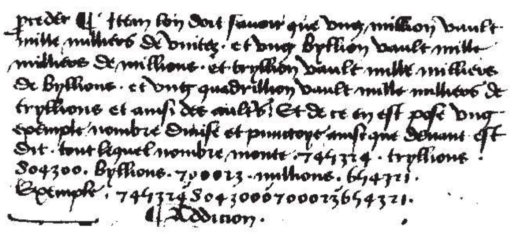
Unidad 4

Funciones trascendentales I



Extracto del manuscrito original del Triparty en la science des nombres.

El concepto de potencia se remonta a la Grecia antigua, cuando Euclides (300 a.C.) utilizó este término para indicar el número de veces que debía multiplicarse un número por sí mismo. El pensador francés Nicole Oresme (siglo XIV d.C.) presentó por primera vez la noción de exponente racional e irracional. En el trabajo *Triparty en la science des nombres* (1484) del matemático francés Nicolas Chuquet (siglo XV d.C.), aparecen por primera vez los números negativos como coeficientes, exponentes y soluciones de ecuaciones. Más adelante, alrededor de 1694, el matemático suizo Johann Bernoulli (Siglos XVII-XVIII d.C.) publica un importante trabajo acerca de las funciones exponenciales.

A finales del siglo XIX varios problemas de la naturaleza se describieron matemáticamente por medio de las funciones exponenciales. Svante Arrhenius formalizó la relación entre la constante cinética de una reacción química y la temperatura. Thomas Maltus establece que el crecimiento poblacional tiene un comportamiento exponencial a través del tiempo. Y las observaciones de Newton sobre el enfriamiento de los cuerpos dieron paso a la ley del enfriamiento, que tiene un decaimiento exponencial.

La población mundial aumenta de manera exponencial.

Se estudiarán en esta unidad las propiedades de los exponentes enteros, exponentes racionales y se generalizará la potencia para todo exponente real. Esto permitirá definir la función exponencial y estudiar sus propiedades.

1.1 Propiedades de potencias con igual base y exponente natural

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones expresando tu respuesta como la potencia de un número.

a) $2^2 \times 2^3$ b) $3^6 \div 3^2$ c) $(2^2)^3$

Solución

Si a es un número real y n un entero positivo, entonces $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{- veces}}$

exponente
$a^n \longrightarrow$ potencia
base

a) $2^2 \times 2^3$

$$2^2 \times 2^3 = \underbrace{(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)}_{\text{5-veces}}$$
$$= 2^5$$

Se cumple que: $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$.

b) $3^6 \div 3^2$

$$3^6 \div 3^2 = \frac{3^6}{3^2}$$
$$= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}} \quad \text{simplificando,}$$
$$= \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{4- veces}}$$
$$= 3^4$$

Se cumple que: $3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$.

c) $(2^2)^3$

$$(2^2)^3 = (2^2) \times (2^2) \times (2^2)$$
$$= (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$$
$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{6-veces}}$$
$$= 2^6$$

Se cumple que: $(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6$.

Definición

1. Si a y b son números reales, m y n enteros positivos, las reglas para efectuar operaciones con potencias de igual base son:

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (si $a \neq 0$ y $m > n$) c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

La propiedad del literal b) también se escribe como fracción: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Si a es un número real:
$a^1 = a$

2. Si a es un número real positivo, entonces:

a) Si n es par entonces:

$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{cantidad par de números negativos}} = a^n$$

b) Si n es impar entonces

$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{\text{cantidad impar de números negativos}} = -a^n$$

Problemas

Expresa las siguientes operaciones como una sola potencia.

a) $3^6 \times 3^4$ b) $(-3)^2 \times (-3)^4$ c) $(-2)^3 \times (-2)^2$

d) $5^7 \div 5^3$ e) $(-2)^5 \div (-2)^3$ f) $(-3)^8 \div (-3)^5$

g) $(6^5)^2$ h) $(10^4)^3$ i) $[(-3)^3]^5$

1.2 Propiedades de potencias con igual exponente natural

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones expresando tu respuesta como la potencia de un número.

a) $2^3 \times 3^3$

b) $\frac{6^3}{2^3}$

Solución

a) $2^3 \times 3^3$

$2^3 \times 3^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$; asociando,

$= \underbrace{6 \times 6 \times 6}_{\text{3-veces}}$

$= 6^3$

Se cumple que: $2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$.

b) $\frac{6^3}{2^3}$

Del problema anterior se tiene: $6^3 = 2^3 \times 3^3$.

Al dividir ambos miembros de la igualdad por 2^3 se tiene:

$\frac{6^3}{2^3} = \frac{\cancel{2^3} \times 3^3}{\cancel{2^3}} = 3^3$

Se cumple que: $\frac{6^3}{2^3} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^3$.

Conclusión

- Si a y b son números reales y m es un entero positivo, las reglas para efectuar operaciones de potencias con igual exponente son:

  a) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

  b) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (si $b \neq 0$)

- La propiedad b) se expresa como división así:

$$a^m \div b^m = (a \div b)^m$$

- Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales, entonces:

$$a_1^m \times a_2^m \times \cdots \times a_n^m = (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n)^m$$

Ejemplo

Expresa el producto $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ como una sola potencia.

$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 30^2$

Por lo tanto, $2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 30^2$.

Problemas

Expresa las siguientes operaciones como una sola potencia.

a) $6^{10} \times 4^{10}$

b) $(-3)^7 \times 6^7$

c) $5^5 \times (-8)^5$

d) $(-2)^5 \times (-7)^5$

e) $12^5 \div 6^5$

f) $20^3 \div (-4)^3$

g) $(-24)^4 \div 3^4$

h) $(-15)^6 \div (-5)^6$

i) $(-35)^4 \div (-7)^4$

1.3 Exponente cero y exponente negativo*

Problema inicial

Asume que la propiedad $a^m \div a^n = a^{m-n}$ se cumple para todo entero m y n. Efectúa las siguientes divisiones de dos maneras distintas:

a) $6^3 \div 6^3$

b) $3^3 \div 3^7$

Solución

a) $6^3 \div 6^3$

Utilizando las propiedades de la división

$6^3 \div 6^3 = 1$.

Si las propiedades de exponentes se verifican en este caso, entonces:

$6^3 \div 6^3 = 6^{3-3}$

$= 6^0$

Por lo tanto, $6^3 \div 6^3 = 6^0$.

Así 6^0 y 1 representan el mismo número.

b) $3^3 \div 3^7$

Utilizando la simplificación:

$$3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7}$$

$$= \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}$$

$$= \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= \frac{1}{3^4}$$

Por lo tanto, $3^3 \div 3^7 = \frac{1}{3^4}$.

Si las propiedades de exponentes se verifican en este caso, entonces:

$3^3 \div 3^7 = 3^{3-7}$

$= 3^{-4}$

Por lo tanto, $3^3 \div 3^7 = 3^{-4}$

Entonces 3^{-4} y $\frac{1}{3^4}$ representan el mismo número.

Definición

a) **El exponente cero.**

Si a es un número real con $a \neq 0$ entonces:

$$a^0 = 1.$$

b) **El exponente negativo.**

Si a es un número real con $a \neq 0$ y n un número entero positivo entonces:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Con esta definición las propiedades de exponentes positivos se aplican también a los exponentes negativos y cero. Si a y b son reales, m y n enteros:

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Problemas

1. Escribe las siguientes fracciones como una potencia con exponente negativo:

a) $\frac{1}{2^3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{(-5)^5}$ d) $\frac{1}{10^8}$

2. Escribe las siguientes potencias con exponente negativo como fracciones:

a) 2^{-7} b) 3^{-5} c) 5^{-1} d) 7^{-2}

1.4 Raíz n-ésima de un número real

Problema inicial

Determina un valor real de x en cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $x^3 = 27$

b) $x^4 = 625$

Solución

a) La descomposición prima de 27 es:

27	3
9	3
3	3
1	

$27 = 3^3$

Por lo tanto $x = 3$, es solución de la ecuación.

Así, a 3 se le denomina la raíz cúbica de 27 y se denota por $3 = \sqrt[3]{27}$.

b) La descomposición prima de 625 es:

625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$625 = 5^4$

Por lo tanto, $x = 5$ es solución de la ecuación.

A 5 se le denomina la raíz cuarta de 625: $5 = \sqrt[4]{625}$.

También $x = -5$, es solución de la ecuación.

A –5 se le denomina raíz cuarta negativa de 625:
$-5 = -\sqrt[4]{625}$

Definición

Sea n un entero positivo, un número b que cumple la condición $b^n = a$ es llamado **raíz n-ésima** de a.

Al trabajar con raíces n-ésimas de números reales se distinguen dos casos:

1. Si n es impar, a cada número real a le corresponde una única raíz n-ésima y se denota por $\sqrt[n]{a}$.
2. Si n es par, a cada número real positivo a le corresponden dos raíces n-ésima reales, una positiva $\sqrt[n]{a}$ y una negativa $-\sqrt[n]{a}$.

índice ← $\sqrt[n]{a}$ → radical

radicando

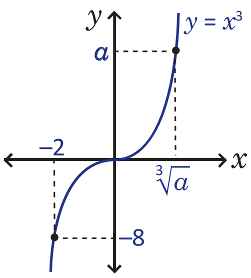
Si $n = 1 \Rightarrow \sqrt[1]{a} = a$.
Si $n = 2 \Rightarrow \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Si n es un entero positivo entonces $\sqrt[n]{0} = 0$.

Si se cumple una de las siguientes condiciones: n es impar o n es par y $a > 0$ entonces $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Ejemplo

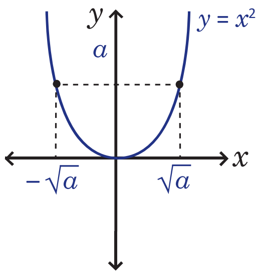
a) El número –8 tiene una única raíz cúbica:



$-8 = (-2)^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{-8} = -2.$

Todo número real a tiene una única raíz cúbica $\sqrt[3]{a}$.

b) El número 16 tiene dos raíces cuadradas:



$\sqrt{16} = 4$ y $-\sqrt{16} = -4$

Todo número real positivo a tiene dos raíces cuadradas $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Problemas

Expresa las siguientes igualdades utilizando la notación de raíz n-ésima.

a) $2^3 = 8$

b) $(-5)^3 = -125$

c) $3^4 = 81$

d) $(-7)^4 = 2401$

e) $6^2 = 36$

f) $(-2)^5 = -32$

g) $(-4)^5 = -1024$

h) $5^5 = 3125$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

j) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

k) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

l) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

1.5 Expresión de números sin el símbolo radical

Problema inicial

Expresa los siguientes números sin el símbolo radical.

a) $\sqrt[3]{729}$

b) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por tres.

Solución

a) $\sqrt[3]{729}$

$729 = 3^6$ se descompone 729,

$= 3^3 \times 3^3$ se reescribe como producto de potencias de índice 3,

$= (3 \times 3)^3$ al utilizar propiedades de potencia,

$= 9^3$.

Es decir, al elevar 9 al cubo se obtiene 729.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{729} = 9$.

b) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

$\frac{16}{81} = \frac{2^4}{3^4}$ se descomponen 16 y 81,

$= \left(\frac{2}{3}\right)^4$ al utilizar propiedades de potencia,

entonces al elevar $\frac{2}{3}$ a la cuarta se obtiene $\frac{16}{81}$.

Por lo tanto, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$.

Conclusión

Para escribir sin radical el número real $\sqrt[n]{a}$ realiza lo siguiente:

Ejemplo: $\sqrt[3]{1728}$

1. Escribe la descomposición prima de a, si el radicando es una fracción se descompone el numerador y el denominador. → $1728 = 2^6 \times 3^3$
2. Expresa la descomposición como producto de potencias con exponente n. → $1728 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$
3. Utiliza la propiedad de producto o división de potencias con el mismo exponente. → $1728 = (2 \times 2 \times 3)^3 = 12^3$
4. Se obtiene una expresión de la forma $a = b^n$, entonces $\sqrt[n]{a} = b$. → $\sqrt[3]{1728} = 12$

Si n es un entero impar y a un número real entonces $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Si n es par, las raíces n-ésimas de números negativos no son números reales.

Problemas

Expresa los siguientes números sin el símbolo radical.

a) $\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt[5]{243}$

c) $\sqrt[7]{128}$

d) $\sqrt[5]{100\,000}$

e) $\sqrt[3]{-216}$

f) $\sqrt[4]{256}$

g) $\sqrt[3]{\frac{512}{343}}$

h) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$

1.6 Operaciones con raíces n-ésimas

Problema inicial

Utiliza la definición de raíz n-ésima para expresar con un solo radical las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20}$ b) $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

Solución

a) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20}$

$(\sqrt[3]{6})^3 = 6$ y $(\sqrt[3]{20})^3 = 20$ se utiliza la definición de raíz cúbica,

$(\sqrt[3]{6})^3 \times (\sqrt[3]{20})^3 = 6 \times 20$ se multiplican miembro a miembro las igualdades anteriores,

$(\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20})^3 = 6 \times 20$ al aplicar propiedades de potencia en el miembro izquierdo,

$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{6 \times 20}$ se expresa la potencia como raíz cúbica,

$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{120}$ se efectúa el producto.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{120}$.

b) $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3}$

$(\sqrt[4]{96})^4 = 96$ y $(\sqrt[4]{3})^4 = 3$ se utiliza la definición de raíz cuarta,

$(\sqrt[4]{96})^4 \div (\sqrt[4]{3})^4 = 96 \div 3$ se divide miembro a miembro,

$(\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3})^4 = 96 \div 3$ al aplicar propiedades de potencia en el miembro izquierdo,

$\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{96 \div 3}$ se expresa la potencia como raíz cuarta ($\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} > 0$),

$\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{32}$ se efectúa la división.

Por lo tanto, $\sqrt[4]{96} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{32}$.

c) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^2 = \sqrt[3]{128}$ se utiliza la definición de raíz cuadrada,

$\left[\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^2\right]^3 = (\sqrt[3]{128})^3 = 128$ se utiliza la definición de raíz cúbica,

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^{2 \times 3} = 128$ al aplicar propiedades de potencia,

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}}\right)^6 = 128$ se efectúa el producto,

$\sqrt{\sqrt[3]{128}} = \sqrt[6]{128}$ se expresa la potencia como raíz sexta $\left(\sqrt{\sqrt[3]{128}} > 0\right)$.

Por lo tanto, $\sqrt{\sqrt[3]{128}} = \sqrt[6]{128}$.

Unidad 4

Conclusión

Para efectuar:		Se tiene que:		Escribiendo como raíz n-ésima:
a) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b})^n = a \times b$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
b) $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$	$\Rightarrow$	$(\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b})^n = a \div b$	$\Rightarrow$	$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$
c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	$\Rightarrow$	$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m \times n} = a$	$\Rightarrow$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$

Para simplificar una raíz n-ésima se utiliza la propiedad de la multiplicación:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a^n \times b} &= \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b} \\ &= a\sqrt[n]{b}\end{aligned}$$

Si $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son números reales entonces:
$\sqrt[n]{a_1} \times \sqrt[n]{a_2} \times \cdots \times \sqrt[n]{a_m} = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_m}$

La propiedad b) también se utiliza así:

b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Simplificar una raíz es expresarla con un radicando menor al inicial.

Simplificar a la mínima expresión es simplificar el radicando al menor valor posible.

Después de efectuar una operación con radicales siempre debe simplificarse a la mínima expresión.

Ejemplo

1. Simplifica los resultados del Problema inicial.

a) $\sqrt[3]{120}$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{120} &= \sqrt[3]{2^3 \times 3 \times 5} \\ &= 2\sqrt[3]{3 \times 5} \\ &= 2\sqrt[3]{15}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{120} = 2\sqrt[3]{15}$.

b) $\sqrt[4]{32}$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{32} &= \sqrt[4]{2^4 \times 2} \\ &= 2\sqrt[4]{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$.

c) $\sqrt[6]{128}$

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{128} &= \sqrt[6]{2^6 \times 2} \\ &= 2\sqrt[6]{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt[6]{128} = 2\sqrt[6]{2}$.

2. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[8]{4} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2} \times \sqrt[8]{4}$

$$\begin{aligned}\sqrt[8]{4} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2} \times \sqrt[8]{4} &= \sqrt[8]{4 \times 8 \times 2 \times 4} \\ &= \sqrt[8]{2^2 \times 2^3 \times 2 \times 2^2} \\ &= \sqrt[8]{2^8} \\ &= 2\end{aligned}$$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} &= \sqrt[3]{\frac{108}{4}} \\ &= \sqrt[3]{27} \\ &= \sqrt[3]{3^3} \\ &= 3\end{aligned}$$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones, simplifica a la mínima expresión tu respuesta.

a) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{10}$ b) $-\sqrt[4]{75} \times \sqrt[4]{50}$ c) $-\sqrt[5]{45} \times (-\sqrt[5]{81})$

d) $\sqrt[3]{320} \div \sqrt[3]{10}$ e) $\sqrt[3]{486} \div (-\sqrt[3]{6}\,)$ f) $-\sqrt[4]{192} \div (-\sqrt[4]{6}\,)$

g) $\sqrt{\sqrt{80}}$ h) $-\sqrt{\sqrt[3]{640}}$ i) $\sqrt[3]{-\sqrt{256}}$

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3.

1.7 Suma, resta y potencia de raíces n-ésimas

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

b) $(\sqrt[6]{4})^3$

Dos raíces pueden sumarse o restarse si son semejantes es decir, si tienen igual índice e igual radicando.

Solución

a) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

Simplificando a la mínima expresión:

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = 2\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \times 3^3} = 3\sqrt[3]{2}$

Se efectúa la suma de raíces semejantes:

$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2}$

$= 5\sqrt[3]{2}$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = 5\sqrt[3]{2}$.

b) $(\sqrt[6]{4}\,)^3$

Se descompone la potencia como producto:

$(\sqrt[6]{4}\,)^3 = \sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{4}$

$= \sqrt[6]{4 \times 4 \times 4}$

$= \sqrt[6]{4^3}$ se expresa como potencia.

Simplificando: $\sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{(2^2)^3} = \sqrt[6]{2^6} = 2$.

Por lo tanto, $(\sqrt[6]{4})^3 = 2$.

Conclusión

1. Los pasos para realizar suma o resta de raíces n-ésimas son:
   - Simplificar las raíces a la mínima expresión.
   - Sumar o restar raíces semejantes.

2. La potencia de una raíz real cumple $(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \cdots \times \sqrt[n]{a}}_{m\text{-veces}}$

   Utilizando las propiedades de raíz n-ésima: $(\sqrt[n]{a}\,)^m = \sqrt[n]{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{-veces}}}$

   Reescribiendo como potencia el radicando: $\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$

El número $\sqrt[n]{a}$ no es real, si n es par y a negativo.

Por ejemplo: $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[6]{-1}$ y $\sqrt[6]{-2}$, no son números reales.

Problemas

1. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81}$ b) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{512}$ c) $\sqrt[4]{80} + \sqrt[4]{405}$ d) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135}$

e) $\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{108}$ f) $\sqrt[3]{576} - \sqrt[3]{72}$ g) $\sqrt[3]{486} - \sqrt[3]{144}$ h) $\sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48}$

i) $(\sqrt[5]{27})^2$ j) $(\sqrt[6]{8})^5$ k) $(\sqrt[3]{25})^2$ l) $(\sqrt[4]{27})^3$

2. Para demostrar que $2 = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}}$, realiza los siguientes pasos:

a) Demuestra que $(1 + \sqrt{3})^3 = 10 + 6\sqrt{3}$, luego escribe esta igualdad como raíz cúbica.

b) Demuestra que $(-1 + \sqrt{3})^3 = -10 + 6\sqrt{3}$, luego escribe esta igualdad como raíz cúbica.

c) Efectúa la resta de las raíces cúbicas de los literales anteriores y concluye.

Unidad 4

1.8 Exponente racional

Problema inicial

1. Simplifica las siguientes expresiones, escribe tu respuesta como una potencia.

a) $\sqrt{2^6}$

b) $\sqrt[3]{2^{12}}$

2. Demuestra que $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$.

Recuerda que para todo número real a positivo:
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$ y $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Solución

1. a) $\sqrt{2^6} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2}$

$= 2 \times 2 \times 2$

$= 2^3$.

Por lo tanto, $\sqrt{2^6} = 2^3$.

Se observa que $3 = \frac{6}{2}$ $\longrightarrow$ exponente, $\longrightarrow$ índice

b) $\sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^4$.

Por lo tanto, $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4$.

Se observa que $4 = \frac{12}{3}$ $\longrightarrow$ exponente, $\longrightarrow$ índice

2. $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{\sqrt{2^4}}$ por propiedades de raíces n-ésimas,

$= \sqrt[3]{\sqrt{(2^2)^2}}$ al aplicar propiedades de potencia,

$= \sqrt[3]{2^2}$ se utiliza que $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Por lo tanto, $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$. Se observa que $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\longrightarrow$ exponente, $\longrightarrow$ índice

Definición

Si a es un número real positivo, m y n son números enteros y n es positivo, se define:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Una potencia con exponente racional $\frac{m}{n}$ es la raíz n-ésima de una potencia m-ésima.

Además, si r es un entero positivo se cumple que $\sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n]{a^m}$, por lo que es válida la simplificación de exponentes racionales, para todo $a > 0$:

$$a^{\frac{mr}{nr}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Problemas

1. Escribe las siguientes raíces como potencias con exponente fraccionario, simplifica si se puede.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3^3}$ c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{3^2}$

e) $\sqrt[4]{5^2}$ f) $\sqrt[5]{2^{10}}$ g) $\sqrt[5]{6^3}$ h) $\sqrt[6]{5^2}$

2. Escribe las siguientes potencias fraccionarias como raíces de una potencia.

a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $3^{\frac{5}{2}}$ c) $2^{\frac{5}{2}}$ d) $7^{\frac{3}{8}}$

e) $12^{\frac{3}{7}}$ f) $11^{\frac{7}{2}}$ g) $9^{\frac{5}{3}}$ h) $10^{\frac{1}{4}}$

1.9 Propiedades de los exponentes racionales

Problema inicial

Realiza las siguientes operaciones expresando tu respuesta como potencia con exponente racional.

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}}$ b) $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}}$ c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$ d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}$ e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}}$

Solución

a) $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[4]{2^3}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[4]{2^5 \times 2^3}$

$= \sqrt[4]{2^8}$

$= 2^{\frac{8}{4}}$

$= 2^2.$

Por lo tanto, $2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = 2^2$. Observa que: $2^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} = 2^2$.

b) $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^{10}} \div \sqrt[3]{3^1}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[3]{3^{10} \div 3^1}$

$= \sqrt[3]{3^9}$

$= 3^{\frac{9}{3}}$

$= 3^3.$

Por lo tanto, $3^{\frac{10}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}} = 3^3$. Se observa que: $3^{\frac{10}{3}-\frac{1}{3}} = 3^3$.

c) $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt[3]{8^2})^{\frac{1}{2}}$ se escribe como raíz cúbica,

$= \sqrt[2]{\sqrt[3]{8^2}}$ se escribe como raíz cuadrada,

$= \sqrt[6]{8^2}$

$= 8^{\frac{2}{6}}$

$= 8^{\frac{1}{3}}.$

Por lo tanto $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$. Se observa que: $8^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}}$.

d) $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{9^2}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[3]{3^2 \times 9^2}$

$= \sqrt[3]{(3 \times 9)^2}$

$= \sqrt[3]{27^2}$

$= 27^{\frac{2}{3}}.$

Por lo tanto $3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$.

Observa que: $(3 \times 9)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$.

e) $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{32^3} \div \sqrt[4]{2^3}$ se escribe como raíz,

$= \sqrt[4]{32^3 \div 2^3}$

$= \sqrt[4]{(32 \div 2)^3}$

$= \sqrt[4]{16^3}$

$= 16^{\frac{3}{4}}.$

Por lo tanto, $32^{\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$. Se observa que: $(32 \div 2)^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$.

Conclusión

1. Las propiedades con exponentes enteros se aplican también a los exponentes racionales. Si a y b son números reales positivos, m y n son números racionales, entonces:

   a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ d) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. Para simplificar una potencia racional se debe verificar que la base sea la menor posible.

Ejemplo

Simplifica las respuestas de los literales c), d) y e) del problema inicial.

c) $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{\cancel{3}\times 1}{\cancel{3}}} = 2$ d) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{\cancel{3}\times 2}{\cancel{3}}} = 3^2$ e) $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{\cancel{4}\times 3}{\cancel{4}}} = 2^3$

Problemas

Realiza las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta.

a) $2^{\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{8}{5}}$ b) $9^{\frac{1}{5}} \times 9^{\frac{3}{10}}$ c) $25 \div 25^{\frac{1}{2}}$ d) $27^{\frac{5}{3}} \div 27$

e) $(9^{\frac{9}{7}})^{\frac{7}{6}}$ f) $(8^{\frac{10}{9}})^{\frac{3}{2}}$ g) $16^{\frac{5}{6}} \times 4^{\frac{5}{6}}$ h) $98^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}}$

1.10 Operaciones con raíces de distinto índice

Problema inicial

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

Solución

Se escribe cada raíz como exponente racional:

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}} \\ &= 3^1 \\ &= 3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3$.

b) $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} &= 9^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{1}{3}} \div 9^{\frac{1}{12}} \\ &= 9^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}} \\ &= 9^{\frac{3}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}} \\ &= 9^{\frac{6}{12}} \\ &= 9^{\frac{1}{2}} \\ &= (3^2)^{\frac{1}{2}} && \text{simplificando} \\ &= 3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9} = 3$.

Conclusión

Para operar raíces con distinto índice, se realizan los siguientes pasos:

1. Cada raíz se escribe como potencia con exponente racional.
2. Se efectúan las operaciones utilizando propiedades de exponentes racionales.
3. Se simplifica el resultado.

Ejemplo

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} &= \sqrt{2^5} \times \sqrt[3]{2^2} \div \sqrt[6]{2} \\ &= 2^{\frac{5}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{15}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\frac{18}{6}} \\ &= 2^3 \\ &= 8.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{32} \times \sqrt[3]{4} \div \sqrt[6]{2} = 8$.

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{3}{6}+\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{4}{6}} \\ &= 3^{\frac{2}{3}} && \text{no se puede simplificar,} \\ &= \sqrt[3]{3^2} && \text{se escribe como raíz,} \\ &= \sqrt[3]{9}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3} = \sqrt[3]{9}$.

Problemas

Realiza las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta.

a) $\sqrt{8} \times \sqrt[4]{8} \div \sqrt[12]{8}$

b) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}$

d) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{32}$

e) $\sqrt{243} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{3}$

f) $\sqrt[4]{25} \div \sqrt[6]{5}$

1.11 Practica lo aprendido

1. Efectúa las siguientes operaciones, expresa el resultado utilizando potencias con exponente positivo:

a) $5^6 \times 5^5$ b) $(-4) \times (-4)^2$ c) $2^6 \times 2^{-3}$ d) $3^{-7} \times 3^7$

e) $(-6)^{-1} \times (-6)^{-2}$ f) $3^9 \div 3^6$ g) $2 \div 2^4$ h) $(-5)^2 \div (-5)^{-3}$

i) $4^{-5} \div 4^3$ j) $(-2)^{-3} \div (-2)^{-2}$ k) $(4^2)^3$ l) $[(-3)^2]^{-3}$

m) $(2^{-4})^3$ n) $(6^{-1})^{-1}$ o) $(5^{-2})^{-2}$ p) $[(-2)^{-3}]^{-5}$

2. Realiza los siguientes ejercicios, expresa el resultado utilizando potencias con exponente positivo:

a) $3^4 \times 5^4$ b) $2^{-6} \times 3^{-6}$ c) $(-4)^2 \times 8^2$ d) $(-6)^{-3} \times (-5)^{-3}$

e) $9^5 \div 3^5$ f) $16^{-2} \div (-2)^{-2}$ g) $(-35)^7 \div 5^7$ h) $(-18)^{-4} \div (-3)^{-4}$

3. Realiza las siguientes operaciones simplificando tu respuesta:

a) $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{24}$ b) $\sqrt[3]{-20} \times \sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{6}$ d) $\sqrt[3]{80} \div \sqrt[3]{-5}$

e) $\sqrt{\sqrt{324}}$ f) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189}$ g) $\sqrt[4]{64} - \sqrt[4]{4}$ h) $(\sqrt[3]{24})^2$

4. Simplifica las siguientes raíces:

Escribe cada raíz como potencia racional.

a) $\sqrt[4]{4}$ b) $\sqrt[6]{9}$ c) $\sqrt[6]{27}$ d) $\sqrt[6]{16}$

5. Efectúa las siguientes operaciones, simplifica tu respuesta a la mínima expresión:

a) $\sqrt[6]{9} \times \sqrt[4]{9}$ b) $\sqrt{8} \times \sqrt[8]{8} \times \sqrt[8]{2}$ c) $\sqrt{27} \div \sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[6]{2}$

6. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$ b) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$

Exponente irracional

El número $\sqrt{2}$ es irracional, por lo que su valor solo es aproximable: $\sqrt{2} = 1.414213...$

Considera la siguiente sucesión de potencias racionales:
$3^1 = 3$, $3^{1.4} = 4.655536...$, $3^{1.41} = 4.706965...$, $3^{1.414} = 4.727695...$, $3^{1.4142} = 4.728733...$

La sucesión se aproxima al número real 4.728804...
Los exponentes de la sucesión se aproximan al valor $\sqrt{2}$. Por lo que, se dirá que la sucesión se aproxima al valor $3^{\sqrt{2}}$.

De esta forma, si x es un número irracional y $a > 0$, es posible definir la potencia a^x siguiendo el proceso anterior.

Por lo tanto, la potencia a^x está definida para todo número real x y $a > 0$. Las propiedades vistas anteriormente se generalizan para todo exponente real. Si a y b son números reales positivos, r y s números reales:

a) $a^r \times a^s = a^{r+s}$ b) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ c) $(a^r)^s = a^{r \times s}$ d) $a^r \times b^r = (a \times b)^r$ e) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Unidad 4

2.1 Definición de la función exponencial

Problema inicial

Para cada literal completa la tabla y grafica la función dada.

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					

Solución

a) $f(x) = 2^x$

Si $x = -2$ se tiene $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

Si $x = -1$ se tiene $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Si $x = 0$ se tiene $f(0) = 2^0 = 1$

Si $x = 1$ se tiene $f(1) = 2^1 = 2$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = 2^2 = 4$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Si $x = -2$ se tiene $f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2 = 4$

Si $x = -1$ se tiene $f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$

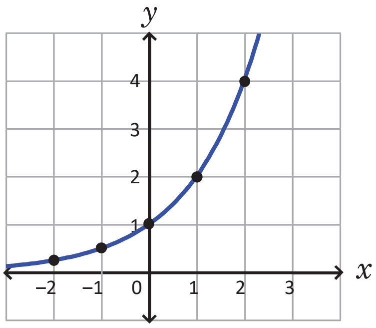
Si $x = 0$ se tiene $f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$

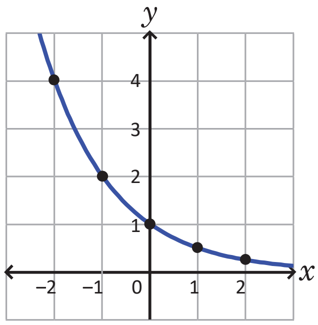
Si $x = 1$ se tiene $f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Se traza una curva sobre los puntos obtenidos en cada caso.





Definición

Sea a un número real positivo y diferente de 1. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ se llama **función exponencial**. Al número a se le llama **base**.

La gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ pasa por los puntos (0, 1) y (1, a).

En la función exponencial la variable x está en el exponente.

Si se cumple que $0 < a < 1$, entonces $f(x) = a^x$, se puede escribir de la forma $f(x) = b^{-x}$, donde $b = \frac{1}{a} > 1$.
Por ejemplo $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones exponenciales:

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 3^{-x}$ c) $f(x) = 4^x$ d) $f(x) = 4^{-x}$

2.2 Funciones exponenciales simétricas

Problema inicial

1. Grafica las siguientes funciones en un mismo plano cartesiano.
   a) $f_1(x) = 3^x$ b) $f_2(x) = 3^{-x}$ c) $f_3(x) = -3^x$
2. Compara la coordenada en x de los puntos de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ que tienen la misma coordenada en y.
3. Compara la coordenada en y de los puntos de $f_1(x)$ y $f_3(x)$ que tienen la misma coordenada en x.

Solución

1. a) $f_1(x) = 3^x$

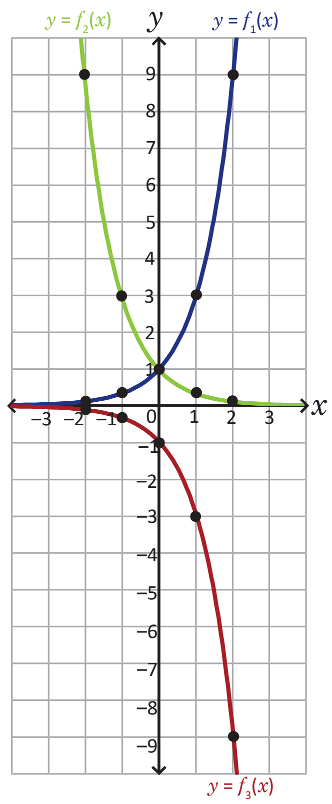
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

b) $f_2(x) = 3^{-x}$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

c) $f_3(x) = -3^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	-9



2.

$f_1(x) = 3^x$	$f_2(x) = 3^{-x}$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(2, \frac{1}{9}\right)$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, \frac{1}{3}\right)$
(0, 1)	(0, 1)
(1, 3)	(−1, 3)
(2, 9)	(−2, 9)

Si (x, y) es un punto de la gráfica de f_1 entonces $(-x, y)$ es un punto de la gráfica de f_2. Las gráficas son simétricas respecto al eje y.

3.

$f_1(x) = 3^x$	$f_3(x) = -3^x$
$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(-2, -\frac{1}{9}\right)$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$
(0, 1)	(0, −1)
(1, 3)	(1, −3)
(2, 9)	(2, −9)

Si (x, y) es un punto de la gráfica de f_1 entonces $(x, -y)$ es un punto de la gráfica de f_3. Las gráficas son simétricas respecto al eje x.

Se observa que:
- La gráfica de la función $y = 3^{-x}$ es simétrica a la gráfica de la función $y = 3^x$ respecto al eje y.
- La gráfica de la función $y = -3^x$ es simétrica a la gráfica de la función $y = 3^x$, respecto al eje x.

Conclusión

1. Las funciones $y = a^x$ y $y = a^{-x}$ son simétricas respecto al eje y.
   Para graficar $y = a^{-x}$ se cambia el signo a la coordenada en x de los puntos de la gráfica de $y = a^x$.

2. Las funciones $y = a^x$ y $y = -a^x$ son simétricas respecto al eje x.
   Para graficar $y = -a^x$ se cambia el signo a la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $y = a^x$.

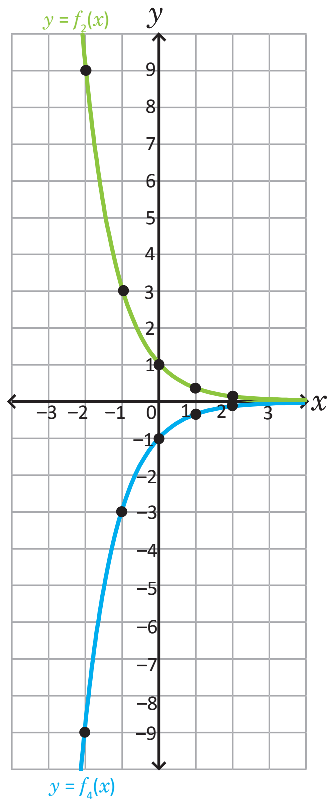
3. Las funciones $y = a^{-x}$ y $y = -a^{-x}$, son simétricas respecto al eje x.
   Para graficar $y = -a^{-x}$ se cambia el signo a la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $y = a^{-x}$.

Ejemplo

Grafica la función $f_4(x) = -3^{-x}$.

Para graficar $f_4(x) = -3^{-x}$ se cambia el signo a la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $f_2(x) = 3^{-x}$.

$f_2(x) = 3^{-x}$	$f_4(x) = -3^{-x}$
$\left(2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(2, -\frac{1}{9}\right)$
$\left(1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(1, -\frac{1}{3}\right)$
$(0, 1)$	$(0, -1)$
$(-1, 3)$	$(-1, -3)$
$(-2, 9)$	$(-2, -9)$



Problemas

1. Grafica las siguientes funciones en el mismo plano cartesiano utilizando las simetrías:
   $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{-x}$, $f_3(x) = -2^x$ y $f_4(x) = -2^{-x}$.

2. Grafica la función $f_4(x) = -3^{-x}$ a partir de la función $f_1(x) = 3^x$.

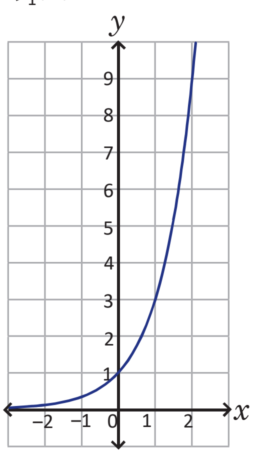
Comprueba que f_4 es simétrica a f_1 respecto al origen: si (a, b) está en la gráfica de f_1 entonces $(-a, -b)$ está en la gráfica de f_4.

2.3 Características de las funciones exponenciales

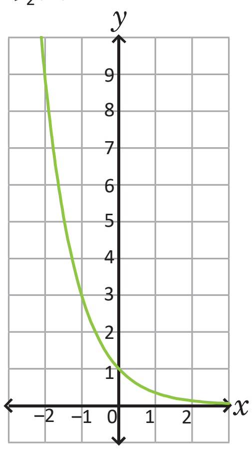
Problema inicial

Se muestran las siguientes funciones y sus gráficas:

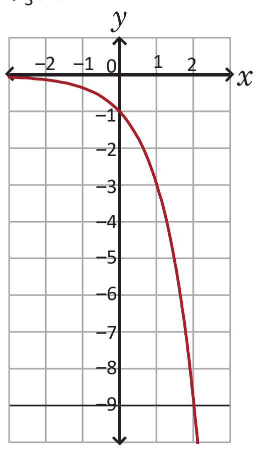
1. $f_1(x) = 3^x$



2. $f_2(x) = 3^{-x}$



3. $f_3(x) = -3^x$



Para cada una de las gráficas determina:

a) Interceptos con los ejes

b)Dominio y rango

c) Si la función es creciente o decreciente

d) Asíntotas de la función

f es una función creciente si $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
f es una función decrecientes si $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

Solución

1. $f_1(x) = 3^x$

a) Interceptos con los ejes:
Eje y: $f_1(0) = 3^0 = 1$, el intercepto es (0, 1).
Eje x: No existe un valor real x tal que $3^x = 0$.

b) Dominio y rango:
$D_{f_1} = \mathbb{R}$
$R_{f_1} =]0,\infty[$

c) La función es creciente:
Si $b < c$ entonces $3^b < 3^c$

d) Asíntotas de la función:
$y = 0$ es asíntota horizontal de la función, pues la gráfica de f_1 se aproxima a la recta $y = 0$ a medida que x disminuye su valor.

2. $f_2(x) = 3^{-x}$

a) Interceptos con los ejes:
Eje y: $f_2(0) = 3^{-0} = 3^0 = 1$, el intercepto es (0, 1).
Eje x: No existe un valor real x tal que $3^{-x} = 0$.

b) Dominio y rango:
$D_{f_2} = \mathbb{R}$
$R_{f_2} =]0,\infty[$

c) La función es decreciente:
Si $b < c$ entonces $3^{-b} > 3^{-c}$

d) Asíntotas de la función:
$y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

3. Las gráficas de las funciones $f_3(x) = -3^x$ y $f_1(x) = 3^x$ son simétricas respecto al eje x.

	Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
$f_1(x) = 3^x$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Creciente Si $b < c$ entonces $3^b < 3^c$	$y = 0$
$f_3(x) = -3^x$	(0, –1)	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $-3^b > -3^c$	$y = 0$

Conclusión

La siguiente tabla reúne las características de las gráficas de las funciones $f_1(x) = a^x$, $f_2(x) = a^{-x}$ y $f_3(x) = -a^x$ donde $a > 1$.

	$f_1(x) = a^x$	$f_2(x) = a^{-x}$	$f_3(x) = -a^x$
Intercepto en el eje y	(0, 1)	(0, 1)	(0, –1)
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Rango	$R_{f_1} =]0, +\infty[$ $= \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$	$R_{f_2} =]0, +\infty[$	$R_{f_2} =]-\infty, 0[$ $= \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$
Creciente o Decreciente	Creciente Si $b < c$ entonces $a^b < a^c$	Decreciente Si $b < c$ entonces $a^{-b} > a^{-c}$	Decreciente Si $b < c$ entonces $-a^b > -a^c$
Asíntota	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$

Además, observa que las funciones f_1, f_2 y f_3 no tienen intercepto con el eje x.

Si a es un número real tal que $a > 1$, entonces:
- La función $f(x) = a^x$, se llama **función exponencial creciente**.
- La función $f(x) = a^{-x}$, se llama **función exponencial decreciente**.

Problemas

1. Utiliza la simetría respecto al eje x para completar las características de la función $f(x) = -a^{-x}$ a partir de las características de la función $f(x) = a^{-x}$, $a > 1$.

	Intercepto en el eje y	Dominio	Rango	Creciente o Decreciente	Asíntota
$f(x) = a^{-x}$	(0, 1)	$\mathbb{R}$	$]0, \infty[$	Decreciente Si $b < c$ entonces $a^{-b} > a^{-c}$	$y = 0$
$f(x) = -a^{-x}$		$\mathbb{R}$			$y = 0$

2. Determina el intercepto en el eje y, dominio, rango, monotonía y asíntotas de las siguientes funciones.

   a) $f_1(x) = 2^x$ b) $f_2(x) = 2^{-x}$ c) $f_3(x) = -2^x$ d) $f_4(x) = -2^{-x}$

3. Resuelve las siguientes desigualdades utilizando la gráfica de la función $y = 2^x$.

   a) $2^x \geq 1$ b) $2^x < 1$

4. Demuestra que la función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es creciente en $[0, \infty[$, desarrollando los siguientes pasos:

   a) Demuestra que si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\left(c + \frac{1}{c}\right) - \left(d + \frac{1}{d}\right) = (c - d)\left(1 - \frac{1}{cd}\right)$.

   b) De a) prueba que $(2^b + 2^{-b}) - (2^a + 2^{-a}) = (2^b - 2^a)\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)$.

   c) De b) concluya que si $0 \leq a < b$ entonces $f(a) < f(b)$.

5. Demuestra que la función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es decreciente en $]-\infty, 0]$.

2.4 Desplazamientos horizontales y verticales de la función exponencial

Problema inicial

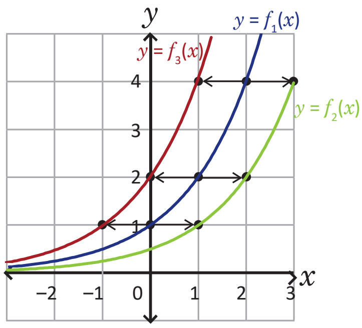
1. Grafica las funciones de cada literal en un mismo plano cartesiano.
   a) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$ y $f_3(x) = 2^{x+1}$ b) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$ y $f_3(x) = 2^x + 1$

2. Describe la gráfica de las funciones $f_2(x)$, $f_3(x)$ como un desplazamiento horizontal o vertical de la función $f_1(x)$.

Solución

a) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{x-1}$, $f_3(x) = 2^{x+1}$

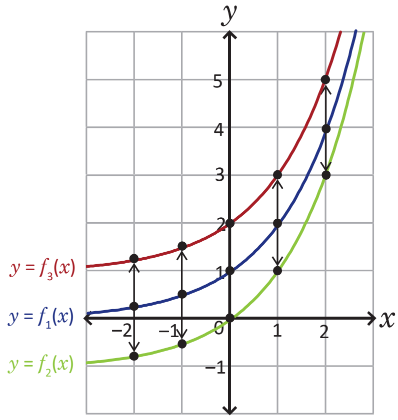
x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f_2(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f_3(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Al dibujar las gráficas de las funciones se observa que:
- La gráfica de $f_2(x)$ es un desplazamiento horizontal de 1 unidad hacia la derecha de la función $f_1(x)$.
- La gráfica de $f_3(x)$ es un desplazamiento horizontal de 1 unidad hacia la izquierda de la función $f_1(x)$.

b) $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x - 1$, $f_3(x) = 2^x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f_2(x)$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	3
$f_3(x)$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5



- La gráfica de $f_2(x)$ es un desplazamiento vertical de 1 unidad hacia abajo de la función $f_1(x)$.
- La gráfica de $f_3(x)$ es un desplazamiento vertical de 1 unidad hacia arriba de la función $f_1(x)$.

La asíntota horizontal de $f(x) = a^x + k$ es $y = k$.

Conclusión

La gráfica de la función $f(x) = a^{x-h}$ es un desplazamiento horizontal de h unidades de la función $f(x) = a^x$.
- Si $h > 0$ el desplazamiento es hacia la derecha.
- Si $h < 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda.

La gráfica de la función $f(x) = a^x + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la función $f(x) = a^x$.
- Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo.

Problemas

1. A partir de la gráfica de $f(x) = 3^x$ grafica las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 3^{x-2}$ b) $f(x) = 3^{x+1}$ c) $f(x) = 3^x - 3$

2. A partir de la gráfica de $f(x) = 4^x$ grafica las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 4^{x-1}$ b) $f(x) = 4^{x+2}$ c) $f(x) = 4^x + 2$

Unidad 4

2.5 Gráfica de funciones exponenciales con simetría y desplazamientos*

Problema inicial

En cada literal traza la gráfica de $f(x)$ a partir de la gráfica de $f_1(x) = 2^x$, utiliza simetría y desplazamientos.

a) $f(x) = 2^{x-1} + 1$

b) $f(x) = 2^{-(x-1)} - 1$

La simetría se aplica si la potencia es negativa o si la variable tiene signo negativo.

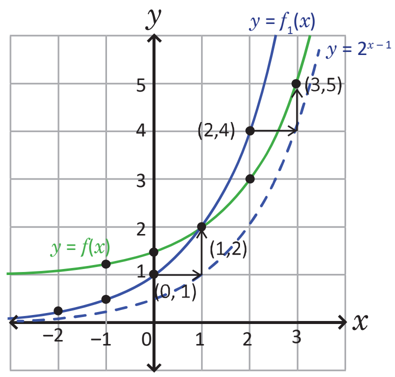
Solución

a) La gráfica de f_1 se dibujó en la clase 2.1.

Se grafica $y = 2^{x-1}$, como un desplazamiento de una unidad hacia la derecha de f_1.

Se grafica $f(x) = 2^{x-1} + 1$, como un desplazamiento de una unidad hacia arriba de y.

Si (x, y) es un punto de $f_1(x)$, entonces el punto $(x + 1, y + 1)$ es un punto de la gráfica de $f(x)$.

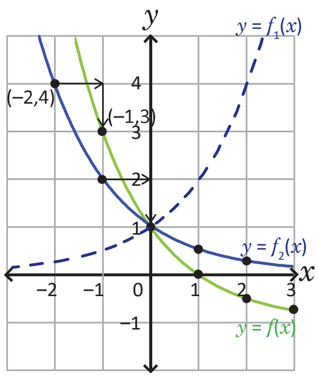


b) Se grafica $f_2(x) = 2^{-x}$ a partir de la simetría con la gráfica de f_1 respecto al eje y.

Se puede escribir $f(x) = f_2(x - 1) - 1$.

Así, $f(x)$ es un desplazamiento de una unidad a la derecha y una unidad hacia abajo de $f_2(x)$.

Sea (x, y) un punto de $f_2(x)$, entonces el punto $(x + 1, y - 1)$ es un punto de la gráfica de $f(x)$.

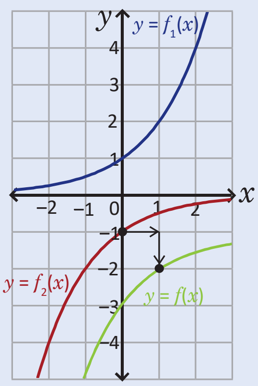


Conclusión

Para elaborar la gráfica de una función exponencial $f(x)$ se realizan los siguientes pasos:

1. Se dibuja la gráfica de $f_1(x) = a^x$.
2. Se dibuja una función $f_2(x)$ de acuerdo a los signos de la potencia y el exponente de $f(x)$:
   - a^{-x} se utiliza simetría respecto al eje y.
   - $-a^x$ se utiliza simetría respecto al eje x.
   - $-a^{-x}$ se utiliza simetría respecto al origen.
3. Desplazamiento, escribiendo $f(x) = f_2(x - h) + k$ entonces el punto (x, y) de la gráfica de f_2 se desplaza al punto $(x + h, y + k)$ de la gráfica de f.

Ejemplo: $f(x) = -2^{-(x-1)} - 1$



1. $f_1(x) = 2^x$

Simetría respecto al origen.

2. $f_2(x) = -2^{-x}$

Desplazamiento

3. $f(x) = -2^{-(x-1)} - 1$

Problemas

Grafica las siguientes funciones utilizando simetrías y desplazamientos:

a) $f(x) = 3^{x-2} + 1$

b) $f(x) = 4^{-x-1} - 3$

c) $f(x) = -2^{x-1} + 2$

d) $f(x) = -3^{-x+1} - 3$

e) $f(x) = 3^{-x+1} + 2$

f) $f(x) = 2^{-x-2} + 1$

g) $f(x) = -3^{x-1} - 1$

h) $f(x) = -3^{-x-2} + 2$

2.6 Ecuaciones exponenciales

Problema inicial

Encuentra una solución para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $5^x = 25$ b) $2^x = \frac{1}{8}$ c) $4^x = 8$ d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

Solución

a) $5^x = 25$

Descomponiendo $25 = 5^2$,

sustituyendo $5^x = 5^2$.

Por lo tanto, $x = 2$.

b) $2^x = \frac{1}{8}$

Descomponiendo $8 = 2^3$,

sustituyendo $2^x = \frac{1}{2^3}$,

escribiendo con exponente negativo $2^x = 2^{-3}$.

Por lo tanto, $x = -3$.

c) $4^x = 8$

Descomponiendo $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$,

sustituyendo $(2^2)^x = 2^3$,

aplicando propiedades de potencia $2^{2x} = 2^3$,

entonces $2x = 3$.

Por lo tanto, $x = \frac{3}{2}$.

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$

Descomponiendo $9 = 3^2$ y $81 = 3^4$,

sustituyendo $\left(\frac{1}{3^2}\right)^x = 3^4$,

escribiendo con exponente negativo: $(3^{-2})^x = 3^4$,

aplicando propiedades de potencia: $3^{-2x} = 3^4$,

entonces $-2x = 4$.

Por lo tanto, $x = -2$.

Definición

Una **ecuación exponencial** es aquella que tiene términos de la forma a^x con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Para resolver una ecuación exponencial se realiza lo siguiente:

1. Se escriben todos los términos en la misma base para obtener una igualdad de potencias con la misma base: $a^r = a^s$.
2. Se igualan los exponentes $r = s$ y se resuelve esta ecuación.

Ejemplo: $27^x = \frac{1}{9}$

$27^x = (3^3)^x = 3^{3x}$ y $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$

$\longrightarrow$ $3^{3x} = 3^{-2}$

$\longrightarrow$ $3x = -2$

Por lo tanto, $x = -\frac{2}{3}$.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^x = 16$ b) $3^{-x+1} = 9^{x+2}$ c) $5^{3x-4} = \frac{1}{25}$ d) $2^{2x-3} = \frac{1}{4}$

e) $2^{5x+7} = \frac{1}{8}$ f) $9^{3x+1} = 27^{-2x-2}$ g) $8^{-x+3} = 4^{x+2}$ h) $4^{2x-1} = \frac{1}{2}$

Unidad 4

2.7 Ecuaciones exponenciales que se reducen a ecuaciones cuadráticas

Problema inicial

A partir de la ecuación exponencial: $4^x - 2^x = 2$ realiza lo siguiente:

a) Escribe 4^x como potencia de 2.

b) Sustituye y en lugar de 2^x en la ecuación.

c) Resuelve la ecuación resultante.

d) En las soluciones encontradas sustituye 2^x en lugar de y.

e) Resuelve las ecuaciones resultantes.

Solución

a) Se representa 4^x como una potencia de 2:

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ al descomponer $4 = 2^2$.

Así, se obtiene la ecuación $(2^2)^x - 2^x = 2$.

b) Al utilizar que $(2^2)^x = (2^x)^2$ se tiene:

$$\underset{\displaystyle y^2}{\underset{\downarrow}{(2^x)^2}} - \underset{\displaystyle y}{\underset{\downarrow}{2^x}} = 2$$

c) Resuelve la ecuación resultante.

$y^2 - y = 2$ es una ecuación cuadrática, resolviendo:

$$y^2 - y - 2 = 0$$
$$(y - 2)(y + 1) = 0$$
$$y = 2 \quad \text{o} \quad y = -1$$

d) En las soluciones encontradas sustituye 2^x en lugar de y.

$$\underset{\displaystyle 2^x = 2}{\underset{\downarrow}{y = 2}} \quad \text{o} \quad \underset{\displaystyle 2^x = -1}{\underset{\downarrow}{y = -1}}$$

e) Resuelve las ecuaciones resultantes.

$2^x = 2$ o $2^x = -1$, esta ecuación no tiene solución,

$2^x = 2^1$ ya que $2^x > 0$, para todo x real.

$x = 1$

Por lo tanto, la solución es $x = 1$.

Conclusión

Una ecuación exponencial, en la que aparece una suma o resta de potencias, se puede reducir a una ecuación cuadrática si una de las bases es el cuadrado de la otra.

Este tipo de ecuaciones se representa así: $p(a^x)^2 + qa^x + r = 0$.

Para resolverla se realiza lo siguiente:

1. Se efectúa el cambio de variable $y = a^x$.
2. Se resuelve la ecuación $py^2 + qy + r = 0$, del paso anterior.
3. En las soluciones encontradas $y = y_1$, $y = y_2$, se sustituye y por a^x: $a^x = y_1$ y $a^x = y_2$.
4. Por último se resuelven ambas ecuaciones, si se puede. Estas son las soluciones de la ecuación original.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales reduciéndolas a ecuaciones cuadráticas.

a) $4^x - 2^x - 12 = 0$

b) $9^x - 2(3^x) + 1 = 0$

c) $4^x - 6(2^x) + 8 = 0$

d) $5(25^x) - 26(5^x) + 5 = 0$

e) $9^{x+1} + 8(3^x) - 1 = 0$

f) $4^{x+2} - 5(2^{x+1}) + 1 = 0$

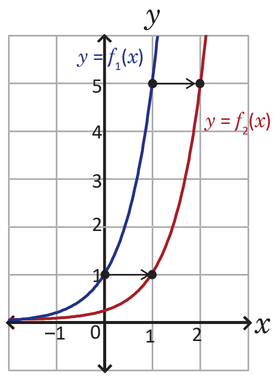
Si una potencia tiene la forma a^{x+r}, con r un número real, se reescribe $a^{x+r} = a^r(a^x)$.
Por ejemplo, $2^{x+1} = 2(2^x)$.

2.8 Practica lo aprendido

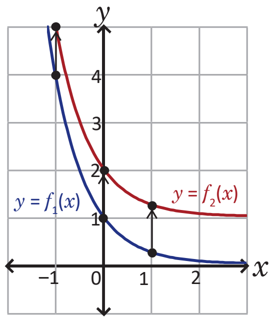
1. Justifica las siguientes afirmaciones.
   a) La gráfica de las funciones $y = 2^x$ y $y = 2^{-x}$ son simétricas respecto al eje y.
   b) La gráfica de las funciones $y = 3^x$ y $y = -3^x$ son simétricas respecto al eje x.
   c) Si (a, b) es un punto de la gráfica de la función $y = 3^x$ entonces $(-a, -b)$ es un punto de $y = -3^x$.

2. Utilizando las gráficas de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Determina la ecuación de $f_2(x)$ a partir de $f_1(x)$.

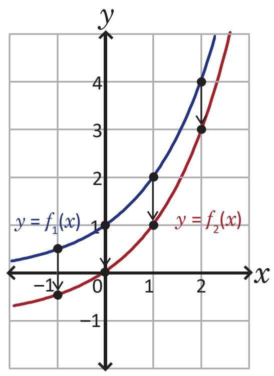
   a) $f_1(x) = 5^x$



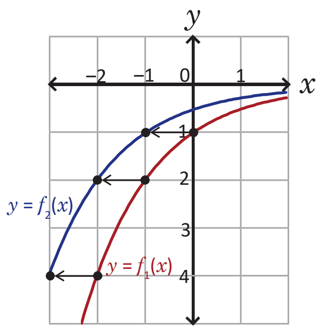
   b) $f_1(x) = 4^{-x}$



   c) $f_1(x) = 2^x$



   d) $f_1(x) = -2^{-x}$



3. Grafica las siguientes funciones y describe sus características: interceptos con los ejes, dominio, rango, asíntota de la función y crecimiento o decrecimiento.

   a) $f(x) = 2^{x-3} - 2$ b) $f(x) = 3^{-x-1} + 4$ c) $f(x) = 5^{-x+2} + 2$ d) $f(x) = -4^{x-1} - 1$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

   a) $2^{3x-1} = 32$ b) $3^{-2x+3} = \frac{1}{27}$ c) $4^{3x-3} = 1$

   d) $25^{x+3} = \frac{1}{5}$ e) $7^{-2x-4} = 49$ f) $16^{x-3} = 8^{2x-1}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales reduciéndolas a ecuaciones cuadráticas:

   a) $9^x - 4(3^x) + 3 = 0$ b) $6^{2x} - 5(6^x) - 6 = 0$ c) $3^{2x+3} - 4(3^{x+1}) + 1 = 0$

2.9 Problemas de la unidad

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{(3^{-2})^3 \times (3^4)^2}{3^{-5}}$ b) $\left[\frac{2^2 \times (2^4)^{-2}}{2^7}\right]^{-1}$ c) $\frac{25^{-4} \times 5^{-3}}{5^{-5}}$ d) $\frac{3^{-4} \times 6^8}{2^4}$

2. En los siguientes literales se tienen dos números reales, establece cuál es el mayor de ellos.

a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt[3]{12}$ y $\sqrt{6}$ d) 4 y $\sqrt[3]{68}$

Utiliza el hecho que $a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ y el exponente racional, para escribir las raíces con índice común. Para $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{2}$:
$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{2^4}$ y $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{2^3}$

3. En los siguientes literales determina cuál de los dos números reales es el mayor de ellos:

a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt[4]{8}$ y $\sqrt[5]{16}$ c) $\sqrt[4]{125}$ y $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{\frac{1}{27}}$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{81}}$

Escribe cada radicando como una potencia

4. Efectúa el producto $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{48} + 2)(\sqrt{3} + \sqrt[4]{48} + 2)$.

5. Racionaliza el denominador de la fracción $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ realizando los siguientes pasos:

a) Escribe $\sqrt[3]{3}$ como una potencia.

b) Resuelve la ecuación $\sqrt[3]{3}x = 3$, escribe la solución como una potencia.

c) Efectúa $\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{x}{x}$, con x la solución del literal anterior.

6. Racionaliza el denominador de las siguientes fracciones.

a) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[4]{2}}$ c) $\frac{10}{\sqrt[4]{8}}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{4x-2} = 8^{x+1}$ b) $3^{3x} = 27^{2x+3}$ c) $2^{-x} = \sqrt{2}$

d) $2^{\frac{x}{2}} \times 4^{\frac{x}{3}} = 128$ e) $9^x - 4(3^{x+1}) + 27 = 0$ f) $4^{-x} - 2^{-x+2} + 4 = 0$

g) $(4^{x-3})(6^{x+1})(3^{2x-6}) = 6$ h) $12^{x-2} = 2^{2x-4}$ i) $-3^x - 9(3^{-x}) + 10 = 0$

8. Justifica las siguientes afirmaciones:

a) $\sqrt{5}$ y $\sqrt[4]{25}$ representan el mismo número.
b) Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = -2^x$ no se intersecan en ningún punto.
c) $y = 2^x$ y $y = 4^x$ se intersecan en un solo punto.

9. Grafica las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ b) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

10. Determina para cada función del problema anterior lo que se pide:

a) Dominio y rango b) Los intervalos donde es creciente o decreciente.