hacia el foco, el cual es foco de otro espejo, pero este es hiperbólico como lo muestra la figura. Determina la función del espejo hiperbólico y explica el funcionamiento del telescopio Maksutov-Cassegrain.



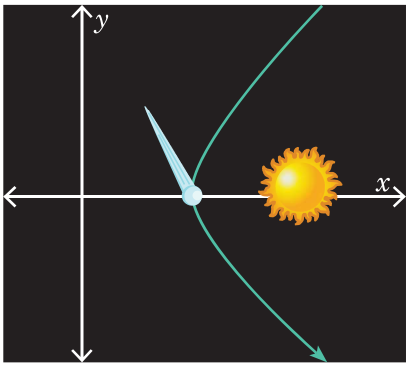
4.8 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas de aplicación de hipérbola. Modela cada situación en el plano cartesiano.

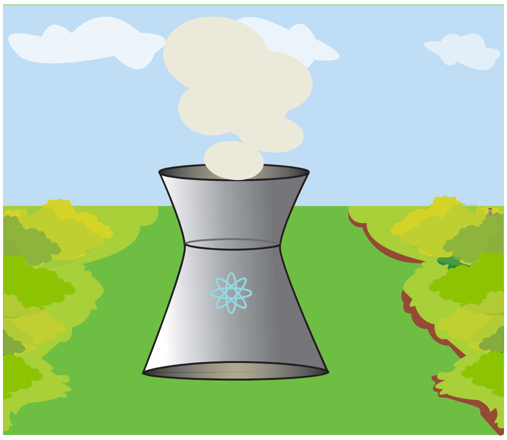
1. En el universo las trayectorias de un cometa pueden tener diversas formas, como elípticas, parabólicas o hiperbólicas, siempre teniendo al Sol como foco de dichas figuras. Tomando un cometa cuya trayectoria es hiperbólica (solo será visto una vez en la historia), cuya ecuación está dada por:

$$\frac{x^2}{20^2} - \frac{y^2}{21^2} = 1$$

Donde los números 20 y 21 representan cuatrillones de metros. Determina la distancia mínima en que pasará el cometa con dicha trayectoria del sol.

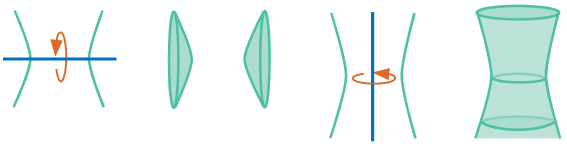


2. Las torres de enfriamiento de las plantas nucleares de energía se diseñan con forma de hiperboloide de una hoja, si el diámetro de la parte más alta es 3.75 m y se ubica a 9 m de altura, y el diámetro más pequeño es de 3 m y se ubica a 6 m de altura, determina aproximadamente el diámetro de la base de la torre.



Una forma de hiperboloide es un cuerpo geométrico que resulta de girar una hipérbola alrededor de alguno de sus ejes. Si se gira alrededor del **eje transverso** se conoce como **hiperboloide de 2 hojas** y si se gira alrededor del **eje conjugado** se conoce como **hiperboloide de 1 hoja**.

Hiperboloide de 2 hojas **Hiperboloide de 1 hoja**

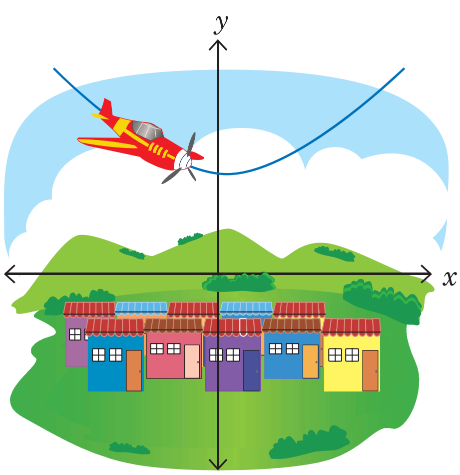


3. La torre de Polibino fue la primera estructura diseñada con forma de hiperboloide. Si el diámetro de la parte más alta de una torre hiperboloide es $4\sqrt{5}$ m y se ubica a 32 m de altura, y el diámetro más pequeño es de 4 m y se ubica a 16 m de altura, determina el diámetro de la base de la torre.

La torre de Polibino fue construida por el ingeniero ruso Vladimir Shújov, y la construcción de torres hiperboloides fue patentada por el mismo Shújov en el año 1896.

4. Una avioneta vuela sobre la ciudad de San Vicente y describe una trayectoria hiperbólica dada por la ecuación $4y^2 - x^2 = 2\,500$.

Determina cuál es la menor distancia sobre el nivel del suelo a la que estará dicha avioneta.



4.9 Problemas de la unidad

Piensa cómo sería la ecuación de una parábola horizontal.

1. Grafica la parábola determinada por cada ecuación en el plano cartesiano.

a) $x = 2y^2$ b) $x = -3y^2$ c) $x + 1 = (y - 2)^2$ d) $x + 2 = -(y + 1)^2$

Piensa cómo sería la ecuación de una elipse vertical.

2. Grafica la elipse determinada por cada ecuación en el plano cartesiano.

a) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ c) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ d) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

Piensa cómo sería la ecuación de una hipérbola vertical.

3. Grafica la hipérbola determinada por cada ecuación en el plano cartesiano.

a) $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$ b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ c) $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$ d) $\frac{(y-2)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$

4. Clasifica las siguientes ecuaciones según el tipo de figura que determinan en el plano cartesiano, parábola, circunferencia, elipse o hipérbola.

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \neq b$ b) $y - k = \frac{1}{4p}(x - h)^2$ c) $x^2 + y^2 = r^2$ d) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

e) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ f) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ g) $y = \frac{1}{4p}x^2$ h) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,\ a \neq b$

5. Determina qué tipo de figura (parábola, circunferencia, elipse o hipérbola) corresponde a cada ecuación.

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ c) $y^2 + x + 4y + 4 = 0$

d) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 7 = 0$ e) $2x^2 - 4x - y + 4 = 0$ f) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

g) $9x^2 + 4y^2 - 16y - 20 = 0$ h) $9x^2 - 9y^2 - 18x + 54 = 0$ i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

j) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$ k) $y^2 + x + 2y + 3 = 0$ l) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$

En resumen

Las cuatro figuras estudiadas (parábola, circunferencia, elipse e hipérbola) reciben el nombre de **cónicas**, y están dadas por los siguientes tipos de ecuaciones:

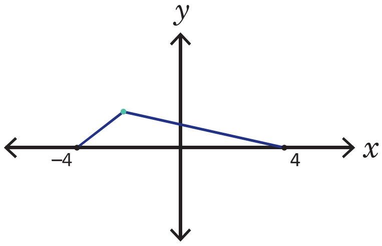
$y = \frac{1}{4p}x^2$	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parábola	**Circunferencia**	**Elipse**	**Hipérbola**

Estas figuras pueden tener variantes, como estar en posición horizontal o vertical, desplazadas o expresadas con todas las operaciones desarrolladas e igualadas a cero. En general, las ecuaciones presentadas arriba se conocen como: **ecuaciones canónicas** de dichas figuras.

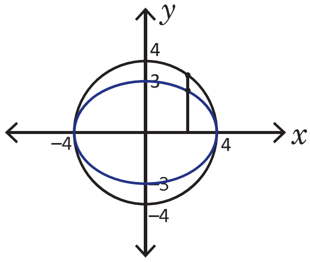
Unidad 3

4.10 Problemas de la unidad

1. La base de un triángulo tiene longitud fija y sus vértices se ubican en los puntos (–4, 0) y (4, 0), determina el lugar geométrico que describe el otro vértice si se cumple que el producto de las pendientes de los lados variables siempre es igual a 4.

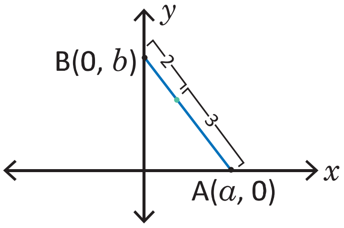


2. Determina el lugar geométrico que resulta de tomar una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y reducir las coordenadas en y de cada punto de ella a $\frac{3}{4}$.



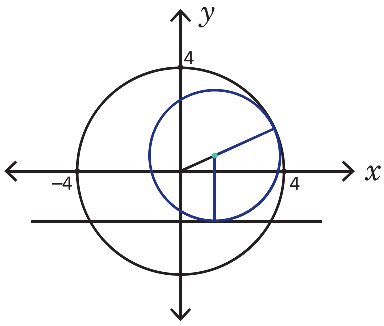
En este ejercicio se puede observar cómo una elipse puede ser vista como una circunferencia reducida respecto a una dirección a una razón constante.

3. Tomando un segmento AB de longitud 5 sobre el plano cartesiano, que cumple que el punto A se mueve sobre el eje x y el punto B sobre el eje y. Determina el lugar geométrico de los puntos del segmento AB que cumplen estar a una proporción 3:2.



Puedes asumir las coordenadas de A(a, 0) y las de B(0, b), utiliza el Teorema de Pitágoras para establecer una ecuación. Luego puedes calcular las coordenadas de un punto sobre un segmento dividido a una razón dada.

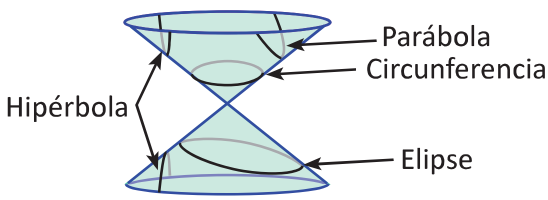
4. Identifica el lugar geométrico que determina el centro de una circunferencia cuyo radio varía de modo que siempre sea tangente a la recta $y + 2 = 0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Asumiendo que dicha circunferencia siempre se mueve por encima de la recta y adentro de la circunferencia.



Determina la relación que existe entre las distancias del centro de la circunferencia variable a la recta y al centro de la circunferencia fija.

En resumen

Todas las figuras cónicas son llamadas de esta manera porque todas se pueden obtener de realizar cortes por un plano sobre un cono de doble hoja como lo muestra la figura.



Puedes encontrar información acerca de las cónicas en el video oficial del Ministerio de Educación de El Salvador (MINED) titulado “Cónicas”, en la dirección https://goo.gl/Lq3dGW.

5.1 Práctica en GeoGebra: construcción de secciones cónicas

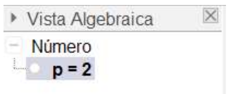
En esta práctica se construirán gráficas de secciones cónicas a partir del uso de variables, de modo que, al dar valores diferentes del centro, parámetro, longitudes de los ejes, etc., se puedan construir secciones cónicas de la misma familia (parábolas, circunferencias, elipses o hipérbolas). Sigue los pasos indicados en la parte de “Práctica” para construir la cónica. Luego trabaja en GeoGebra la parte “Actividades” que está al final de esta práctica.

Práctica

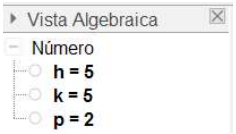
Construcción de una parábola de parámetro p y vértice (h, k).

1. Ingresa en la barra de entrada la variable p con valor de 2 digitando p = 2.

2. Presiona “enter” para obtener en la Vista Algebraica (panel izquierdo) la expresión de la derecha.



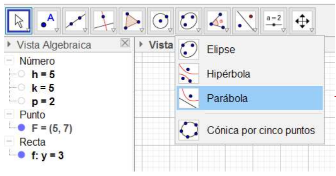
3. De la misma manera introduce las variables h y k, con valor de 5 para ambas variables, en la Vista Algebraica se tendrá un resultado como el que muestra la imagen de la derecha.



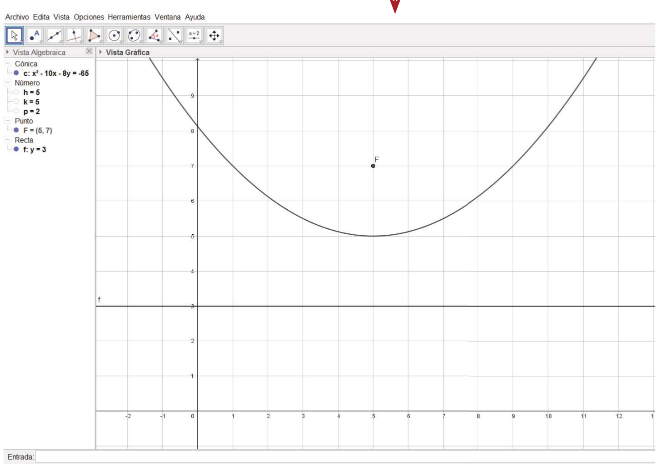
4. Grafica el foco, digitando en la barra de entrada F = (h, k + p), el punto F (foco) aparecerá en la vista gráfica.

5. Grafica la directriz, digitando en la barra de entrada y = k – p, la recta directriz aparecerá en la vista gráfica.

6. En el botón de cónicas, selecciona la opción Parábola.



7. A continuación selecciona el punto F (ya sea en la Vista Gráfica o en la Algebraica) y luego selecciona la recta directriz. Se obtendrá la gráfica que se muestra abajo.

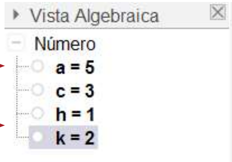


8. Puedes cambiar los valores de las variables p, h, k dando doble clic sobre ellas en la Vista Algebraica para corroborar las respuestas de los problemas de la lección 1. También puedes ver las formas de la ecuación de la parábola dando clic derecho sobre la ecuación de la cónica en la Vista Algebraica para expandir todas las opciones.

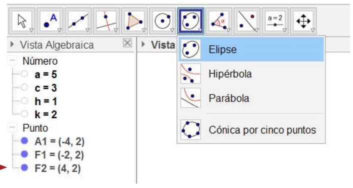
Unidad 3

Construcción de una elipse conocidos los valores de a, c y centro (h, k).

1. Ingresa las variables a, c, h y k desde la barra de entrada con valores de 5, 3, 1 y 2 respectivamente. En la Vista Algebraica se obtendrá un resultado como el que muestra la figura de la derecha.

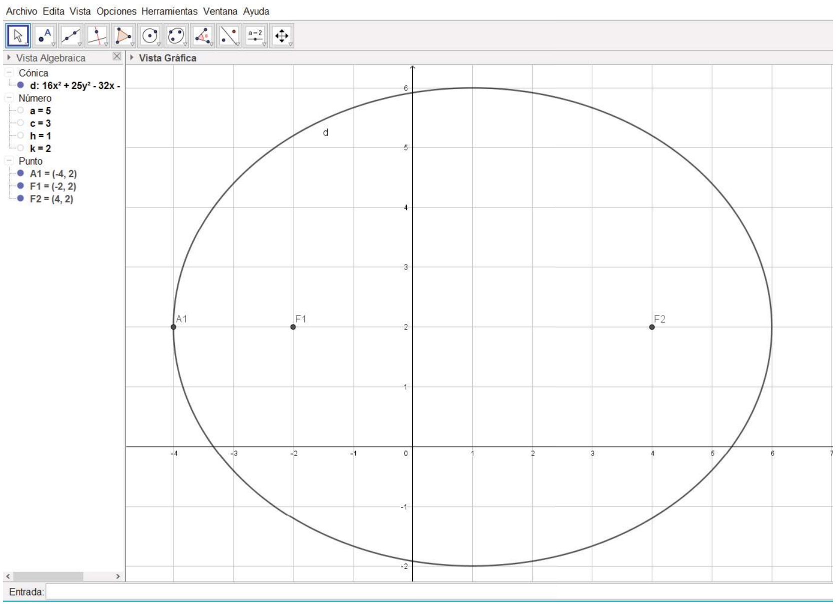


2. Grafica los focos y un vértice, digitando las coordenadas de los puntos F_1, F_2 y A_1 de la forma F1 = (h - c, k), F2 = (h + c, k) y A1 = (h - a, k). Los puntos aparecerán en la vista gráfica.



3. En el botón de cónicas, selecciona la opción Elipse.

4. A continuación selecciona el punto F1 luego selecciona el punto F2 y finalmente el punto A1 (vértice). Se obtendrá la gráfica que se muestra abajo.



5. Puedes cambiar los valores de las variables a, c, h y k dando doble clic sobre ellas en la Vista Algebraica para corroborar las respuestas de los problemas de la lección 3. También puedes ver las formas de la ecuación de la elipse dando clic derecho sobre la ecuación de la cónica en la Vista Algebraica para expandir todas las opciones.

Actividades

1. Construye una circunferencia con los valores del centro (h, k) y el radio r.
2. Construye una hipérbola con valores de a, c y centro (h, k).
3. Verifica las respuestas de los problemas que resolviste durante las clases de toda la unidad y corrobora que están correctos.
4. Contruye una parábola horizontal.
5. Contruye una elipse vertical.
6. Contruye una hipérbola vertical.

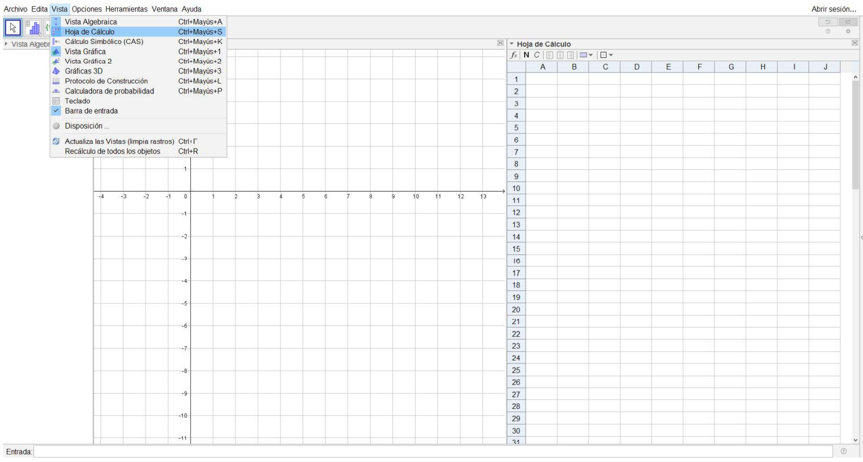
5.2 Práctica en GeoGebra: gráfica de la ecuación general de cónicas

En esta práctica se utilizará la Hoja de Cálculo de GeoGebra para graficar cónicas dada una ecuación en forma general, así será más sencillo identificar el tipo de cónica que está expresada, e incluso se puede utilizar la Vista Algebraica para obtener la ecuación en forma canónica. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de “Práctica” y construye la ecuación general para graficar la cónica correspondiente. Luego trabaja en GeoGebra la parte “Actividades” que está al final de esta práctica.

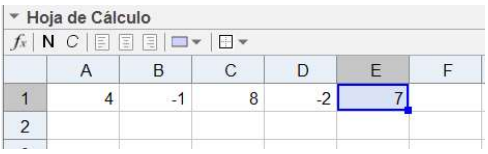
Práctica

Gráfica de la cónica dada por su ecuación general.

1. Abre el menú Vista y selecciona la opción Hoja de Cálculo.



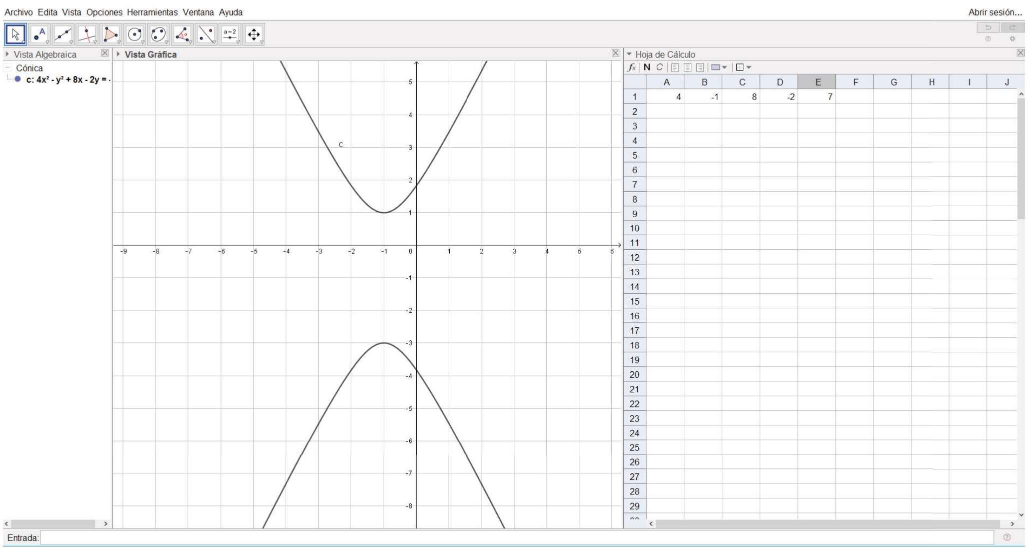
2. Ubícate en la fila 1 y digita los valores 4, –1, 8, –2, 7, uno en cada columna, como lo muestra la figura de la derecha.



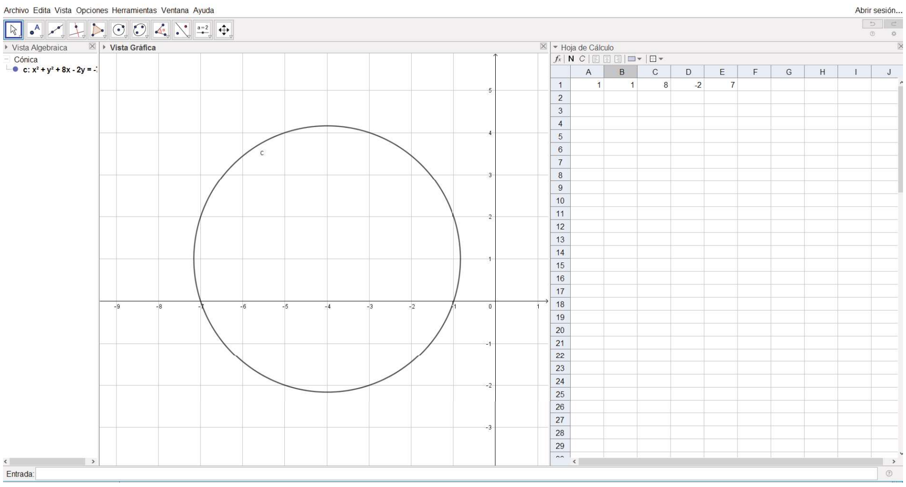
3. Ahora digita en la barra de entrada la ecuación general, tomando como coeficiente de x^2, y^2, x, y y la constante, los valores de la celda A1, B1, C1, D1 y E1 respectivamente, de la siguiente manera: A1*x^2 + B1*y^2 + C1*x + D1*y + E1 = 0.

Entrada: A1*x^2 + B1*y^2 + C1*x + D1*y + E1 = 0

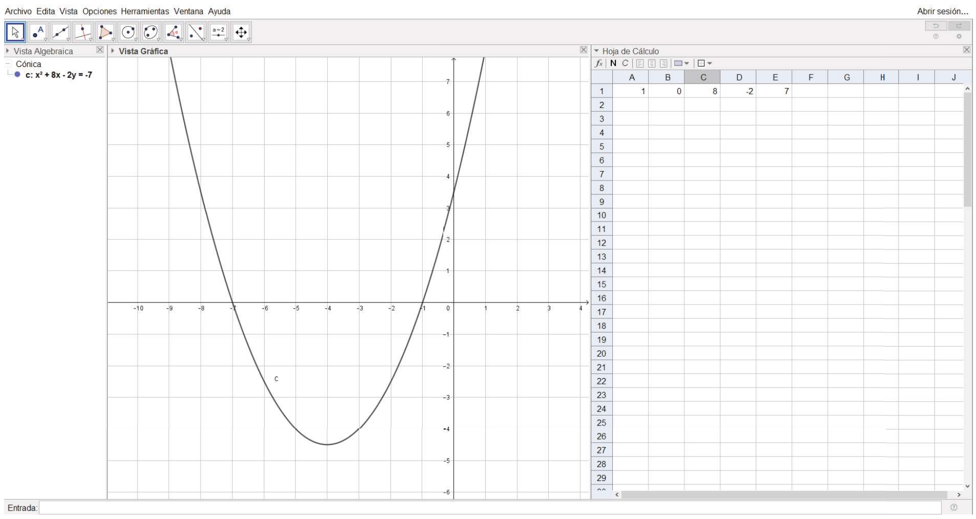
4. Al introducir la ecuación se muestra la gráfica de una hipérbola en la Vista Gráfica, como lo muestra la imagen de abajo.



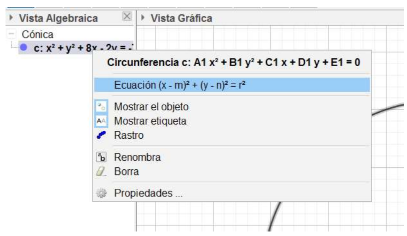
5. Cambiando el valor de las celdas A1 y B1 a 1, se obtiene la gráfica de una circunferencia.



6. Cambiando el valor de la celda B1 a 0, se obtiene una parábola.



7. Cambia la ecuación a la forma canónica, dando clic derecho sobre la ecuación y seleccionándola. Como muestra la figura.



Actividades

Identifica qué tipo de cónica es cada una de las siguientes ecuaciones, verifica si tu respuesta del problema 5 de la clase 4.9 es correcta, si no, determina cuál fue el error.

a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ c) $y^2 + x + 4y + 4 = 0$

d) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 7 = 0$ e) $2x^2 - 4x - y + 4 = 0$ f) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$

g) $9x^2 + 4y^2 - 16y - 20 = 0$ h) $9x^2 - 9y^2 - 18x + 54 = 0$ i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

j) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$ k) $y^2 + x + 2y + 3 = 0$ l) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 18y - 191 = 0$

5.3 Práctica en GeoGebra: propiedades de las secciones cónicas

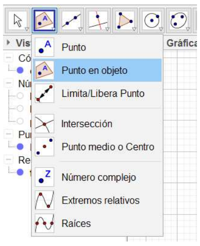
En esta práctica se utilizarán los recursos de GeoGebra para **verificar** las propiedades de los focos de las secciones cónicas (parábola, elipse e hipérbola) que se utilizaron en las aplicaciones de estos contenidos. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de “Práctica” y construye la propiedad. Luego trabaja en GeoGebra la parte “Actividades” que está al final de esta práctica.

Práctica

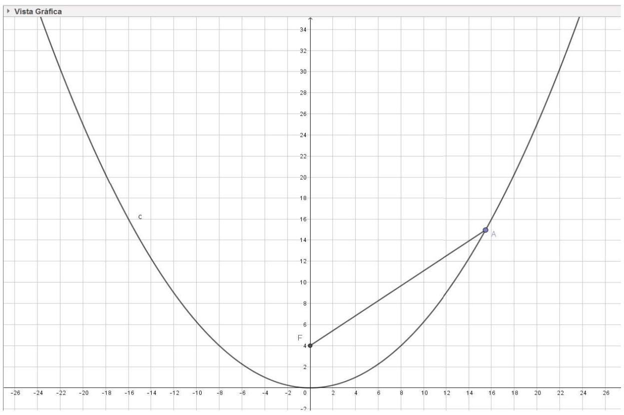
Verificación de la propiedad del foco de una parábola.

Cualquier línea desde el foco será reflejada en una misma dirección paralela al eje, y también al recibir una línea paralela al eje, esta será reflejada hacia el foco.

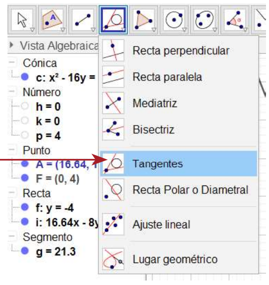
1. Utilizando el archivo creado en la práctica 5.1, grafica una parábola con vértice (0, 0) y parámetro $p = 4$.
2. En el botón Punto, selecciona la opción Punto sobre objeto y localiza un punto en la parábola, de tal modo que pueda moverse alrededor de toda la parábola.



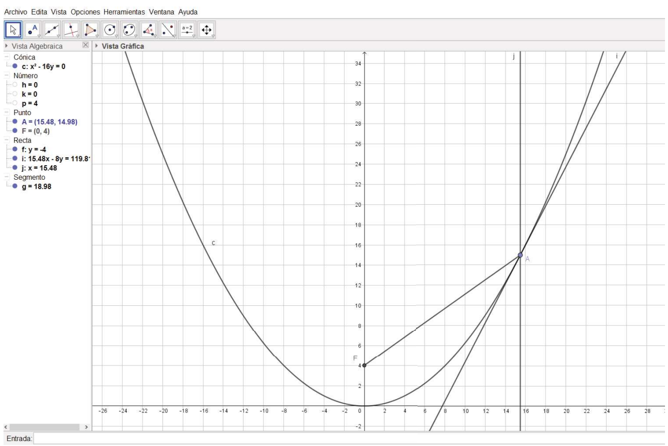
3. Dibuja un segmento de recta que vaya desde el foco (F) hasta el punto localizado en la parábola, tal como lo muestra la figura de abajo.



4. Grafica una recta tangente a la parábola en el punto dibujado en el numeral 2, utilizando el botón de Rectas, opción Tangentes, y seleccionando el punto y luego la parábola.

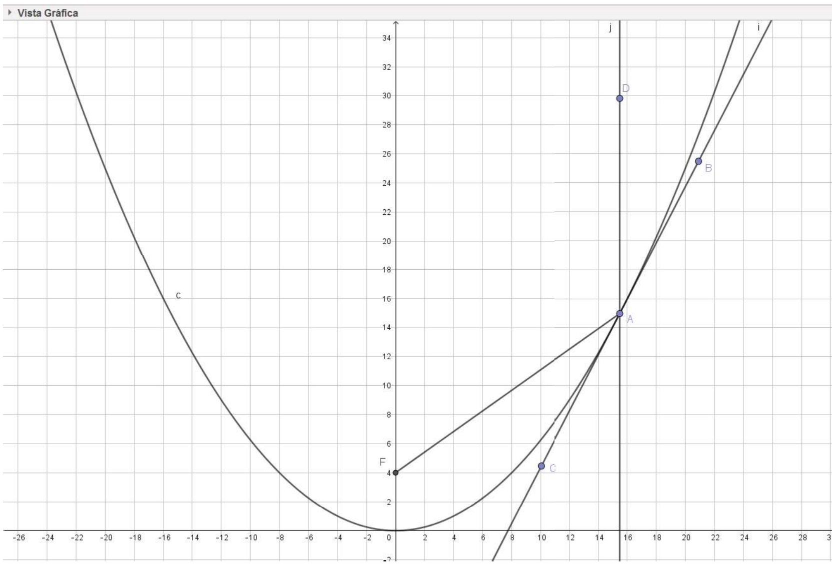


5. Dibuja una recta paralela al eje y que pasa por el punto dibujado en el numeral 2, utilizando el botón Rectas, opción Recta paralela, seleccionando el punto y el eje y. Se obtiene la siguiente figura:

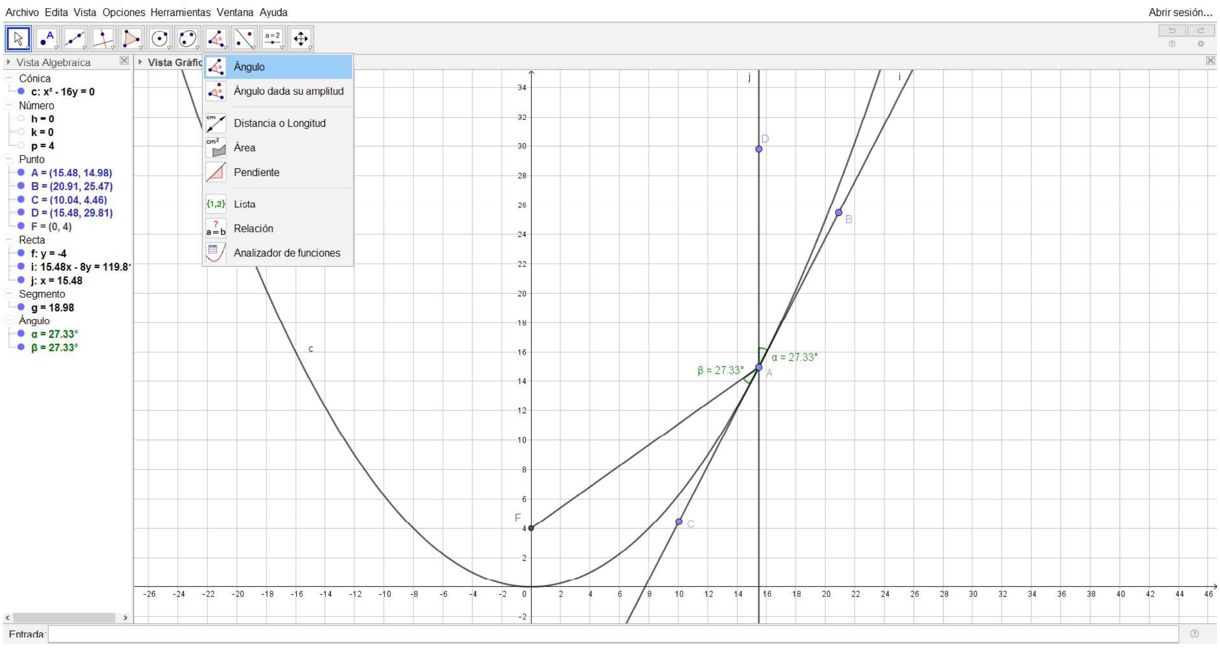


Unidad 3

6. Coloca los puntos B y C sobre la recta tangente, y el punto D sobre la recta paralela al eje y, tal como lo muestra la figura.



7. Mide los ángulos DAB y FAC, utilizando el botón de ángulos, opción Ángulo, tal como lo muestra la figura.



8. Con el cursor puedes mover el punto sobre la parábola y verificar que el ángulo con que se refleja la recta emitida por el foco se mantiene constante respecto de la recta paralela al eje de la parábola. También puedes dar clic derecho sobre el punto y marcar la opción animación para recorrer todos los puntos de la parábola de manera automática.

Actividades

1. Realiza una contrucción para verificar la propiedad de los focos de una elipse que se utilizó en las aplicaciones sobre la elipse.

2. Realiza una construcción para verificar la propiedad de los focos de una hipérbola que se utilizó en las aplicaciones sobre la hipérbola.

5.4 Práctica en GeoGebra: problemas sobre el lugar geométrico de las cónicas

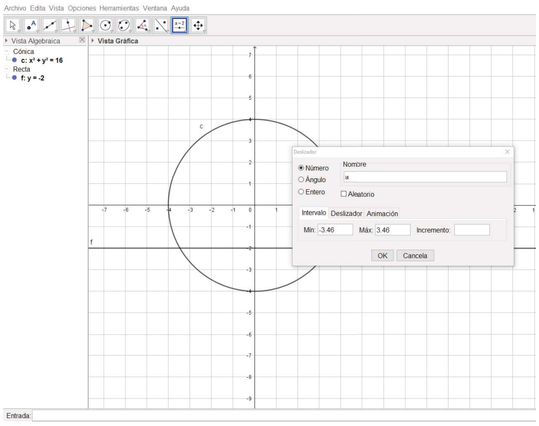
En esta práctica se utilizarán los recursos de GeoGebra para **verificar** las respuestas de los problemas sobre lugar geométrico de secciones cónicas que se resolvieron en la clase 4.10. Para ello sigue los pasos indicados en la parte de "Práctica" y construye los lugares geométricos correspondientes. Luego trabaja en GeoGebra la parte "Actividades" que está al final de esta práctica.

Práctica

Retomando el problema 4 de la clase 4.10:

Identifica el lugar geométrico que determina el centro de una circunferencia cuyo radio varía de modo que siempre sea tangente a la recta $y + 2 = 0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Asumiendo que dicha circunferencia siempre se mueve por encima de la recta y adentro de la circunferencia.

1. Utiliza la barra de entrada para graficar la recta $y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

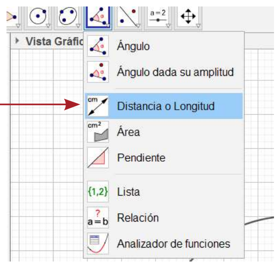


2. Inserta un deslizador con la variable a, seleccionando el botón deslizador y dando un clic sobre la Vista Gráfica en el lugar que se quiere colocar, usar el valor mínimo de –3.46 y máximo de 3.46 y presionar "enter".

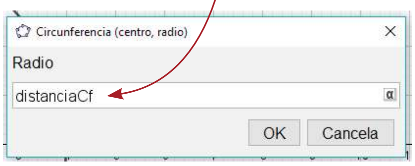
3. Para comprobar la respuesta del problema, la cual es "$y = -\frac{x^2}{4} + 1$", ingresa en la barra de Entrada el punto C = $(x, -\frac{x^2}{4} + 1)$, escribiendo:

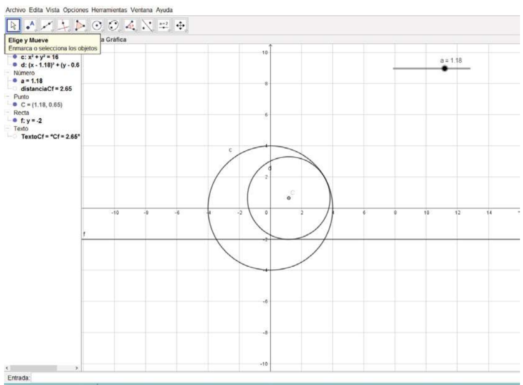
C = (a, (–a^2 / 4) + 1)

4. En el botón de Ángulo selecciona la opción Distancia o Longitud, selecciona el punto C graficado en el paso 3, y la recta $y + 2 = 0$. Después de ello aparecerá en la Vista Gráfica una etiqueta que muestra la distancia del punto C a la recta, y en la Vista Algebraica aparecerá una variable con nombre "distanciaCf", la cual almacena el valor numérico de la distancia medida.

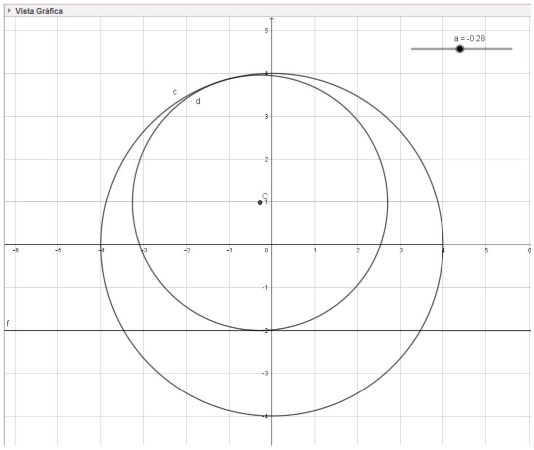


5. Ahora construye una circunferencia, utilizando la opción de centro y radio, luego selecciona como centro el punto C, construido en el paso 3, y en la entrada del radio escribe la variable que almacena la distancia, es decir, "distanciaCf". Se puede observar el resultado obtenido, en la figura de abajo.

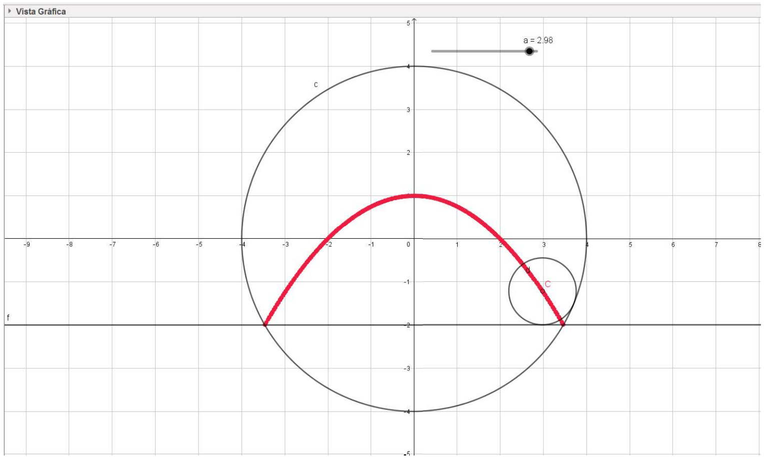




6. Observa que la circunferencia graficada en el paso 5 es tangente tanto a la recta $y + 2 = 0$ como a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Puedes mover el deslizador horizontalmente y ver cómo se mueve dicha circunferencia.



7. Haz clic derecho sobre el punto C y selecciona la opción rastro (se puede cambiar el color del punto, si se desea), ahora mueve el deslizador de nuevo y observa cómo se marca el lugar geométrico con el rastro.



8. Finalmente puedes dar clic derecho sobre el deslizador y seleccionar la opción animación para correr automáticamente el lugar geométrico y comprobar que la respuesta es correcta.

Actividades

1. Cambia el rango entre el valor mínimo y el máximo del deslizador, observa el resultado y escribe la conclusión de este resultado, enfocándote en la tangencia de la circunferencia con la recta $y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

2. Realiza una construcción para verificar la respuesta al problema 2 y 3 de los problemas de la unidad de la clase 4.10:
   a) Determina el lugar geométrico que resulta de tomar una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y reducir las coordenadas en y de cada punto de ella a $\frac{3}{4}$.

   b) Tomando un segmento AB de longitud 5 sobre el plano cartesiano, que cumple que el punto A se mueve sobre el eje x y el punto B sobre el eje y. Determina el lugar geométrico de los puntos del segmento AB que cumplen estar a una proporción 3:2.