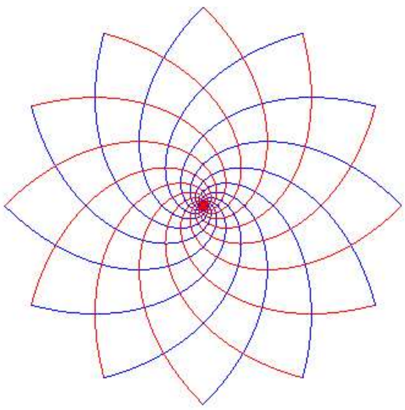
Funciones Trascendentales II

5 Unidad

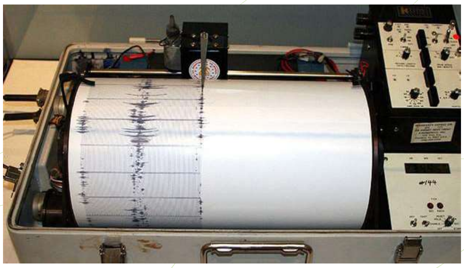
A principios del siglo XVII, los matemáticos ingleses John Napier y Henry Briggs introdujeron y perfeccionaron el logaritmo, un concepto de gran importancia práctica y teórica por su propiedad de simplificar operaciones tediosas como la multiplicación, la división y la extracción de raíces. La motivación de Napier era facilitar los cálculos en trigonometría esférica utilizados en astronomía. Briggs sugirió el 10 como base y creó tablas de logaritmos para números cercanos.



Red ortogonal de espirales logarítmicas

Mosaico decorativo en Corinto siglo II d.C.

Actualmente los logaritmos tienen aplicaciones en muchas ramas de la ciencia: permiten medir la intensidad del sonido, el nivel de acidez de una sustancia conocido como pH, la intensidad de los sismos a través de la escala Richter, los grados de tonalidad de escala cromática en la música, entre otras.



El sismógrafo permite medir la intensidad y duración de los sismos.

En esta unidad se exploran algunas propiedades de las funciones como la inyectividad, la sobreyectividad y la biyectividad. Conocerás la composición de funciones que permitirá definir la función inversa como un caso especial de la composición y luego definir la función logarítmica y estudiar sus propiedades.

1.1 Funciones inyectivas

Problema inicial

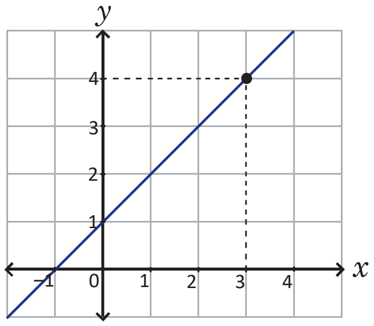
Responde las siguientes preguntas:

a) Sea $f(x) = x + 1$, se sabe que $f(3) = 4$, ¿existe otro valor x en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4$?

b) En el caso de la función $f(x) = x^2$, se cumple que $f(2) = 4$, ¿ocurre lo mismo que el caso anterior?

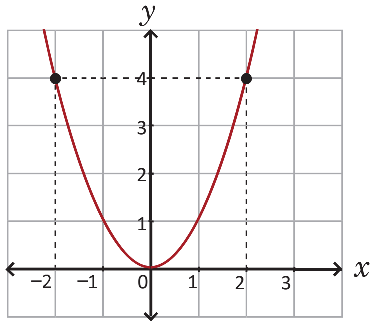
Solución

a) Se elabora la gráfica de $f(x) = x + 1$.



El único valor de x tal que $f(x) = 4$ es $x = 3$.

b) Se elabora la gráfica de $f(x) = x^2$.



No ocurre lo mismo, ya que existen dos valores de x que cumplen $f(x) = 4$: $x = 2$ y $x = -2$.

Definición

Una función $f : A \rightarrow B$ es **inyectiva** en A, si a valores diferentes del conjunto A le corresponden valores diferentes del conjunto B. Simbólicamente: si a, b son elementos de A con $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$.

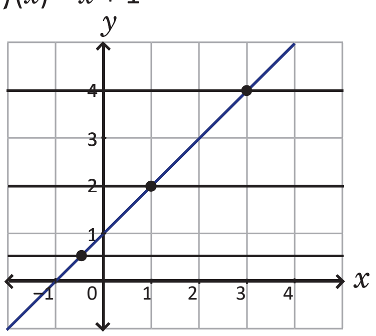
También se puede definir de la siguiente manera: $f : A \rightarrow B$ es **inyectiva** en A, si a cada imagen en B le corresponde una única preimagen de A.

Para determinar gráficamente la inyectividad de una función se trazan rectas horizontales sobre la gráfica, si una recta interseca a la gráfica en dos o más puntos, entonces la función no es inyectiva.

Ejemplo

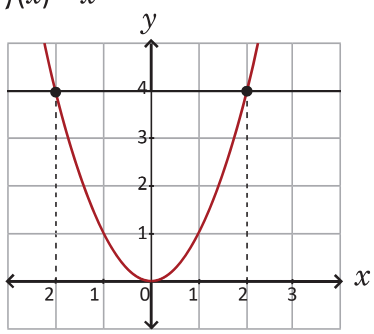
Determina si las siguientes funciones son inyectivas:

a) $f(x) = x + 1$



Toda recta horizontal interseca en un solo punto a la función. Por lo tanto, $f(x) = x + 1$ es inyectiva.

b) $f(x) = x^2$



La recta horizontal que pasa por el punto (2, 4) también pasa por el punto (–2, 4). Por lo tanto, $f(x) = x^2$ no es inyectiva. En este caso $2 \neq -2$ pero $f(2) = f(-2)$ pues $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$.

Problemas

Determina si las siguientes funciones son inyectivas en su dominio:

a) $f(x) = 2x - 6$ b) $f(x) = -x^2 - 2x - 6$ c) $f(x) = 2x^3$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $f(x) = \sqrt{x}$

1.2 Funciones sobreyectivas

Problema inicial

Una función de A en B que tiene como ecuación $y = f(x)$ se puede representar de las siguientes formas:

1. f: A $\longrightarrow$ B
   $x \longrightarrow f(x)$

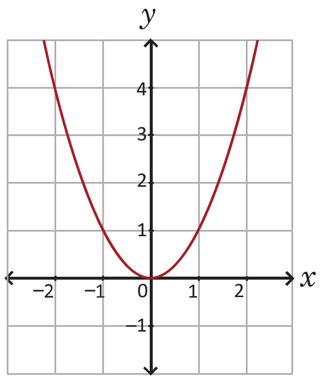
2. f: A $\longrightarrow$ B; $x \longrightarrow f(x)$

Esta representación significa "la función de A en B tal que x toma valores en A y $f(x)$ en B".

a) Dada la función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longrightarrow x^2$, ¿existe un valor x en el conjunto de partida que cumple $f(x) = -1$?
b) Considera la función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longrightarrow x^3$. Si y es un número real, determina el valor de x tal que $f(x) = y$ si $y = 1$, $y = 8$.

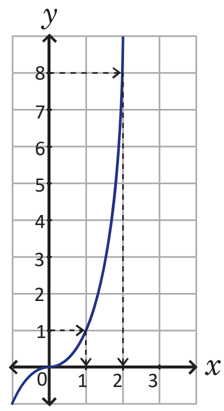
Solución

a) Se elabora la gráfica de $f(x) = x^2$.



No hay valores de x tal que $f(x) = -1$.

b) Se elabora la gráfica de $f(x) = x^3$.



El valor de x tal que $f(x) = 1$, es $x = 1$.
$f(1) = 1^3 = 1$.

El valor de x tal que $f(x) = 8$, es $x = 2$.
$f(2) = 2^3 = 8$.

Conclusión

Una función f: A $\longrightarrow$ B es **sobreyectiva**, si cada número en B es imagen de, al menos, un número en A.

1. Para decir que una función no es sobreyectiva se debe encontrar un valor y en B que no tenga preimagen en A.
2. Una función f: A $\longrightarrow$ B, donde el conjunto B es igual al rango de la función R_f es una función sobreyectiva.

Recuerda que el rango es el conjunto de valores que puede tomar la función $R_f = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Ejemplo

a) La función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longrightarrow x^2$, no es sobreyectiva pues no existe un número real x tal que $x^2 = -1$.

El rango de $f(x) = x^2$ no es $\mathbb{R}$ sino $R_f = [0, \infty[$.

b) La función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longrightarrow x^3$ es sobreyectiva pues un número y en $\mathbb{R}$ es imagen del número $\sqrt[3]{y}$. Al evaluar se tiene: $f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.

El rango de $f(x) = x^3$ es $R_f = \mathbb{R}$.

Problemas

Identifica si cada una de las siguientes funciones es sobreyectiva.

a) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $x \longrightarrow x$

b) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $x \longrightarrow 3x - 2$

c) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $x \longrightarrow x^2 - 1$

d) f: $\mathbb{R} \longrightarrow]-\infty, 0]$
   $x \longrightarrow -x^2$

e) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $x \longrightarrow -x^2 + x$

f) f: $[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$
   $x \longrightarrow \sqrt{x}$

g) f: $\mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$

h) f: $\mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
   $x \longrightarrow \dfrac{1}{1-x}$

i) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $x \longrightarrow |x|$

El conjunto $]-\infty, a[\cup]a, \infty[$ se puede escribir en la forma $\mathbb{R} - \{a\}$, que representa el conjunto de los números reales exceptuando al número a.

$f(x) = |x|$ es la función valor absoluto.

1.3 Funciones biyectivas*

Definición

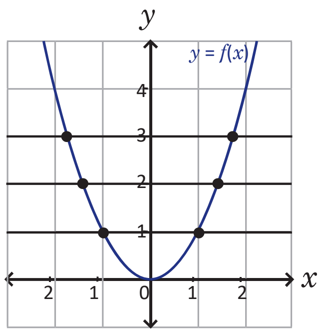
Una función f: A ⟶ B es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

- Si una función no es inyectiva se puede restringir el dominio para que sea inyectiva, en algunos casos se puede hacer de varias maneras.
- Para que la función f sea sobreyectiva basta encontrar el rango R_f y hacer B = R_f.

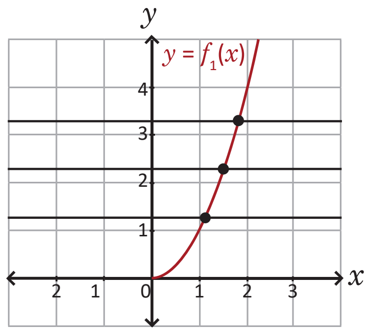
Se llama **restricción de la función *f*** a la que se obtiene como resultado de los pasos anteriores.

Ejemplo

1. Verifica que la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty[\ ; x \longrightarrow x^2$ no es biyectiva.
2. Haz una restricción del dominio para que la función f sea biyectiva.

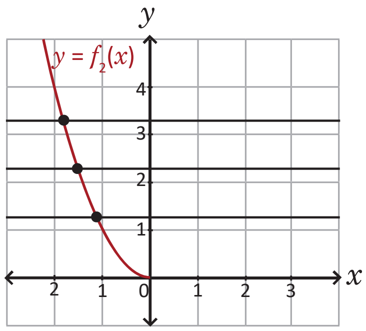


1. Las rectas horizontales cortan en dos puntos a la gráfica, así la función no es inyectiva, por lo que tampoco es biyectiva.



2. Eliminando los puntos con primera coordenada negativa, se obtiene la gráfica de una función inyectiva, a la que se denomina f_1. Su dominio es $[0, \infty[$ y su rango es $[0, \infty[$.

   Por lo tanto, la función $f_1: [0, \infty[\ \longrightarrow [0, \infty[; x \longrightarrow x^2$ es biyectiva pues es inyectiva y sobreyectiva.



Otra restricción de f se obtiene eliminando los puntos con primera coordenada positiva.

Por lo tanto, la función $f_2: [-\infty, 0[\ \longrightarrow [0, \infty[; x \longrightarrow x^2$ es biyectiva pues es inyectiva y sobreyectiva.

Problemas

Determina si cada función es biyectiva, si no lo es, haz una restricción de f para que lo sea.

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow x$

b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow x - 1$

c) $f: [0, 10] \longrightarrow [0, \infty[$
$x \longrightarrow x^2$

d) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow x^2 - 2x + 3$

e) $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \longrightarrow \frac{1}{x}$

f) $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty[$
$x \longrightarrow |x|$

g) $f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow 1 + \frac{1}{1 - x}$

h) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow 2^x$

i) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow 2^{-x-1} + 1$

1.4 Composición de funciones

Problema inicial

En el departamento de Morazán el beneficio promedio, en dólares, que obtiene un productor de dulce de atado está dado por $f(x) = 0.53x$, donde x representa la inversión realizada por el productor. Se sabe que la inversión realizada por un productor está dada por la función $g(x) = 69.19x$, donde x es el número de toneladas de caña de azúcar utilizadas. A partir de lo anterior contesta:

1. ¿Cuál es la inversión realizada por el productor si utiliza 2 toneladas?
2. ¿Cuál es el beneficio obtenido por el productor si utiliza 2 toneladas?
3. Determina una función que proporcione el beneficio obtenido a partir de una cantidad x de toneladas de caña de azúcar utilizadas.

Solución

1. Utilizando la función de inversión g, se tiene $g(2) = 69.19(2) = 138.38$.
   Por lo tanto, la inversión realizada es de \$138.38.

$$\underset{\text{Toneladas}}{x} \xrightarrow{g} \underset{\text{Inversión}}{g(x)}$$

2. La inversión realizada al utilizar 2 toneladas es $g(2) = \$138.38$.
   Utilizando la función de beneficio f se tiene que
   $$f(g(2)) = f(138.38) = 0.53(138.38) = 73.3414.$$
   Por lo tanto, el beneficio es de \$ 73.3414.

$$\underset{\text{Inversión}}{x} \xrightarrow{f} \underset{\text{Beneficios}}{f(x)}$$

3. Al utilizar x toneladas se tiene una inversión de $g(x) = 69.19x$.
   Al utilizar una inversión $g(x)$ se tiene un beneficio de $f(g(x)) = 0.53(g(x))$.
   Por lo tanto, el beneficio a partir de la cantidad x de toneladas es
   $f(g(x)) = 0.53(69.19x) = 36.6707x$.

$$\underset{\text{Toneladas}}{x} \xrightarrow{g} \underset{\text{Inversión}}{g(x)} \xrightarrow{f} \underset{\text{Beneficios}}{f(g(x))}$$

Definición

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, la **composición** de f y g se denota por $(f∘g)(x)$ y se define como:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$

La composición de f y g es una función que resulta de evaluar la función $g(x)$ en la función $f(x)$.

La expresión $f\circ g$ se lee f compuesta con g. La expresión $f(g(x))$ se lee f de g de x.

Ejemplo

Efectúa las composiciones $f\circ g$ y $g\circ f$, con las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x - 3$.

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= 2(g(x)) + 1 \quad \text{se evalúa la función } g(x) \text{ en } f(x),\\ &= 2(x - 3) + 1\\ &= 2x - 6 + 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f\circ g)(x) = 2x - 5$.

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= f(x) - 3 \qquad \text{se evalúa la función } f(x) \text{ en } g(x),\\ &= (2x + 1) - 3\\ &= 2x - 2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(g\circ f)(x) = 2x - 2$.

Observa que, en general, $(f\circ g)(x)$ no es igual a $(g\circ f)(x)$:

Si $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x - 3$ se tiene que $(f\circ g)(x) = 2x - 5$ y $(g\circ f)(x) = 2x - 2$.

En este caso $(f\circ g)(x) \neq (g\circ f)(x)$.

Problemas

Efectúa la composición $f\circ g$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x$, $g(x) = 3x$

b) $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x + 5$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x - 4$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x + 1$

e) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$

f) $f(x) = 3^x$, $g(x) = x + 2$

g) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2^x$

h) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 5^x$

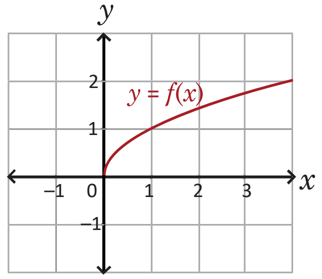
i) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 4^x$

1.5 Dominio de la función composición*

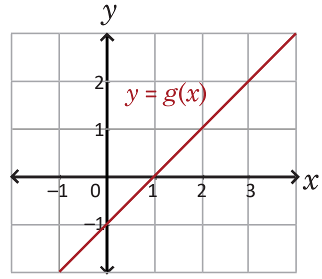
Problema inicial

Se tiene la gráfica de las funciones f: $[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$; $x \longrightarrow \sqrt{x}$ y g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longrightarrow x - 1$.

$D_f = [0, \infty[$
$R_f = [0, \infty[$



$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = \mathbb{R}$



La composición está definida como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, es decir $g(x)$ se evalúa en $f(x)$. A partir de esto, realiza lo siguiente:

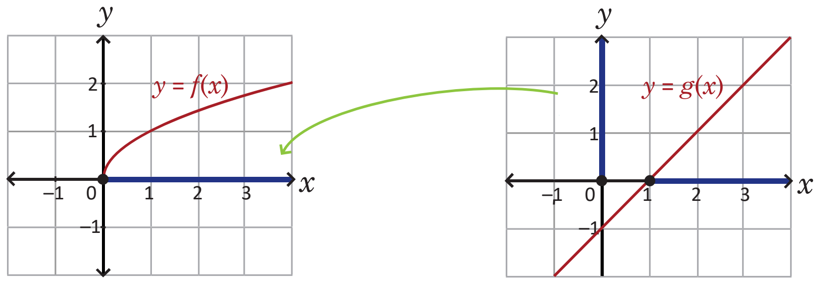
a) Determina el intervalo de los valores que puede tomar $g(x)$ para que $f(g(x))$ esté definida.

b) ¿Cuál es el intervalo de valores que debe tomar x para que $g(x)$ esté en el intervalo del literal anterior?

Solución

a) Los valores que $g(x)$ puede tomar deben estar en el domino de $f(x)$.
Por lo que el intervalo que se pide es $[0, \infty[$.

b) Se determina el intervalo a partir de la gráfica.



En la función $g(x)$ los valores del intervalo $[0, \infty[$ se obtienen al evaluar los valores del intervalo $[1, \infty[$.

Por lo tanto, x debe tomar valores en el intervalo $[1, \infty[$ para que $g(x)$ esté en el intervalo $[0, \infty[$.

Definición

El **dominio de la composición** de f y g está dado por el conjunto: $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

El dominio de la composición de funciones $(f \circ g)(x)$ son los valores que pertenecen a D_g (el dominio de $g(x)$) tal que $g(x)$ pertenece a D_f (el dominio de $f(x)$).

Ejemplo

Utilizando las funciones: $f(x) = \sqrt{x - 9}$, con dominio $D_f = [9, \infty[$, y $g(x) = 3x$, con dominio $D_g = \mathbb{R}$, encuentra el dominio de la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{3x - 9}$.

Se tienen los dominios $D_f = [9, \infty[$ y $D_g = \mathbb{R}$. Para determinar $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ se tiene que $g(x)$ es un valor de $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 9\}$ si se cumple que $g(x) \geq 9$, sustituyendo se obtiene $3x \geq 9$, por lo que $x \geq 3$ entonces $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid x \geq 3\}$. Por lo tanto, $D_{f \circ g} = [3, \infty[$.

Problemas

Determina el domino de la composición de funciones $(f \circ g)(x)$:

a) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow 3x + 1$
g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow 2x + 4$

b) f: $[3, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$
$x \longrightarrow x^2 - 12x + 35$
g: $[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$

c) f: $[-1, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$
$x \longrightarrow x^2 - 1$
g: $\mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \longrightarrow \frac{1}{x}$

d) f: $[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$
g: $\mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \longrightarrow \frac{1}{x}$

1.6 Función inversa

Problema inicial

Dadas las funciones $f(x) = 2x + 2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, efectúa las composiciones:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$

Solución

a) $(f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2(g(x)) + 2 \\ &= 2\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + 2 \\ &= x - 2 + 2 \\ &= x\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f \circ g)(x) = x$.

b) $(g \circ f)(x)$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \frac{1}{2}(2x + 2) - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(g \circ f)(x) = x$.

Definición

Sea f: A ⟶ B una función, si una función g: B ⟶ A cumple las condiciones:
1. $(f \circ g)(x) = x$, para todo valor x en B.   2. $(g \circ f)(x) = x$, para todo valor x en A.
Entonces a g se le llama la **función inversa de** f y se denota por f^{-1}.

La función inversa f^{-1} cumple $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$, así para encontrar la ecuación de la función inversa se despeja y de la ecuación $f(y) = x$, donde $y = f^{-1}(x)$.

Ejemplo

Obtén la función inversa de $f(x) = 2x + 2$.

Escribe la ecuación ⇒ $f(y) = x$,

evalúa y en $f(x) = 2x + 2$ ⇒ $2y + 2 = x$,

al despejar y se obtiene: ⇒ $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

A la función $h(x) = x$ se le denomina **función identidad**.

Para una función l: A ⟶ B, la función identidad cumple las siguientes condiciones:

1. Si h: B ⟶ B; $x \longrightarrow x$ entonces $(h \circ l)(x) = l(x)$.

2. Si h: A ⟶ A; $x \longrightarrow x$ entonces $(l \circ h)(x) = l(x)$.

Problemas

1. Determina la ecuación de la función inversa de las siguientes funciones.

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 5x - 1$

b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x^3$

c) $f: \mathbb{R} \longrightarrow [1, \infty[$, $x \longrightarrow (x - 2)^2 + 1$

d) $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $x \longrightarrow \frac{1}{x}$

e) $f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, $x \longrightarrow \frac{x+1}{x-1}$

f) $f: [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$, $x \longrightarrow \sqrt{x}$

g) $f: [0, \infty[\longrightarrow [1, \infty[$, $x \longrightarrow x^2 + 1$

h) $f: [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$, $x \longrightarrow (x - 1)^2$

2. Comprueba con la composición de funciones, que la función encontrada en cada literal del problema anterior es la función inversa.

Comprueba que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

1.7 Existencia, dominio y rango de la función inversa

Problema inicial

a) Grafica las funciones $f(x) = 2x + 2$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$ en un mismo plano cartesiano y observa que si (a, b) es un punto de la gráfica de f entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}.

Los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos respecto a la recta $y = x$.

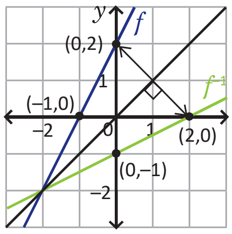
b) Sea (a, b) un punto de la gráfica de f, demuestra que si f posee función inversa f^{-1}, entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}.

c) Grafica la función $f(x) = x^2$, luego para cada punto (a, b) de $f(x)$ gráfica el punto (b, a) y dibuja la curva que une estos puntos.

d) La curva que obtuviste en c), ¿corresponde a la gráfica de una función?

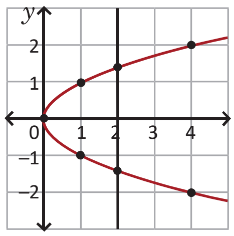
Solución

a) Se observa que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$. Por lo tanto, si (a,b) es un punto de la gráfica de f entonces (b, a) es un punto de f^{-1}.



b) (a, b) es un punto de la gráfica de f si y solo si $f(a) = b$.
Al aplicar la función inversa a la ecuación anterior se tiene $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b)$.
Así, por la definición de función inversa se tiene: $a = f^{-1}(b)$.
Por lo tanto, si (a, b) es un punto de la gráfica de f entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}.

c) Se grafican algunos puntos (b,a): (0, 0), (1, 1), (1, –1), (4, 2), (4, –2).
Se traza la curva que une estos puntos.



d) La curva que se obtuvo no corresponde a la gráfica de una función pues hay rectas verticales que cortan en dos puntos a la curva.

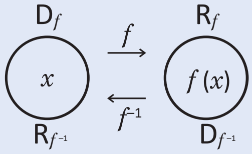
Definición

Una función f: A → B posee función inversa si y solo si es biyectiva. De acuerdo a la clase 1.3, una función puede restringirse para que sea biyectiva y así tener función inversa.

Si (a, b) es un punto de la gráfica de $f(x)$ entonces (b, a) es un punto de la gráfica de $f^{-1}(x)$.

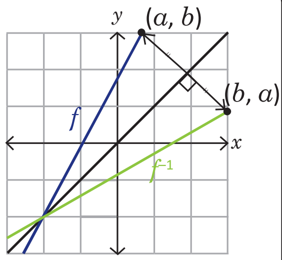
El dominio de la función inversa es el rango de la función inicial y el rango de la función inversa es el dominio de la función inicial:

$$D_{f^{-1}} = R_f \text{ y } R_{f^{-1}} = D_f.$$



La gráfica de f^{-1} es simétrica a la de f, con eje de simetría $y = x$.

El punto (a, b) es simétrico al punto (b, a).



Problemas

En los siguientes literales determina la función inversa, su dominio y su rango. Además grafica la función y su inversa en el mismo plano cartesiano. En el literal d) realiza una restricción de la función.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow 3x - 2$

b) $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \rightarrow \frac{1}{x+1}$

c) $f:]-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty[$
$x \rightarrow x^2$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow (x + 1)^2 - 4$

1.8 Practica lo aprendido

1. En los siguientes literales determina la ecuación de las composiciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$:

a) $f(x) = -x + 5$, $g(x) = -x - 2$
b) $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = -x + 1$
c) $f(x) = \sqrt{-x+1}$, $g(x) = 4 - x^2$
d) $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2 - x$

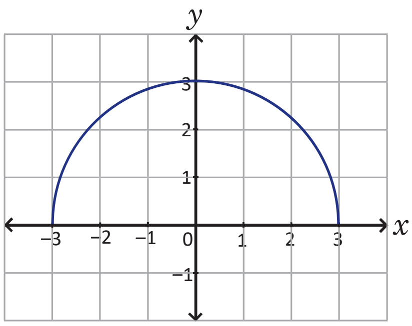
2. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

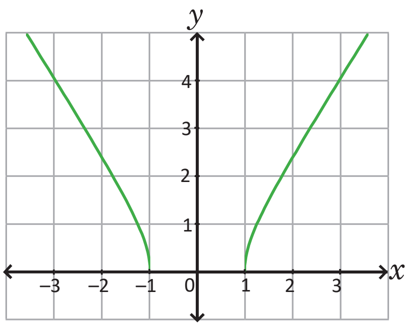
a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$
c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$
d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$
e) $f(x) = \sqrt{3^x - 9}$
f) $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$

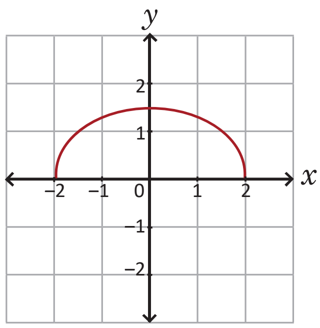
Escribe cada función como una composición de funciones.

3. Se tienen las gráficas de las siguientes funciones:

$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$ $f_2(x) = \sqrt{2x^2 - 2}$ $f_3(x) = \sqrt{2 - \dfrac{x^2}{2}}$







Para cada una:
a) Determina el dominio como el conjunto de los valores donde la función está definida.
b) Restringe el dominio de la función para que sea inyectiva.
c) Con el dominio encontrado en b) determina el rango de modo que la función sea sobreyectiva.
d) Traza la gráfica de la función con el dominio y el rango restringidos en b) y c).

4. A partir de las funciones redefinidas en el problema 3 realiza lo siguiente:
a) Para cada función determina la ecuación de la función inversa.
b) Determina el domino y rango de la función inversa.
c) Grafica en el mismo plano cartesiano f y f^{-1}.

5. Considerando los puntos P(a, b), Q(b, a) y la recta l: $y = x$ demuestra que $d(\text{P}, l) = d(\text{Q}, l)$.

6. Se tienen las siguientes funciones y sus inversas:

f_1: $[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$; $x \longrightarrow x^2$
f_1^{-1}: $[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$; $x \longrightarrow \sqrt{x}$
f_2: $[-1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$; $x \longrightarrow x + 1$
f_2^{-1}: $[0, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$; $x \longrightarrow x - 1$

Realiza lo siguiente:
a) Determina la ecuación de la función $g_1(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$.
b) Determina la ecuación de la función $g_2(x) = (f_2^{-1} \circ f_1^{-1})(x)$.
c) Efectúa las composiciones $(g_1 \circ g_2)(x)$ y $(g_2 \circ g_1)(x)$.
d) En este caso, ¿cuál es la función inversa de $g_1(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$?
e) Sean f_1 y f_2 dos funciones cualesquiera, tal que las funciones f_1^{-1}, f_2^{-1}, $f_1 \circ f_2$ y $f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ están definidas.
Demuestra que $f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ es la función inversa de $f_1 \circ f_2$.

2.1 Definición de logaritmo

Problema inicial

¿Qué valor debe tomar el exponente x para que se cumplan las siguientes igualdades?

a) $2^x = 8$

b) $3^x = \frac{1}{27}$

Solución

a) $2^x = 8$

$2^x = 2^3$ se escribe 8 como potencia de 2

$x = 3.$

Por lo tanto, $x = 3$.

b) $3^x = \frac{1}{27}$

$3^x = 27^{-1}$

$3^x = (3^3)^{-1}$ Se escribe como potencias de la misma base

$3^x = 3^{-3}$

$x = -3.$

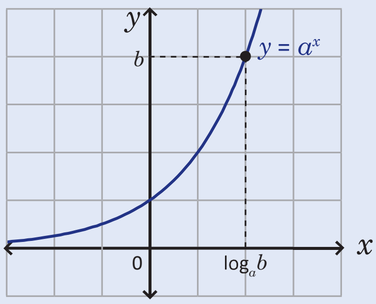
Por lo tanto, $x = -3$.

Definición

Sean a, b y x números reales tal que $b > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$, se define el **logaritmo** base a de un número b como sigue:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Significa que el logaritmo es el exponente al que se debe elevar el número a, llamado **base**, para obtener el número b.

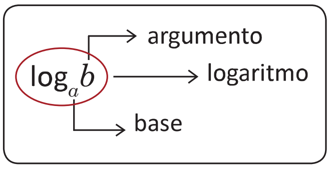


Ejemplo

En el Problema inicial se tiene que

a) $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$ y se lee el logaritmo base 2 de 8 es igual a 3.

b) $3^{-3} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{27} = -3$ y se lee el logaritmo de $\frac{1}{27}$ base 3 es igual a -3.



Problemas

1. Escribe como un logaritmo cada una de las siguientes potencias.

a) $2^2 = 4$

b) $3^4 = 81$

c) $10^{-1} = \frac{1}{10}$

d) $4^{-2} = \frac{1}{16}$

e) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

f) $25^{\frac{3}{2}} = 125$

g) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$

h) $2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$

2. Escribe cada logaritmo como una potencia.

a) $\log_2 64 = 6$

b) $\log_5 25 = 2$

c) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$

d) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

e) $\log_4 32 = \frac{5}{2}$

f) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}$

g) $\log_4 \sqrt{8} = \frac{3}{4}$

h) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$

2.2 Logaritmo de un número

Problema inicial

1. Calcula el valor de los siguientes logaritmos:

   a) $\log_2 16$ b) $\log_3 \frac{1}{9}$

2. Demuestra que $\log_a a^c = c$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Solución

1. a) $\log_2 16$

Sea $x = \log_2 16$

$x = \log_2 16 \Leftrightarrow 2^x = 16$ se aplica la definición de logaritmo,

$\Leftrightarrow 2^x = 2^4$ se resuelve la ecuación,

$\Leftrightarrow x = 4$.

b) $\log_3 \frac{1}{9}$

Sea $x = \log_3 \frac{1}{9}$

$x = \log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{9}$ se aplica la definición de logaritmo,

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^2}$ se escribe 9 como potencia de 3,

$\Leftrightarrow 3^x = 3^{-2}$ se reescribe con exponente negativo,

$\Leftrightarrow x = -2$.

2. Se tiene que $x = \log_a a^c \Leftrightarrow a^x = a^c$. Por lo tanto, $x = c$.

Conclusión

Calcular el valor de un logaritmo $x = \log_a b$ es encontrar el valor del exponente x que cumple $a^x = b$.

De manera general para encontrar el valor de un logaritmo se realizan los siguientes pasos:

1. Se escribe como potencia $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.
2. Se resuelve la ecuación $a^x = b$.

Si $b = a^c$ entonces $\log_a b = c$; por lo que, $\log_a a^c = c$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$
$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

Ejemplo

Encuentra el valor del logaritmo $\log_4 64$.

Solución 1
Sea $x = \log_4 64$ entonces $x = \log_4 64 \Leftrightarrow 4^x = 64 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

Solución 2
Utilizando la propiedad $\log_a a^c = c$: $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$.

Problemas

Determina el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_{10} 10$ b) $\log_3 1$ c) $\log_2 2^{100}$ d) $\log_2 32$

e) $\log_9 81$ f) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ g) $\log_8 4$ h) $\log_{25} 125$

i) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$ j) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$ k) $\log_4 \frac{1}{2}$ l) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

Unidad 5

2.3 Propiedades de los logaritmos*

Problema inicial

1. Compara el resultado de la operación y el logaritmo para cada uno de los siguientes literales.
   a) $\log_2 4 + \log_2 8$ y $\log_2 32$ b) $\log_2 8 - \log_2 4$ y $\log_2 2$ c) $3\log_2 4$ y $\log_2 4^3$ d) $\log_2 8^2$ y $\log_2 4^3$

2. Demuestra las siguientes propiedades.
   a) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
   b) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
   c) $b\log_a M = \log_a M^b$
   d) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

Solución

1. a) $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 2^2 + \log_2 2^3$ y $\log_2 32 = \log_2 2^5$
$= 2 + 3$ $= 5$
$= 5$

Por lo tanto, el resultado es el mismo.
Se observa que $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2(4 \times 8) = \log_2 32$.

b) $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 2^3 - \log_2 2^2$ y $\log_2 2 = 1$
$= 3 - 2$
$= 1$

Por lo tanto, el resultado es el mismo.
Se observa que $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 \frac{8}{4} = \log_2 2$.

c) $3\log_2 4 = 3\log_2 2^2$ y $\log_2 4^3 = \log_2 (2^2)^3$
$= 3(2)$ $= \log_2 2^6$
$= 6$ $= 6$

Por lo tanto, el resultado es el mismo.
Se observa que $3\log_2 4 = \log_2 4^3 = 6$.

d) $\log_2 8^2 = \log_2 2^6$ y $\log_2 4^3 = \log_2 2^6$
$= 6$ $= 6$

Por lo tanto, el resultado es el mismo.
Se observa que $8^2 = 4^3$.

2. Sean $x = \log_a M$ y $y = \log_a N$, por definición se tiene $M = a^x$ y $N = a^y$.

a) Se tiene el producto $MN = a^x a^y = a^{x+y}$
Al escribir como logaritmo: $\log_a MN = x + y$
Por lo tanto, $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$.

b) Se tiene el cociente $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
Por definición de logaritmo $\log_a \frac{M}{N} = x - y$
Por lo tanto, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

c) Se tiene la potencia $M^b = (a^x)^b = a^{bx}$
Se reescribe como logaritmo $bx = \log_a M^b$
Por lo tanto, $b\log_a M = \log_a M^b$.

d) En este caso $x = \log_a M$ y $x = \log_a N$
Entonces $M = a^x$ y $N = a^x$
Por lo tanto, $M = N$.

Conclusión

Sean a, M y N números positivos con $a \neq 1$, los logaritmos cumplen las siguientes propiedades:

1. $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
2. $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
3. $b\log_a M = \log_a M^b$
4. $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

Observa:
$(\log_2 4)^3 = 2^3 = 8$ y $\log_2 4^3 = 3\log_2 4 = 3(2) = 6$.
Se tiene que $(\log_2 4)^3 \neq \log_2 4^3$.
Por lo que, en general, $(\log_a M)^b \neq \log_a M^b$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\log_4 2 + \log_4 8$ b) $\log_6 12 + \log_6 18$ c) $\log_2 96 - \log_2 3$ d) $\log_2 6 - \log_2 24$

e) $\log_2 \frac{12}{5} + \log_2 \frac{5}{3}$ f) $\log_3 \frac{11}{54} + \log_3 \frac{2}{33}$ g) $\log_3 \frac{6}{7} - \log_3 \frac{2}{21}$ h) $\log_4 \frac{3}{10} - \log_4 \frac{12}{5}$

i) $3\log_9 3 + \log_9 243$ j) $5\log_4 8 + 3\log_4 32$ k) $2\log_2 54 - 3\log_2 18$ l) $2\log_{\frac{2}{3}} 12 - 2\log_{\frac{2}{3}} 18$

2.4 Cambio de base de un logaritmo*

Problema inicial

¿Cómo calcularías el valor de $\log_2 5$ utilizando el logaritmo base 10?

La mayoría de calculadoras científicas solo permiten encontrar el valor de logaritmos de base 10 y e. El número neperiano: $e = 2.718281828459045...$

Solución

Sea $x = \log_2 5$. Entonces:

$2^x = 5$	por la definición de logaritmo,
$\log 2^x = \log 5$	se aplica logaritmo a ambos lados de la igualdad,
$x\log 2 = \log 5$	utilizando propiedades de logaritmo,
$x = \frac{\log 5}{\log 2}$.	

El logaritmo base 10, usualmente, se denota sin la base: $\log_{10} a = \log a$.

Se utiliza la calculadora para determinar el cociente:

log 5 ÷ log 2 = $\Rightarrow$ Pantalla de la calculadora

```
log 5 ÷ log 2
      2.321928095
```

Por lo tanto, $\log_2 5 = 2.321928095...$

Definición

Sean a, b y c números positivos tales que $a \neq 1$ y $c \neq 1$. Se denomina **cambio de base** a la igualdad:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Ejemplo

1. Demuestra la propiedad del cambio de base para $c = 10$.

Se tiene que $x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$.

Se aplica logaritmo base 10: $\log a^x = \log b$.

Se aplica la propiedad del logaritmo de una potencia $x\log a = \log b$.

Se despeja x: $x = \frac{\log b}{\log a}$, $\log a \neq 0$ ya que $a \neq 1$.

Por lo tanto, se tiene que $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$.

2. Calcula el valor de $\log_4 8$.

En este caso no es necesario utilizar la calculadora.

Se utiliza $c = 2$.

$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$.

Por lo tanto, $\log_4 8 = \frac{3}{2}$.

Se puede utilizar cualquier base.

$\log_4 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 4} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^2} = \frac{3\log_3 2}{2\log_3 2} = \frac{3}{2}$.

Problemas

1. Simplifica los siguientes logaritmos con la propiedad de cambio de base.

a) $\log_4 32$ b) $\log_4 \frac{1}{8}$ c) $\log_9 \sqrt{3}$ d) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $\log_{\frac{1}{9}} 27$ f) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$ h) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Observa que el argumento del logaritmo y la base son potencias de una misma base.

2. Calcula el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log_5 24$ b) $\log_2 \frac{1}{3}$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$

Utiliza $c = 10$.

Unidad 5

2.5 Definición de la función logarítmica y su gráfica

Problema inicial

1. a) Utiliza la siguiente tabla para graficar la función $f(x) = \log_2 x$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					

b) Determina si la función $f(x) = \log_2 x$ es creciente o decreciente.

2. a) Utiliza la siguiente tabla para graficar la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					

b) ¿La función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es creciente o decreciente?

Solución

1. a) Si $x = \frac{1}{4}$ se tiene $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

Si $x = \frac{1}{2}$ se tiene $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

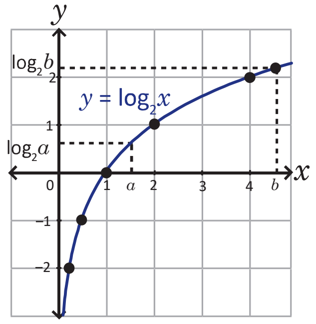
Si $x = 1$ se tiene $f(1) = \log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = \log_2 2 = 1$

Si $x = 4$ se tiene $f(4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2

Se traza una curva sobre los puntos obtenidos.



b) Si $0 < a < b$, entonces $\log_2 a < \log_2 b$.
Por lo tanto, $f(x) = \log_2 x$ es creciente.

2. a) Si $x = \frac{1}{4}$ se tiene $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

Si $x = \frac{1}{2}$ se tiene $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$

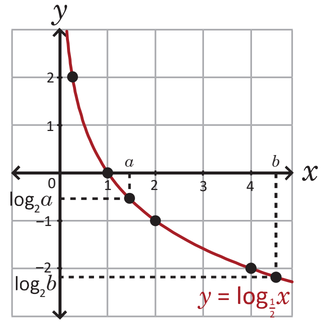
Si $x = 1$ se tiene $f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$

Si $x = 4$ se tiene $f(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	2	1	0	-1	-2

Se traza una curva sobre los puntos obtenidos.



b) Si $0 < a < b$, entonces $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$.
Por lo tanto, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es decreciente.

Definición

La función logarítmica se define como sigue
$$f: \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}$$
$$x \to \log_a x$$
donde a es un número positivo y $a \neq 1$.

La monotonía de la función $f(x) = \log_a x$ se describe a continuación:

1. Es creciente si $a > 1$.
2. $f(x)$ = Es decreciente si $0 < a < 1$.

Un logaritmo está bien definido si el argumento es positivo.

La gráfica de $f(x) = \log_a x$ pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones logarítmicas.

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_4 x$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

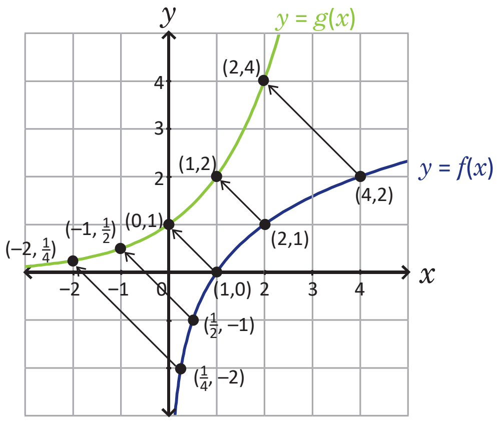
2.6 Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

Problema inicial

1. Grafica en un mismo plano cartesiano las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = 2^x$ y observa que si (a, b) es un punto de f entonces (b, a) es un punto de g.
2. Efectúa las composiciones:
   a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

Solución

1. La función $f(x) = \log_2 x$ se graficó en la clase anterior y la función $g(x) = 2^x$ se graficó en la clase 2.1 de la unidad 4.



$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = 2^x$
(4, 2)	(2, 4)
(2, 1)	(1, 2)
(1, 0)	(0, 1)
$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$

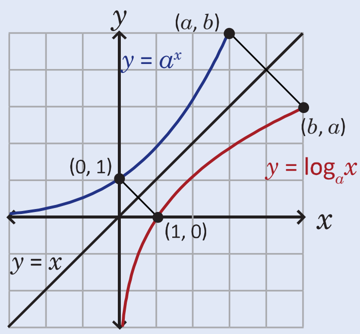
2. Efectúa las composiciones:

a) $f(g(x)) = f(2^x)$
$= \log_2 2^x$
$= x$

b) $g(f(x)) = g(\log_2 x)$
$= 2^{\log_2 x}$
$= x$

Por la definición de logaritmo $a^{\log_a x} = x$.

Conclusión



1. Las funciones $y = \log_a x$ y $y = a^x$ son simétricas respecto a la recta $y = x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

2. Para dos números reales a y b con $a > 0$ y $a \neq 1$ se tiene que $\log_a a^b = b$ y $a^{\log_a b} = b$ (con $b > 0$).

3. La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial.

$$f: \mathbb{R} \to]0, \infty[\qquad\qquad f^{-1}:]0, \infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \to a^x \qquad\qquad\qquad\qquad x \to \log_a x$$

4. $y = a^x$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$, haciendo uso de la simetría se obtiene que $y = \log_a x$ tiene como asíntota vertical la recta $x = 0$.

5. El dominio de la función logaritmo es el rango de la función exponencial: $]0, \infty[$.
El rango de la función logaritmo es el dominio de la función exponencial: $\mathbb{R}$.

6. La función logaritmo, al ser la inversa de la función exponencial, es una función biyectiva.

Problemas

Para cada función escribe su función inversa y grafícalas en el mismo plano cartesiano.

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_4 x$ c) $f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right)^x$

Recuerda que $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$

Unidad 5

2.7 Ecuaciones logarítmicas, parte 1

Problema inicial

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones encontradas.

a) $\log_2 x = 3$ b) $\log_3(x - 1) = 2$
c) $\log_5 x^2 = 4$ d) $\log_6(3x(x + 1)) = 2$

Verifica que el argumento del logaritmo es positivo al sustituir los valores encontrados.

Cuando se trata con logaritmos se consideran solo las soluciones reales.

Solución

a) Se utiliza la definición de logaritmo:
$\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8$.

Como $8 > 0$ entonces, $x = 8$ es solución de la ecuación.

b) Se utiliza la definición de logaritmo:
$\log_3(x - 1) = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10$.

Se verifica que $10 - 1 = 9 > 0$.
Por lo tanto, $x = 10$ es solución de la ecuación.

c) Se utiliza la definición de logaritmo:
$$\begin{aligned}\log_5 x^2 = 4 &\Leftrightarrow x^2 = 5^4\\ &\Leftrightarrow x = \pm 5^2\\ &\Leftrightarrow x = \pm 25\end{aligned}$$

Se verifica que $(\pm 25)^2 > 0$.
Por lo tanto, $x = 25$ y $x = -25$ son soluciones de la ecuación.

d) Se utiliza la definición de logaritmo: $3x(x + 1) = 6^2$
Se resuelve la ecuación:
$$\begin{aligned}3x^2 + 3x - 6^2 = 0 &\Leftrightarrow 3(x + 4)(x - 3) = 0\\ &\Leftrightarrow x = -4 \text{ o } x = 3\end{aligned}$$

Verificando si $x = -4$, $3(-4)(-4 + 1) = 36 > 0$.
Si $x = 3$, $3(3)(3 + 1) = 36 > 0$.
Por lo tanto, $x = -4$ y $x = 3$ son soluciones de la ecuación.

Conclusión

Una **ecuación logarítmica** es una ecuación en la cual aparece la variable x en el argumento del logaritmo.

Para resolver una ecuación de la forma $\log_a M = b$, donde M es una expresión algebraica de variable x, se resuelve la ecuación $a^b = M$ que se obtiene al aplicar la definición de logaritmo: $\log_a M = b \Leftrightarrow a^b = M$.
Luego se verifica si las soluciones encontradas satisfacen la condición del argumento $M > 0$.

Además, las ecuaciones exponenciales pueden resolverse aplicando logaritmos:

$$a^x = b \Leftrightarrow \log a^x = \log b \Leftrightarrow x\log a = \log b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$$

Ejemplo

Observa la siguiente solución:

$$7^x = 2 \Leftrightarrow \log 7^x = \log 2 \Leftrightarrow x\log 7 = \log 2 \Leftrightarrow x = \frac{\log 7}{\log 2} \Leftrightarrow x = 2.80735...$$

Problemas

1. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_2(x + 1) = 5$ c) $\log_2 x^2 = 6$ d) $\log_3 x^3 = 6$
e) $\log_4 x = -2$ f) $\log_3(2x + 1) = -1$ g) $\log_2 x^2 = -2$ h) $\log_2(x^2 + 4) = 3$
i) $\log(x(20 - x)) = 2$ j) $\log_6(x(13 - x)) = 2$ k) $\log(x(x + 3)) = 1$ l) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $9^x = 15$ b) $2^{x+1} = 13$ c) $5^{2x-1} = 1\,953\,125$

2.8 Ecuaciones logarítmicas, parte 2

Problema inicial

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$

b) $\log_5(2x) = \log_5(x+1)$

Solución

a) Se usa la propiedad de la suma de logaritmos:

$\log_2 x + \log_2(x-1) = \log_2(x(x-1))$

sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$\log_2(x(x-1)) = 1$

se debe aplicar la definición y resolver:

$$\begin{aligned} \log_2(x(x-1)) = 1 &\Leftrightarrow (x(x-1)) = 2^1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ o } x = -1 \end{aligned}$$

se verifica que el argumento es positivo en cada logaritmo:

si $x = 2$, $2 > 0$, $2 - 1 = 1 > 0$,

si $x = -1$, $-1 < 0$. No es solución de la ecuación.

Por lo tanto, la solución es $x = 2$.

b) $\log_5(2x) = \log_5(x+1)$

$2x = x + 1$ Se utiliza la propiedad: $\log_a M = \log_a N \Rightarrow M = N$,

$x = 1$ se resuelve la ecuación.

Se evalúa $x = 1$ en cada logaritmo

$2(1) = 2 > 0$ y $2 + 1 = 3 > 0$.

Por lo tanto, la solución es $x = 1$.

Conclusión

Para resolver las ecuaciones logarítmicas se utilizan las propiedades de los logaritmos para llevar la ecuación a la forma $\log_a M = b$.

1. Para todo M y N, números positivos se cumple que

   a) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

   b) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

   c) $\log_a M^b = b\log_a M$

   d) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

2. Se debe comprobar que el argumento de cada logaritmo es positivo al sustituir los valores encontrados para verificar que son soluciones de la ecuación.

En la propiedad $\log_a M^b = b\log_a M$, M debe ser un número positivo. Si b es par se debe tener cuidado.
Ejemplo:
$\log_3 x^2 = 4 \Leftrightarrow 2\log_3 x = 4 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$
En este caso falta la solución $x = -9$.
Así, es mejor no utilizarla en la solución de ecuaciones.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

b) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+1)^2 = -2$

c) $\log_4(3x) + \log_4(x-2)^{-1} = 1$

d) $\log(x+1) = \log(1-x)$

e) $\log_8(x-3)^9 = 6$

f) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^6 = -18$

g) $\log_3(x+1) + \log_3(x^2-x+1) = 2$

h) $\log_2(x^4 - 6x^2 + 16)^4 = 12$

2.9 Logaritmo base 10 y logaritmo natural*

Problema inicial

1. Determina el valor de $\log 2^{2019}$.
2. ¿Cuántos dígitos tiene el número 2^{2019}?

Observa que:
n se escribe con 1 dígito si y solo si $10^0 \leq n < 10^1$
n se escribe con 2 dígitos si y solo si $10^1 \leq n < 10^2$
n se escribe con 3 dígitos si y solo si $10^2 \leq n < 10^3$

Solución

1. Se calcula $\log 2^{2019} = 2019\log 2 = 607.77956...$

2. Observa el número de dígitos de los números

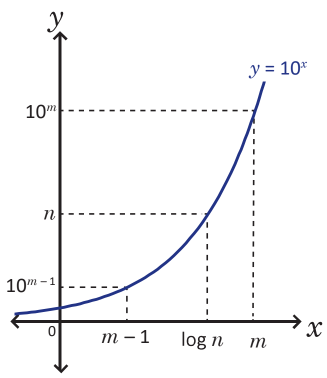
$$\underbrace{1, 2, ..., 9}_{\text{1 dígito}}, \underbrace{10, 11, 12, ..., 99}_{\text{2 dígitos}}, \underbrace{100, 101, ..., 999}_{\text{3 dígitos}}, \underbrace{1\,000, 1\,001, ..., 9\,999}_{\text{4 dígitos}}, \underbrace{10\,000, 10\,001...}_{\text{5 dígitos}}$$

Entonces se puede deducir que, si n es un número positivo:
n se escribe con m dígitos si y solo si $10^{m-1} \leq n < 10^m$

El número de dígitos de 2^{2019} está determinado por el exponente m tal que

$$10^{m-1} \leq 2^{2019} < 10^m \Leftrightarrow \log 10^{m-1} \leq \log 2^{2019} < \log 10^m$$
$$\Leftrightarrow m - 1 \leq \log 2^{2019} < m$$

Del problema 1 se tiene que $607 \leq \log 2^{2019} < 608$.
Por lo tanto, 2^{2019} se escribe con 608 dígitos.



Observa que si $10^{m-1} \leq n < 10^m$, entonces $m - 1 \leq \log n < m$, ya que la base es $10 > 1$.

Conclusión

1. El logaritmo base 10 de un número a se denota por $\log a$.

2. El número de dígitos de un número entero positivo a es el número entero m inmediatamente mayor a $\log a$.

3. El logaritmo natural de un número a es el logaritmo $\log_e a$, la base es el número neperiano $e = 2.71828...$, y se utiliza la notación $\log_e a = \ln a$.
   El logaritmo natural es muy útil en el cálculo infinitesimal.

Problemas

1. ¿Cuántos dígitos tienen las siguientes potencias?
   a) 3^{2019} b) 5^{1000} c) $2\,019^{2019}$

2. ¿Cuáles potencias de 2 tienen 2 019 dígitos?

3. Obtener el valor de los siguientes logaritmos:
   a) $\ln 2$ b) $\ln 3$
   c) $\ln 10$ d) $\ln \frac{1}{4}$
   e) $\ln \frac{8}{3}$ f) $\ln \frac{11}{3}$

En la calculadora utiliza la tecla ln para calcular el logaritmo natural de un número.

2.10 Practica lo aprendido

1. Calcula el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_7 49$ b) $\log_{16} 2$ c) $\log_9 \frac{1}{3}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 1$ e) $\log_5 \sqrt{5}$ f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}$

g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$ h) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ i) $\log_{\sqrt{2}} 2$

j) $\log_{\sqrt{2}} 4$ k) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$ l) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$

2. Determina el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_6 2 + \log_6 3$ b) $\log 4 + \log 25$ c) $\log_3 99 - \log_3 11$

d) $\log_5 4 - \log_5 500$ e) $\log_7 \frac{28}{9} + \log_7 \frac{63}{4}$ f) $\log_8 \frac{48}{5} + \log_8 \frac{10}{3}$

g) $\log_2 \frac{15}{16} - \log_2 30$ h) $\log_9 \frac{36}{5} - \log_9 \frac{4}{45}$ i) $\log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} + \log_{\sqrt{5}} \frac{20}{3}$

3. Calcula el valor de las siguientes expresiones, sin usar la calculadora.

a) $\frac{\log_9 125}{\log_9 5}$ b) $\frac{\log_3 49}{\log_3 7}$ c) $\frac{\log_6 64}{\log_6 32}$

4. Encuentra el valor de los siguientes logaritmos con la propiedad del cambio de base:

a) $\log_3 15$ b) $\log_8 6$ c) $\log_2 \frac{1}{5}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}$ f) $\log_{\frac{5}{3}} \frac{1}{2}$

5. Grafica las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_8 x = \frac{7}{3}$ b) $\log_3 x(x + 2) = 1$ c) $\log_2 x(2 - 3x) = -2$

d) $\log_6(2x - 3) = \log_6 5 + \log_6 7$ e) $\log (x - 3) + \log (5 - x) = 0$ f) $\log (x - 8) - \log (x - 9) = \log 4$

g) $\log_7(-x) - \log_7(6 - x) = 1$ h) $\log_6(x - 2) + \log_6(x + 3) = 1$ i) $\log_2(x^2 + 9) = 1 + \log_2(2x^2 - 33)$

7. Determina la cantidad de dígitos de los siguientes números:

a) 2^{350} b) 3^{1234} c) 4^{98765}

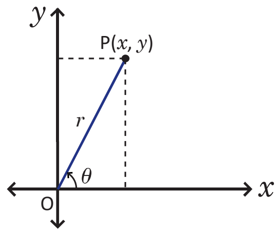
8. Encuentra la potencia de base 11 que se escribe con 100 dígitos. ¿Existe otra?

3.1 Razones trigonométricas de cualquier ángulo (repaso)

Problema inicial

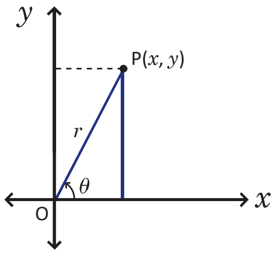
1. Se tiene la gráfica del ángulo θ, O es el origen, $\overline{\text{OP}}$ es el lado terminal del ángulo θ dibujado en posición estándar, r es la longitud del segmento $\overline{\text{OP}}$. Escribe las razones trigonométricas del ángulo θ.

2. ¿Las razones trigonométricas dependen del valor de r?

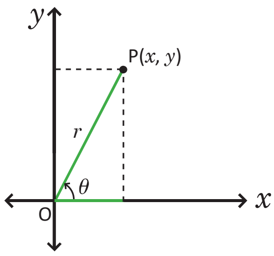


Solución

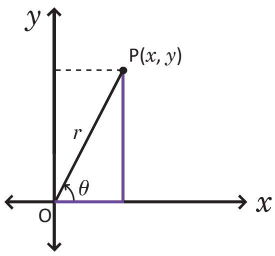
1.



sen $\theta = \frac{y}{r}$



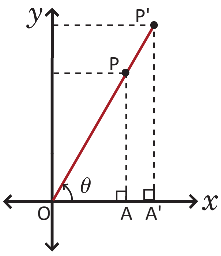
cos $\theta = \frac{x}{r}$



tan $\theta = \frac{y}{x}$

siempre que $x \neq 0$

2. Se elige otro punto P'(x', y') tal que $\overline{\text{OP'}}$ es también lado terminal de θ, como muestra la figura:



Se cumple que P es un punto del segmento $\overline{\text{OP'}}$.

Sea A la proyección de P en el eje x y A' la proyección de P' en el eje x.

Se cumple que ΔPOA ~ ΔP'OA', por criterio AA de semejanza de triángulos.

Si $r' = \overline{\text{OP'}}$, entonces de la semejanza se tiene que
sen $\theta = \frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$, cos $\theta = \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$ y tan $\theta = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$.

Por lo tanto, las razones no dependen del valor de r.

Conclusión

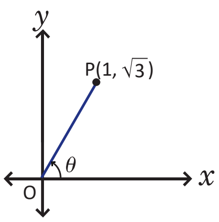
1. Las razones trigonométricas no dependen de la longitud del segmento $\overline{\text{OP}}$.
2. Las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo θ.
3. Al ángulo θ le corresponde un único valor de sen θ, un único valor de cos θ y un único valor de tan θ.
4. Las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ son funciones del ángulo θ.

De ahora en adelante se llamarán **funciones trigonométricas** a las razones seno, coseno y tangente.

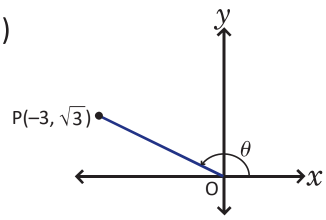
Problemas

1. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo θ a partir del punto P(x, y).

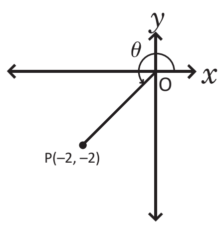
a)



b)



c)



2. Comprueba que el punto P'(cos θ, sen θ) pertenece al segmento $\overline{\text{OP}}$ en cada literal del problema 1.

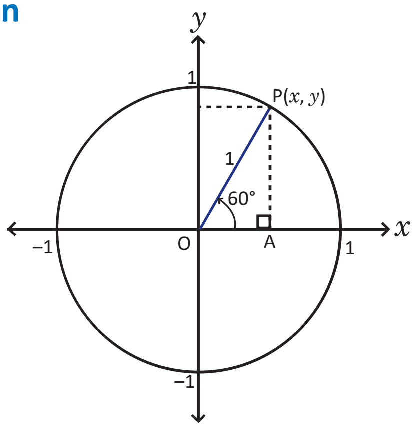
3.2 Círculo trigonométrico

Problema inicial

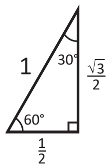
1. Dibuja en el plano cartesiano una circunferencia centrada en el origen y de radio 1. Representa el ángulo de 60° tomando como lado terminal un radio de la circunferencia.
2. Determina las coordenadas del punto P(x, y), que es la intersección de la circunferencia con el lado terminal del ángulo.

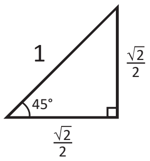
Solución

1.

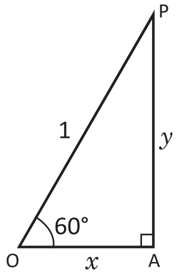


Los triángulos notables a utilizar en los ángulos de referencia en el Círculo trigonométrico son:





2. En la figura se forma el triángulo rectángulo POA, P es el punto P(x, y), O es el origen y A es la proyección de P sobre el eje x.



Utilizando razones trigonométricas:

sen 60° = $\frac{y}{1} = y$ y cos 60° = $\frac{x}{1} = x$

Por lo que se tiene:

y = sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y x = cos 60° = $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, las coordenadas del punto P son: P$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

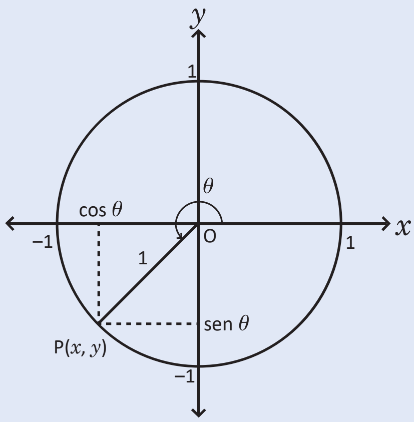
Conclusión

1. Se denomina **Círculo trigonométrico (CT)** a la circunferencia de radio 1, centrada en el origen O.

2. Las coordenadas de un punto P(x, y) en el círculo trigonométrico están determinadas por el ángulo θ dibujado en posición estándar con lado terminal $\overline{OP}$. Por definición de las razones trigonométricas de cualquier ángulo se tiene sen $\theta = \frac{y}{1} = y$ y cos $\theta = \frac{x}{1} = x$.

   Por lo tanto, P(x, y) = P(cos θ, sen θ).

3. Para todo ángulo θ es posible determinar los valores de cos θ y sen θ como coordenadas de un punto en el CT.



Problemas

1. Para cada valor de θ grafica el punto P(cos θ, sen θ) en el CT. Dibuja un círculo por cada literal.
   a) θ = 120°, θ = 210° b) θ = 30°, θ = 300° c) θ = 45°, θ = 135°
   d) θ = –45°, θ = –135° e) θ = 360°, θ = 405° f) θ = 495°, θ = 540°

2. Obtén el seno y coseno de los siguientes ángulos utilizando el círculo trigonométrico.
   a) θ = 0° b) θ = 90° c) θ = 180° d) θ = 270°

Utiliza el hecho que P(cos θ, sen θ) = P(x, y).

3.3 Periodicidad de las funciones seno y coseno en el círculo trigonométrico

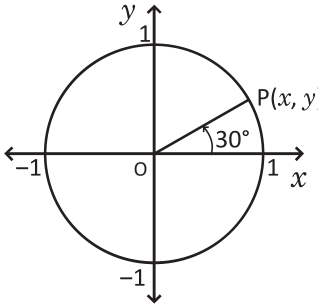
Problema inicial

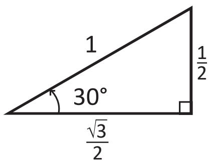
Grafica los siguientes puntos en el CT y determina sus coordenadas:

a) P(cos 30°, sen 30°) b) P(cos 390°, sen 390°)

Solución

a)

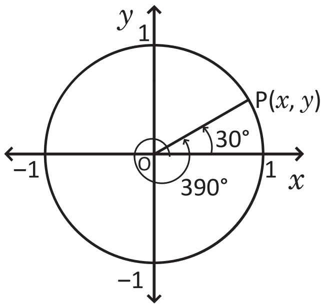




sen 30° = $\frac{1}{2}$ cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto, P(cos 30°, sen 30°) = P$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b)



Se descompone el ángulo 390° = 30° + 360°.

El ángulo de referencia es 30°, así se tiene que

sen 390° = sen 30° = $\frac{1}{2}$ y cos 390° = cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto, P(cos 390°, sen 390°) = P$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

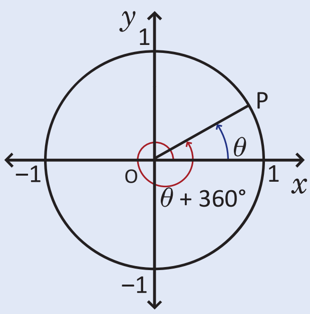
Conclusión

Sea θ un ángulo cualquiera y sea $\alpha = \theta + 360°$. Se cumple que al dibujar los ángulos θ y α, en posición estándar, tienen el mismo lado terminal en el CT.

Así se cumple que P(cos θ, sen θ) = P(cos(θ + 360°), sen(θ + 360°)).

Una función f es **periódica** si existe un valor t tal que para todo x se cumple que $f(x) = f(x + t)$. Por lo que las funciones seno y coseno son periódicas pues cumplen las siguientes propiedades:

cos(θ ± 360°) = cos θ sen(θ ± 360°) = sen θ



Ejemplo

Determina el valor de sen(–330°).

sen(–330°) = sen(–330° + 360°) = sen(30°) = $\frac{1}{2}$, aplicando la periodicidad.

Por lo tanto, sen(–330°) = $\frac{1}{2}$.

Problemas

1. Utiliza la periodicidad de las funciones trigonométricas para calcular los siguientes valores:

a) sen 405° b) cos 420° c) sen(–300°)

d) cos(–675°) e) sen 1080° f) cos 630°

g) sen(–900°) h) cos(–630°) i) sen 540°

2. Utiliza las fórmulas del seno y coseno de una suma para demostrar las siguientes propiedades:

a) cos(θ + 360°) = cos θ b) sen(θ + 360°) = sen θ

cos($\alpha + \beta$) = cos α cos β – sen α sen β
sen($\alpha + \beta$) = sen α cos β + cos α sen β

3.4 Periodicidad de la tangente en el círculo trigonométrico

Problema inicial

Para cada uno de los ángulos:

1. $\theta = 30°$ 2. $\theta = -30°$

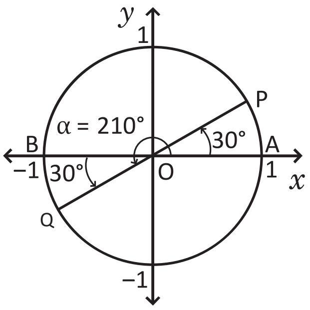
> P'$(-x, -y)$ es el punto simétrico de P(x, y) respecto al origen.

Realiza lo siguiente:

a) Grafica el punto Q simétrico al punto P$(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$ respecto al origen y escribe sus coordenadas.
b) Determina el ángulo α en posición estándar que corresponde al punto Q.
c) Cálcula el valor de $\tan\alpha$.

Solución

1.



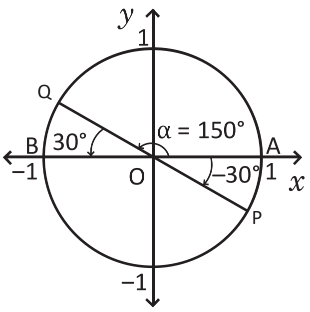
a) Se prolonga el segmento $\overline{OP}$ hasta cortar nuevamente al CT. Este punto de corte es Q pues $\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$. Sus coordenadas son Q$(-\cos 30°, -\text{sen}\,30°)$ por ser simétrico al punto P.

b) Sean los puntos A(1, 0) y B(–1, 0). Por ángulos opuestos por el vértice se cumple que $\sphericalangle BOQ = \sphericalangle AOP = 30°$. Por lo tanto, $\alpha = 180° + 30° = 210°$.

c) Se tiene el punto Q$(-\cos 30°, -\text{sen}\,30°)$, entonces:

$$\tan 210° = \frac{-\text{sen}\,30°}{-\cos 30°} = \frac{\text{sen}\,30°}{\cos 30°} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2.



a) Se grafica el punto Q y sus coordenadas son Q$(-\cos 30°, -\text{sen}\,30°)$ por ser simétrico al punto P, respecto al origen.

b) Sean los puntos A(1, 0) y B(–1, 0). Por ángulos opuestos por el vértice se cumple que $\sphericalangle QOB = \sphericalangle AOP = 30°$. Por lo tanto, $\alpha = 180° - 30° = 150°$.

c) Se tiene el punto Q$(\cos(-30°), -\text{sen}(-30°))$, entonces:

$$\tan 150° = \frac{-\text{sen}(-30°)}{-\cos(-30°)} = \frac{\text{sen}(-30°)}{\cos(-30°)} = \tan(-30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

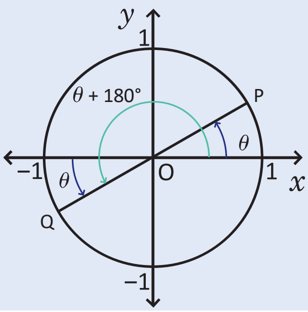
Conclusión

Sea θ un ángulo cualquiera, entonces:

$$Q(\cos(\theta + 180°), \text{sen}(\theta + 180°)) = Q(-\cos\theta, -\text{sen}\,\theta).$$

Así, $\tan(\theta + 180°) = \dfrac{-\text{sen}\,\theta}{-\cos\theta} = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$

Por lo tanto, la propiedad de **periodicidad** de la tangente está dada por la expresión: $\tan(\theta \pm 180°) = \tan\theta$.



Problemas

1. Utiliza la periodicidad de la función tangente para calcular los siguientes valores:

a) $\tan 225°$	b) $\tan 210°$	c) $\tan 240°$	d) $\tan 180°$
e) $\tan(-150°)$	f) $\tan(-135°)$	g) $\tan(-120°)$	h) $\tan(-300°)$

2. Utiliza la fórmula de la tangente de una suma para demostrar la propiedad $\tan(\theta + 180°) = \tan\theta$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

3.5 Función seno

Problema inicial

1. Completa la siguiente caja de valores y grafica la función y = sen θ.

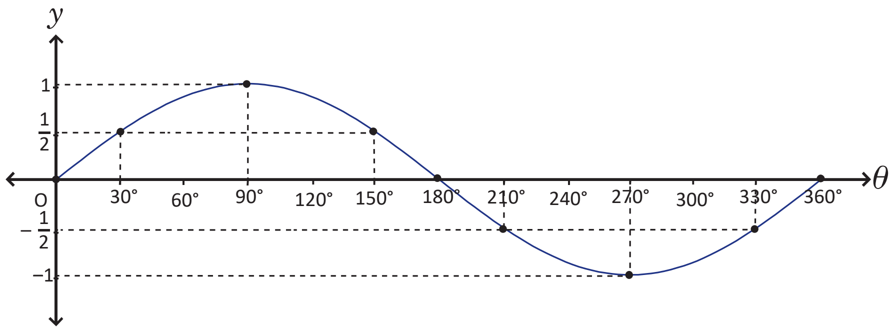
θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	300°	360°
sen θ									

2. Determina su dominio y rango.

Solución

1.

θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	–1	$-\frac{1}{2}$	0

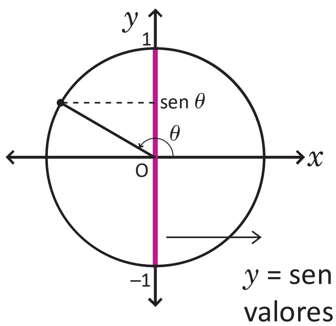


2. Dominio. La variable θ puede tomar el valor de cualquier ángulo.

Por lo tanto, el dominio de la función y = sen θ es $\mathbb{R}$.

Rango. Del CT se tiene que el valor del seno de cualquier ángulo puede tomar valores en el intervalo [–1, 1].

Por lo tanto, el rango de la función y = sen θ es [–1, 1].



y = sen θ toma valores en [–1, 1]

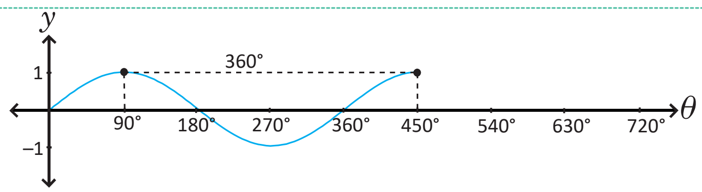
Conclusión

La función $f(\theta)$ = sen θ tiene dominio $D_f = \mathbb{R}$ y rango R_f = [–1, 1].

La función $f(\theta)$ = sen θ es una función periódica, es decir, existe un valor α tal que $f(\theta + \alpha) = f(\theta)$ para todo valor de θ. Se llama **periodo** de la función f al valor más pequeño $\alpha > 0$ tal que $f(\theta + \alpha) = f(\theta)$. El periodo de la función seno es 360°. En general se cumple que sen (θ + 360°n) = sen θ para todo ángulo θ y para todo n entero.

Problemas

1. La siguiente figura muestra la función seno graficada en el intervalo [0°, 450°]. Utiliza la periodicidad de la función para completar la gráfica hasta el ángulo 720°.



2. Grafica la función $f(\theta)$ = sen θ, en el intervalo [–360°, 0°].

3.6 Función coseno

Problema inicial

1. Completa la siguiente caja de valores y grafica la función $y = \cos\theta$.

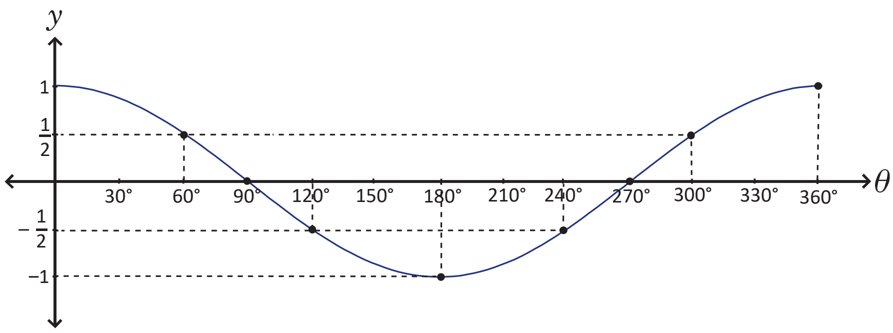
θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos\theta$									

2. Determina su dominio y rango.

Solución

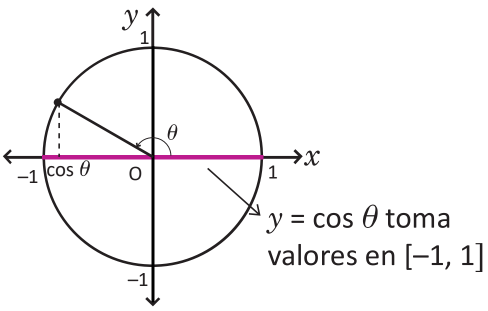
1.

θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	–1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1



2. Dominio. La variable θ puede tomar el valor de cualquier ángulo. Por lo tanto, el dominio de la función $y = \cos\theta$ es $\mathbb{R}$.

Rango. Del CT se tiene que el valor del coseno de cualquier ángulo puede tomar valores en el intervalo [–1, 1]. Por lo tanto, el rango de la función $y = \cos\theta$ es [–1, 1].



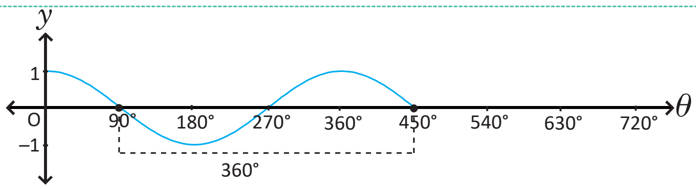
Conclusión

La función $f(\theta) = \cos\theta$ tiene dominio $D_f = \mathbb{R}$ y rango $R_f = [-1, 1]$.

La función $f(\theta) = \cos\theta$ es una función periódica. El periodo de la función coseno es 360°. En general se cumple que $\cos(\theta + 360°n) = \cos\theta$ para todo ángulo θ y para todo n entero.

Problemas

1. La siguiente figura muestra la función coseno graficada en el intervalo [0°, 450°], utiliza la periodicidad de la función para completar la gráfica hasta el ángulo 720°.

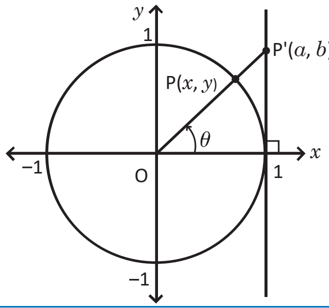


2. Grafica la función $f(\theta) = \cos\theta$, en el intervalo [–360°, 0°].

3.7 La tangente en el círculo trigonométrico

Problema inicial

Se traza la recta $x = 1$ y se dibuja un ángulo θ con lado terminal $\overline{OP}$, donde P(x, y) es un punto en el CT. Luego el segmento OP se prolonga hasta el punto P' que está en la recta $x = 1$.



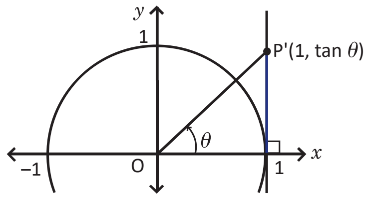
1. Determina las coordenadas del punto P'(a, b) en función de θ.

2. ¿Para cuáles valores de θ, la función $y = \tan\theta$ no está definida?

Solución

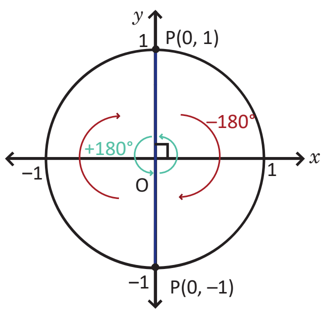
1. Se tiene que $a = 1$, ya que P' es un punto de la recta $x = 1$.
   Utilizando la definición de tangente se tiene que $\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{b}{1} = b$.

   Por lo tanto, P'(a, b) = P'(1, $\tan\theta$).



2. Como $\tan\theta = \frac{y}{x}$, no está definida si $x = 0$. Este valor corresponde a los ángulos $\theta = 90°$ y $\theta = 270°$, cuyos puntos en el CT son (0, 1) y (0, –1) respectivamente.

   También $x = 0$, si se suma o resta 180° de estos ángulos. Por lo tanto, todos estos valores se pueden escribir así: $90° + 180°n$, donde n es un número entero.

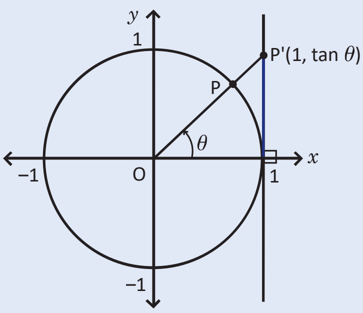


Conclusión

La tangente de un ángulo θ puede representarse en el círculo trigonométrico de la siguiente manera:

1. Se dibuja el punto P correspondiente al ángulo θ en el CT.
2. Se prolonga el segmento $\overline{OP}$ (O es el origen) hasta cortar a la recta $x = 1$.
3. Se llama P' al punto de corte. La coordenada en y de P' es igual a $\tan\theta$.

La función $\tan\theta$ no está definida para aquellos ángulos de la forma:
$\theta = 90° + 180°n$ donde n es un número entero.



Problemas

Representa el valor de la tangente de los siguientes ángulos, utilizando la figura de la conclusión:

a) $\theta = 30°$ b) $\theta = 60°$ c) $\theta = 135°$

d) $\theta = –45°$ e) $\theta = –120°$ f) $\theta = –150°$

3.8 Gráfica de la función tangente

Problema inicial

1. ¿Qué sucede con el valor de tan θ, si θ toma valores cercanos a 90° y –90°? Utiliza las siguientes tablas.

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ					

θ	–88°	–89°	–89.5°	–89.9°	–89.99°
tan θ					

2. Completa la siguiente tabla y grafica la función y = tan θ en el intervalo]–90°, 90°[.

θ	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°
tan θ							

3. Determina el dominio de la función y = tan θ.
4. ¿Cuál es el rango de la función y = tan θ?

Solución

1. Para ángulos cercanos a 90°.

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ	28.6...	57.2...	114.5...	572.9...	5 729.5...

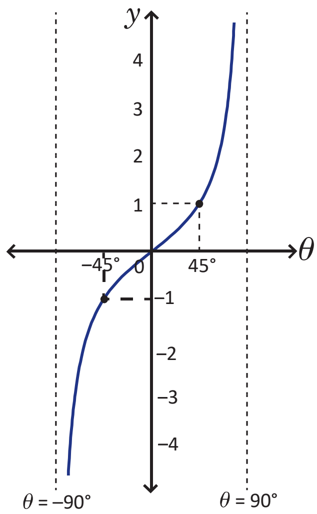
El valor de tan θ se vuelve cada vez mayor cuando θ toma valores muy cercanos a 90°.

Para ángulos cercanos a –90°.

θ	–88°	–89°	–89.5°	–89.9°	–89.99°
tan θ	–28.6...	–57.2...	–114.5...	–572.9...	–5 729.5...

El valor de tan θ se vuelve cada vez menor cuando θ toma valores muy cercanos a –90°.

Se observa que θ = 90° y θ = –90° son asíntotas verticales.



2. La tabla queda de la siguiente manera:

θ	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°
tan θ	–1.7...	–1	–0.5...	0	0.5...	–1	1.7...

Al graficar se obtiene la figura de la derecha.

3. En la clase anterior se vio que la función y = tan θ, no está definida para los valores θ = 90° + 180°n, con n entero. Por lo tanto, el dominio es:
$\mathbb{R}$ – {90° + 180° n | n es entero}.

4. A partir de la gráfica se obtiene que el rango de y = tan θ es $\mathbb{R}$.

Conclusión

La función $f(\theta)$ = tan θ tiene como dominio el conjunto $\mathbb{R}$ – {90° + 180°n | n es entero} y su rango es $\mathbb{R}$. Además, las rectas θ = 90° + 180°n, donde n es un número entero, son asíntotas verticales de la gráfica de la función tangente.

La función $f(\theta)$ = tan θ es una función periódica. El periodo de la función tangente es 180°, y por tanto, en general, tan (θ + 180°n) = tan θ para todo n entero.

Problemas

Utiliza la periodicidad de la tangente para graficar la función $f(\theta)$ = tan θ en el intervalo]–270°, 270°[.

3.9 Periodo y amplitud de las funciones trigonométricas

Problema inicial

1. Grafica en un mismo plano cartesiano las funciones $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = 2sen θ en el intervalo [0°, 360°].

θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ					
2sen θ					

2. a) Grafica la función $g_1(\theta)$ = cos θ en el intervalo [0°, 360°] luego, grafica $g_2(\theta)$ = cos 2θ en el intervalo [0°, 180°], utiliza la siguiente tabla.

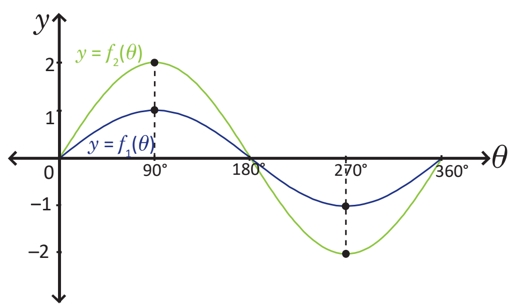
θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ					
cos 2θ					

b) Comprueba que $g_2(\theta + 180°) = g_2(\theta)$ y completa la gráfica hasta el ángulo 360°.

Solución

1. Completando la tabla.

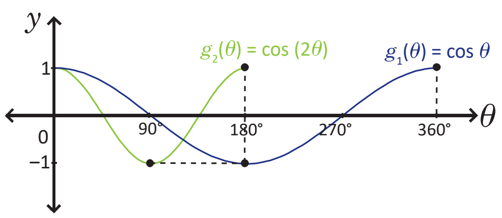
θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ	0	1	0	–1	0
2sen θ	0	2	0	–2	0



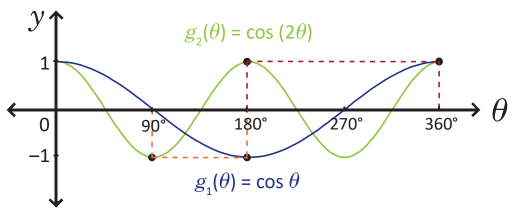
Cada punto de $f_2(\theta)$ = 2sen θ se obtiene multiplicando por 2 la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

2. a) Completando la tabla.

θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ	0°	90°	180°	270°	360°
cos 2θ	1	0	–1	0	1



b) $g_2(\theta + 180°) = \cos(2\theta + 360°) = \cos 2\theta = g_2(\theta)$



Cada punto de la gráfica de $g_2(\theta)$ = cos 2θ se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ la coordenada en θ de los puntos de la gráfica de $g_1(\theta)$ = cos θ.

Definición

Se llama **amplitud** de la función trigonométrica $f(\theta)$ = A sen θ al valor |A| y es el máximo valor que puede tomar la función. En este caso, el rango de la función es [–|A|, |A|]. Esta función se obtiene multiplicando por A todas las coordenadas en y de la función sen θ.

La función $f(\theta)$ = sen Bθ, donde B es un número real diferente de 0, cumple que

sen (Bθ + 360°) = sen Bθ $\Leftrightarrow$ sen B$\left(\theta + \frac{360°}{B}\right)$ = sen Bθ $\Leftrightarrow$ $f\left(\theta + \frac{360°}{B}\right) = f(\theta)$.

Así, el **periodo** de la función $f(\theta)$ = sen Bθ es $\frac{360°}{|B|}$ (se utiliza |B|, porque el periodo es positivo).

Estas definiciones también se aplican a las funciones $f(\theta)$ = Acos θ y $f(\theta)$ = cos Bθ.

Problemas

Grafica, en el intervalo [0, 360°], las siguientes funciones utilizando la amplitud y periodicidad.

a) $f(\theta)$ = 3sen θ b) $f(\theta)$ = –2cos θ c) $f(\theta)$ = sen 3θ d) $f(\theta)$ = cos $\frac{\theta}{2}$

3.10 Desplazamiento vertical de las funciones trigonométricas

Problema inicial

En cada literal grafica las funciones en un mismo plano cartesiano.

a) $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = sen $\theta + 1$; [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen $\theta + 1$						

b) $g_1(\theta)$ = sen θ y $g_2(\theta)$ = sen $\theta - 1$; [0°, 450°]

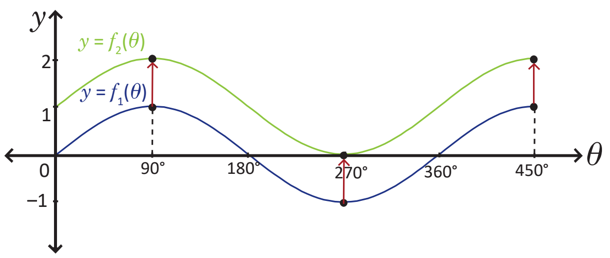
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen $\theta - 1$						

Solución

Observa que las funciones sen(θ + 1°) y sen θ + 1 son distintas.

a) Se completa la tabla.

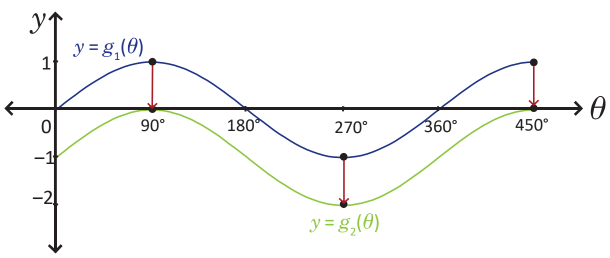
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen (θ) + 1	1	2	1	0	1	2



Cada punto de $f_2(\theta)$ = sen $\theta + 1$ es un desplazamiento de 1 unidad hacia arriba de un punto de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

b) Se completa la tabla.

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen $\theta - 1$	–1	0	–1	–2	–1	0



Cada punto de $g_2(\theta)$ = sen $\theta - 1$ es un desplazamiento de 1 unidad hacia abajo de un punto de la gráfica de $g_1(\theta)$ = sen θ.

Conclusión

La gráfica de $f(\theta)$ = sen $\theta + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la gráfica de la función sen θ.

- Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo.

Dada la función $f(\theta)$ = sen $\theta + k$ con dominio $\mathbb{R}$, su rango es el intervalo $[-1 + k, 1 + k]$.

Estas reglas también se aplican a la función $f(\theta)$ = cos $\theta + k$ como desplazamiento vertical de la función cos θ.

En general la gráfica de $f(x) + k$ es un desplazamiento vertical de la gráfica de $f(x)$: hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones, en el intervalo [0, 360°], utilizando los desplazamientos:

a) $f(\theta)$ = cos $\theta + 1$

b) $f(\theta)$ = sen $\theta + 2$

c) $f(\theta)$ = cos $\theta - 2$

d) $f(\theta)$ = sen $\theta - 3$

3.11 Desplazamiento horizontal de las funciones trigonométricas

Problema inicial

En los siguientes literales grafica las funciones en un mismo plano cartesiano, en el intervalo dado.

a) $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = sen$(\theta - 90°)$; [0°,450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ						
sen$(\theta - 90°)$						

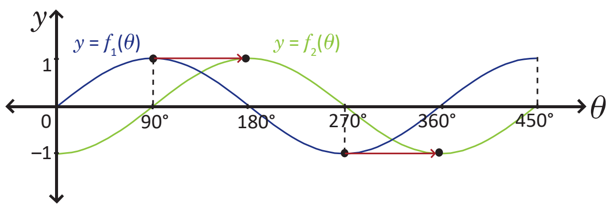
b) $g_1(\theta)$ = cos θ y $g_2(\theta)$ = cos$(\theta + 90°)$; [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°
cos θ							
cos$(\theta + 90°)$							

Solución

a) Se completa la tabla.

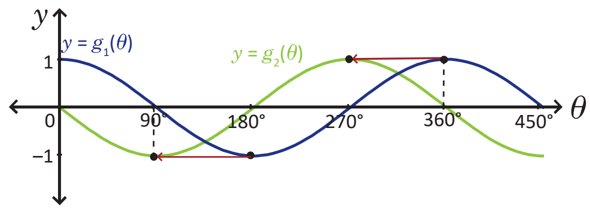
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ	0	1	0	–1	0	1
sen$(\theta - 90°)$	–1	0	1	0	–1	0



Cada punto de $f_2(\theta)$ = sen$(\theta - 90°)$ es un desplazamiento de 90° hacia la derecha de un punto de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

b) Se completa la tabla.

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
cos θ	1	0	–1	0	1	0
cos$(\theta + 90°)$	0	–1	0	1	0	–1



Cada punto de $g_2(\theta)$ = cos$(\theta + 90°)$ es un desplazamiento de 90° hacia la izquierda de un punto de la gráfica de $g_1(\theta)$ = cos θ.

Conclusión

La gráfica de $f(\theta)$ = sen$(\theta - \alpha)$ es un desplazamiento horizontal de α unidades de la gráfica de sen θ.

- Si $\alpha > 0$ el desplazamiento es hacia la derecha.
- Si $\alpha < 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda.

Estas reglas también se aplican a la función $f(\theta)$ = cos$(\theta - \alpha)$ como desplazamiento de la función cos θ.

En general, la gráfica de $f(x - h)$ es un desplazamiento horizontal de h unidades de la gráfica de $f(x)$:

- Hacia la derecha si $h > 0$.
- Hacia la izquierda si $h < 0$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones, en el intervalo [0, 360°], utilizando los desplazamientos:

a) $f(\theta)$ = cos$(\theta - 45°)$

b) $f(\theta)$ = cos$(\theta - 90°)$

c) $f(\theta)$ = sen$(\theta - (-30°))$

d) $f(\theta)$ = sen$(\theta + 90°)$

3.12 Forma general de las funciones trigonométricas

Problema inicial

Grafica la función $f(\theta) = 2\text{sen}\,(3\theta + 90°)$ en el intervalo [0°, 360°] realizando los siguientes pasos:

1. Considera las funciones $f_1(\theta) = \text{sen}\,3\theta$, $f_2(\theta) = 2\text{sen}\,3\theta$ y $f(\theta) = 2\text{sen}(3\theta + 90°)$, luego completa la Tabla 1.
2. Completa la Tabla 2.
3. Grafica en el mismo plano cartesiano las funciones $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$, en el intervalo [0, 120°].
4. Utiliza la periodicidad para completar la gráfica de $f_2(\theta)$ hasta el intervalo [0°, 360°].
5. Grafica en otro plano cartesiano las funciones $f_2(\theta)$ y $f(\theta)$. Utiliza la Tabla 2.

Tabla 1

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$					
$f_2(\theta)$					

Tabla 2

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$					
$f(\theta)$					

Observa que

$f(\theta) = 2\text{sen}(3\theta + 90°) = 2\text{sen}\,3(\theta - (-30°))$.

Solución

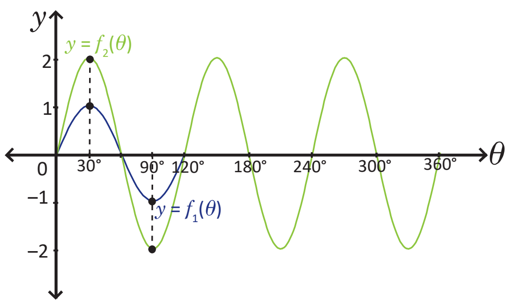
1. Se completa la tabla 1.

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$	0	1	0	–1	0
$f_2(\theta)$	0	2	0	–2	0

2. Se completa la tabla 2.

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$	0	2	0	–2	0
$f(\theta)$	2	0	–2	0	2

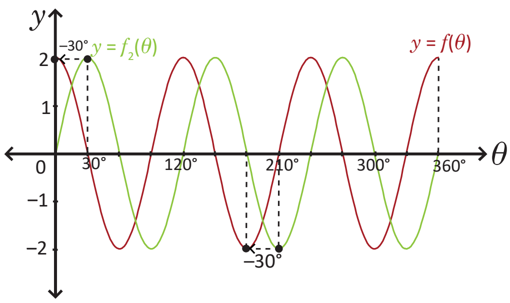
3 y 4. Se grafican las funciones f_1 y f_2.



El periodo de f_1 es $\frac{360°}{3} = 120°$.

5. Se grafican las funciones

$f_2(\theta) = 2\text{sen}\,3\theta$ y $f(\theta) = 2\text{sen}\,3(\theta - (-30°))$.



La gráfica de $f(\theta)$ es un desplazamiento de 30° hacia la izquierda de la gráfica de $f_2(\theta) = 2\text{sen}\,3\theta$.

Conclusión

Una función de la forma $f(\theta) = A\text{sen}\,B(\theta - \alpha)$, con $A \neq 0$ y $B \neq 0$, tiene las siguientes características:

1. Tiene amplitud $|A|$, por lo que su rango es $[-|A|, |A|]$.
2. Tiene periodo $\frac{360°}{|B|}$ y es un desplazamiento horizontal de α unidades respecto a la función $A\text{sen}\,B\theta$.

Para graficar una función de la forma $f(\theta) = A\text{sen}\,B(\theta - \alpha)$ se pueden realizar los siguientes pasos:

1. Se grafica la función $\text{sen}\,B\theta$ en el intervalo $\left[0, \frac{360°}{|B|}\right]$.
2. Se grafica la función $A\text{sen}\,B\theta$ y se utiliza la periodicidad para completar el intervalo en el que se graficará.
3. Se efectúa el desplazamiento horizontal de α unidades para obtener $f(\theta) = A\text{sen}\,B(\theta - \alpha)$.

Problemas

Grafica cada función, en el intervalo [0, 360°] utilizando los desplazamientos, amplitud y periodo:

a) $f(\theta) = 2\text{sen}(\theta - 30°)$ b) $f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°)$ c) $f(\theta) = -\text{sen}(4\theta + 240°)$

3.13 Sistema circular de ángulos

Problema inicial

1. Encuentra la longitud del arco del CT cuyo ángulo central es 45°.

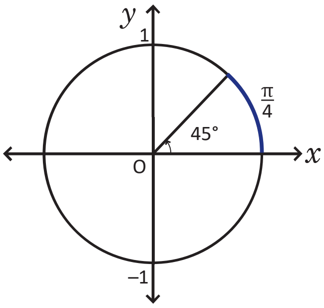
2. Encuentra el ángulo central del CT cuya longitud es $\frac{\pi}{6}$.

En una circunferencia de radio r, la longitud del arco subtendido por un ángulo central θ está dado por $2\pi r \frac{\theta}{360°}$.

Solución

1. El radio del CT es $r = 1$. La longitud del arco subtendido por el ángulo de 45° está dado por: $2\pi(1)\frac{45°}{360°} = \cancel{2}\pi\, \frac{1}{\cancel{8}}$.

Por lo tanto, la longitud del arco es $\frac{\pi}{4}$.



2. Sea α el ángulo central tal que $2\pi \frac{\alpha}{360°} = \frac{\pi}{6}$.

Se despeja $\alpha = \frac{\pi}{6}\left(\frac{360°}{2\pi}\right) = 30°$.

Por lo tanto, el ángulo que subtiende un arco de longitud $\frac{\pi}{6}$ es 30°.

Definición

En el círculo trigonométrico se define: **1 radián** como el ángulo que subtiende un arco de longitud 1.

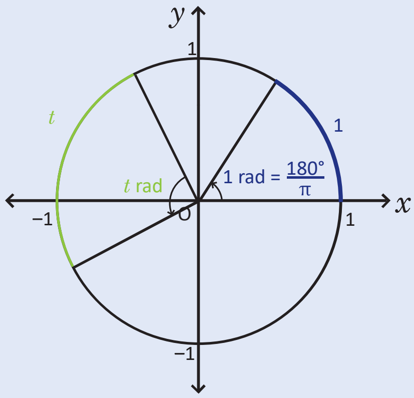
Así t **radianes** es el ángulo que subtiende un arco de longitud t y se representa como t rad (o solo t).

El ángulo θ, con $0 \leq \theta \leq 360°$, subtiende un arco de longitud $\frac{\theta}{180°}\pi$, entonces el ángulo θ, con $0 \leq \theta \leq 360°$, tiene un valor de $\frac{\theta}{180°}\pi$ rad.

Esta definición se extiende a cualquier ángulo de la siguiente manera: si θ es un ángulo cualquiera, entonces su valor en radianes está dado por

$$\frac{\theta}{180°}\pi \text{ rad}.$$

Si se tiene la medida de un ángulo t en radianes, su valor θ en grados está dado por $\theta = \frac{180°}{\pi}t$.



El sistema en el que se escriben los ángulos en grados se denomina **sistema sexagesimal de ángulos**.

Ejemplo

a) Expresar en radianes el ángulo 120°.

$$120° = \frac{120°}{180°}\pi \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

b) Escribe en grados el valor de $\frac{\pi}{5}$.

$$\frac{\pi}{5} = \frac{180°}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{5}\right) = 36°$$

Problemas

1. Se tienen los siguientes ángulos en grados, determina su valor en radianes:

a) 60°	b) 15°	c) 10°	d) 270°
e) 135°	f) 150°	g) 210°	h) 315°

2. Se tiene los siguientes ángulos en radianes, determina su valor en grados:

a) 2π rad	b) π rad	c) $\frac{\pi}{2}$ rad	d) $\frac{5\pi}{12}$ rad
e) 1 rad	f) $\frac{2\pi}{9}$ rad	g) $\frac{5\pi}{4}$ rad	h) $\frac{9\pi}{5}$ rad

3.14 Practica lo aprendido

1. Dibuja el círculo trigonométrico y grafica el punto P(cos θ, sen θ) para cada valor de θ.
   a) $\theta = 60°$ b) $\theta = 150°$ c) $\theta = 240°$ d) $\theta = 330°$

2. Utiliza la representación del seno y coseno en el CT para demostrar la identidad $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

3. Utiliza la periodicidad de las funciones trigonométricas para calcular los siguientes valores.
   a) sen 750° b) cos 765° c) tan 600°
   d) sen(–660°) e) cos(–690°) f) tan(–495)

4. Realiza lo que se pide:
   a) Demuestra que la función f: $[-90°, 90°] \to [-1, 1]$; $\theta \to \text{sen}\,\theta$, es biyectiva.
   b) Restringe la función coseno para que sea biyectiva. Utiliza la gráfica de la clase 3.6.

5. Utiliza la representación de la función tangente en el CT para demostrar la identidad $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

6. Realiza los siguientes problemas:
   a) Traza la recta $y = 1$, que es tangente al CT en el punto (0,1).
   b) Sea θ un ángulo en el primer cuadrante. Dibuja los puntos R(0,1), P(cos θ, sen θ) y Q el punto de intersección de la recta $y = 1$ con la prolongación del segmento OP.
   c) Demuestra que $OQ = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$.
   d) Determina las coordenadas del punto Q(a, b)
   e) Demuestra que $1 + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = \dfrac{1}{\text{sen}^2\theta}$.

7. Determina el periodo de las siguientes funciones y grafícalas en el intervalo dado.
   a) $\tan(\theta - 90°)$; [0, 360°] b) $\tan 2\theta$; [0, 270°]

8. Determina el periodo y la amplitud de las siguientes funciones, luego grafícalas en el intervalo dado.
   a) $f(\theta) = \text{sen}\,5\theta$; [0°, 360°] b) $f(\theta) = \cos\dfrac{\theta}{3}$; [0°, 1 080°]
   c) $f(\theta) = 4\cos\theta$; [0°, 360°] d) $f(\theta) = \dfrac{1}{2}\text{sen}\,\theta$; [0°, 360°]

9. Grafica las siguientes funciones utilizando desplazamientos, amplitud y periodo. Además determina su dominio y rango.
   a) $f(\theta) = 2\cos(6\theta - 120°)$ b) $f(\theta) = 4\text{sen}(2\theta + 120°)$
   c) $f(\theta) = -2\cos(4\theta + 180°)$ d) $f(\theta) = \dfrac{1}{2}\text{sen}(3\theta - 225°)$

10. Reescribe los ángulos en el sistema sexagesimal al sistema circular y viceversa.
    a) 20° b) 50° c) 140° d) 345°
    e) 500° f) –150° g) $\dfrac{\pi}{8}$ rad h) $\dfrac{4\pi}{9}$ rad
    i) $\dfrac{5\pi}{3}$ rad j) $\dfrac{\pi}{180}$ rad k) 3π rad l) $-\dfrac{\pi}{2}$ rad

11. Si un arco circular de 9 centímetros subtiende el ángulo central de 45° en una circunferencia, ¿cuál es la longitud del radio de la circunferencia?

12. El radio de una circunferencia es 5 cm, determina la medida del ángulo central, en radianes, que subtiende un arco de 12 cm.

3.15 Problemas de la unidad

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.
   a) $\log_2(x^2 - 8) = 3$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$ c) $\log_3 x = -\frac{1}{2}$
   d) $2^{3x+2} = 256$ e) $2^x = 3^{x-2}$ f) $2^{x+5} = 3^{x-2}$

2. Utiliza desplazamientos horizontales y verticales para graficar las siguientes funciones:
   a) $f(x) = \log_3(x - 1)$ b) $f(x) = \log_2 x + 2$ c) $f(x) = \log_3(x - 1) - 1$ d) $f(x) = \log_4(x + 2) - 3$

3. Para cada función del problema anterior determina: dominio, rango, asíntotas y su función inversa.

4. **Interés compuesto.** Si una cantidad de dinero C se invierte durante t años, con un interés del r% anual, recapitalizable (que se reinvierte) n veces al año. El dinero que se obtiene al final de los t años está dado por la fórmula $D(t) = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$.

   María realiza un depósito a plazo de \$500, en una Cooperativa de Ahorro. El interés anual del depósito es del 4%. El dinero se recapitaliza 4 veces al año (cada tres meses).
   a) Sustituye los valores conocidos en la fórmula $D(t) = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$, para obtener una fórmula que dé el dinero acumulado por María después de t años.
   b) ¿Cuánto dinero habrá acumulado María después de 2 años?
   c) ¿Cuántos años deben transcurrir para que María acumule al menos \$750?

5. **Crecimiento poblacional.** El crecimiento de una población a lo largo del tiempo está dado por la siguiente función exponencial: $P(t) = C(1 + r)^t$. Donde C es la población inicial, r es la tasa de crecimiento y t la cantidad de años transcurridos. La población de El Salvador para el año 2017 se estimó en 6 172 011 con una tasa de crecimiento poblacional de 0.3%. Utilizando la información anterior resuelve los siguientes problemas:
   a) Si la tasa de crecimiento se mantiene igual, ¿cuál será, aproximadamente, la población en El Salvador en el año 2030?
   b) ¿En qué año la población superará los 7 millones de habitantes?

6. Justifica la veracidad de la siguiente proposición: para todo número natural n se cumple que si 2^n tiene k dígitos entonces 2^{n+1} tiene k dígitos o 2^{n-1} tiene k dígitos.

7. Restringe la función tangente para que sea una función biyectiva y gráficala.

8. Grafica las funciones inversas de las funciones trigonométricas utilizando las funciones restringidas del problema 4 del Practica lo aprendido 3.14 y el problema anterior.

   Utiliza los ángulos en el sistema circular.

9. Demuestra que para todo ángulo θ se cumple que
   a) $\text{sen}^2\theta \leq 1$
   b) $|\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq 2$

   Utiliza la desigualdad triangular.

   c) $(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \text{sen}\,2\theta$
   d) $|\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}$ Utiliza el literal anterior.
   e) $\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \leq 1$, $\theta \neq 90° + 180°n$, donde n es un número entero.

10. Aproximación del valor de π. Con los siguientes polígonos inscritos en el círculo de radio 1, calcula el cociente del perímetro del polígono entre el diámetro del círculo:
    a) Octágono regular b) Dodecágono regular

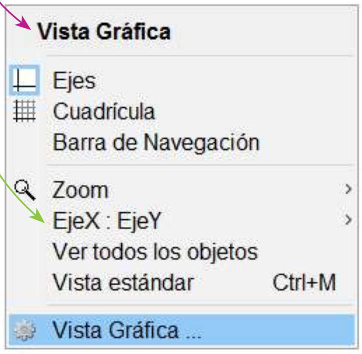
El método de exhaución fue usado satisfactoriamente por Arquímedes (287-212 a. C.) para hallar la fórmula exacta del área del círculo. El método consiste es inscribir polígonos regulares en el círculo para aproximar su área. Con este método también realizó aproximaciones del cociente del perímetro de la circunferencia por su diámetro, es decir, de la constante π.
Dunham, W. *(2004) Viaje a través de los genios*.

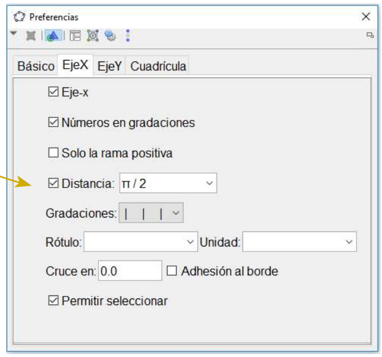
4.1 Práctica en GeoGebra: funciones trigonométricas

Con el desarrollo de esta práctica aprenderás sobre las gráficas de las funciones trigonométricas en GeoGebra y sus propiedades: amplitud, periodo y desplazamientos.

Práctica

1. Cambiar la numeración del eje.
   a) Clic derecho en la Vista Gráfica.
   b) Selecciona Vista Gráfica 
   c) Selecciona EjeX.
   d) Selecciona el cuadro Distancia.
   e) Selecciona en el cuadro desplegable π / 2.



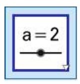


2. Gráfica de funciones trigonométricas.
   a) Función Seno. Escribe en la barra de Entrada sen x.

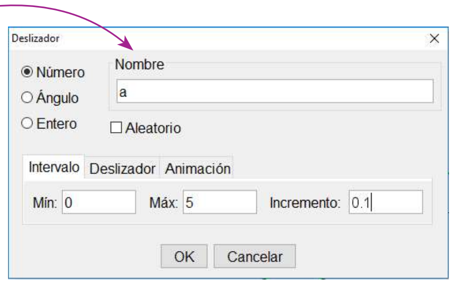
   b) Evaluando valores en la función seno. Cuando se evalúan ángulos en grados en las funciones trigonométricas debe colocarse el símbolo de grados correspondiente. Escribe en la barra de Entrada a = f(90°), b = f(90), c = f(π / 2). Observa que en b = f(90) el programa evalúa 90 radianes.

3. Amplitud de las funciones trigonométricas.
   Grafica la función $g(x) = 2\text{sen } x$. Escribe en la barra de entrada g(x) = 2*f(x).

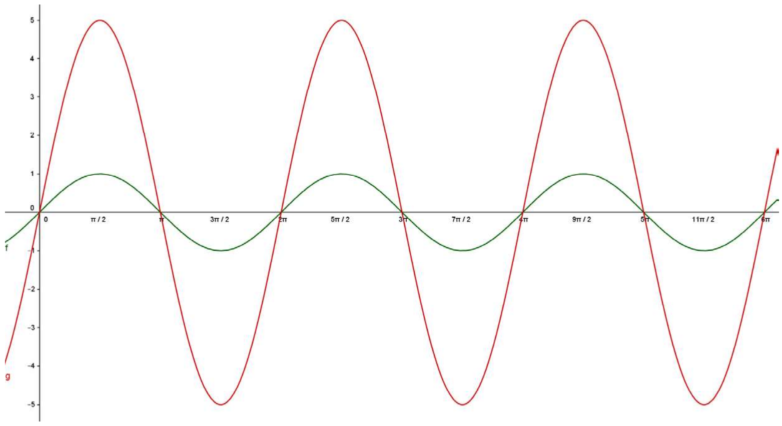
4. El comportamiento de la función $f(x) = a\text{sen}(x)$ con $a > 0$.
   Creación de un deslizador.
   a) En la barra de herramientas selecciona Deslizador.



   b) Clic en la Vista Gráfica.
   c) Aparecerá un cuadro en el que debe colocarse el nombre al deslizador, en este caso **a**. Coloca en mínimo 0 y en máximo 5. Incremento 0.1, y clic en Ok.

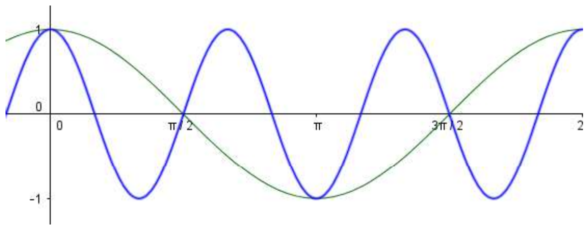


   d) Dibuja la función $f(x) = \text{sen } x$.
   e) Dibuja la función $g(x) = a\text{sen } x$.
   f) Selecciona el punto del deslizador y observa que a medida que se mueve hacia la derecha la función se dilata, mientras que hacia la izquierda se contrae.
   g) Haz clic derecho sobre el deslizador e inicia animación.



5. Periodo

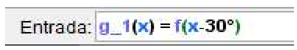
   a) Grafica la función $f(x)$=cos x.
   b) Grafica la función cos $3x$. Escribe en la barra de Entrada g(x)=f(3x).
   c) Grafica la función cos $\frac{x}{3}$. Escribe en la barra de Entrada h(x)=f(x/3).

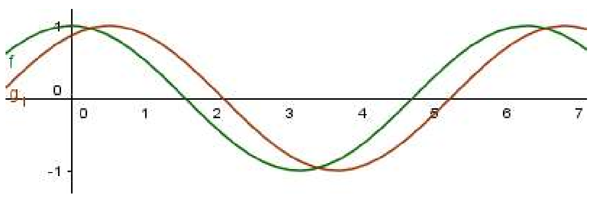


6. Desplazamientos verticales u horizontales.

   a) Grafica la función $f(x)$=cos x.
   b) Grafica la función $g_1(x)$ = cos $(x - 30°)$.
   c) Grafica la función $h_1(x)$ = cos $(x + 60°)$.
   d) Grafica la función $g_2(x)$ = cos(x) + 3.
   e) Grafica la función $h_2(x)$ = cos(x) – 2.

   Para escribir subíndice en GeoGebra se utiliza guion bajo como se muestra a continuación.





Actividades

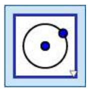
1. Grafica las funciones del problema 8 de la clase 3.14.
2. Grafica las funciones del problema 9 de la clase 3.14.
3. Crea un deslizador **B**, con mínimo 0, máximo 5 e incremento 0.1. Luego grafica las funciones $f(x)$ = sen x y $g(x)$ = sen Bx. Observa el comportamiento de la función g a medida que el valor de **B** aumenta o disminuye.
4. Realiza una animación utilizando deslizadores para desplazamiento vertical y horizontal.

4.2 Práctica en GeoGebra: construcción de las funciones seno y coseno

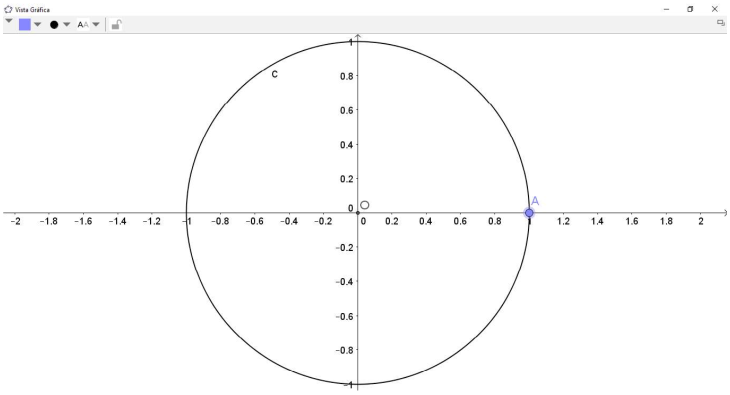
Es posible construir las funciones trigonométricas observando su comportamiento en el círculo trigonométrico. A continuación se graficará la función seno.

Práctica

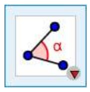
1. Dibujar el círculo trigonométrico.



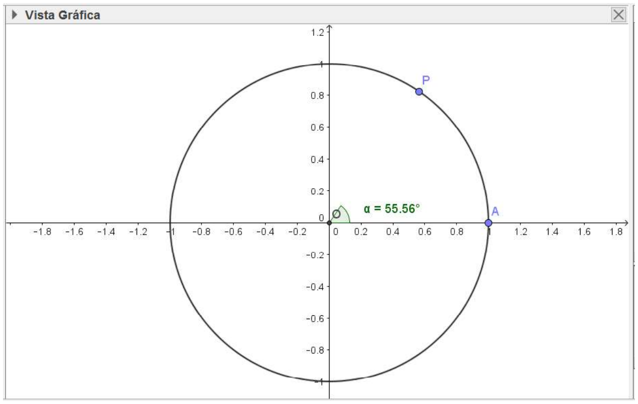
a) Selecciona en la Barra de Herramientas la opción Circunferencia (centro, punto).
b) Selecciona los puntos O(0, 0) como centro y A(1, 0) como punto.



2. Dibujar el ángulo.

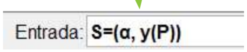


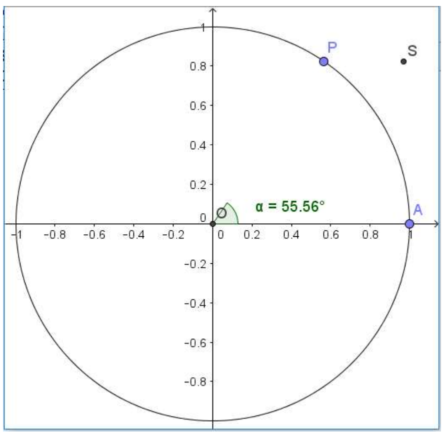
a) Selecciona un punto P en el CT.
b) Selecciona en la Barra de Herramientas: Ángulo, tres puntos o dos rectas.
c) Selecciona los puntos A, O y P, en ese orden. El ángulo se nombra automáticamente como α.



3. Punto de construcción. Este punto tendrá como coordenada en x el ángulo α en radianes (el programa lo convierte automáticamente) y como coordenada en y la coordenada en y del punto P (es decir sen α).

a) En la barra de Entrada escribe S = (α, y(P)) y presiona Enter.





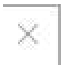
Unidad 5

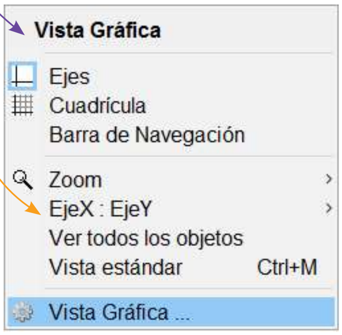
4. Cambiar la numeración del eje x.

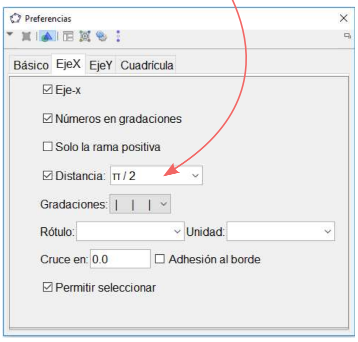
a) Clic derecho en la Vista Gráfica (ningún elemento debe estar seleccionado).

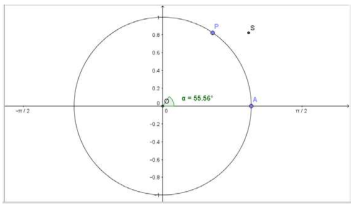
b) Clic en Vista Gráfica.

c) Clic en EjeX.

d) Clic en el cuadro Distancia y selecciona la opción π / 2. Luego salir. 





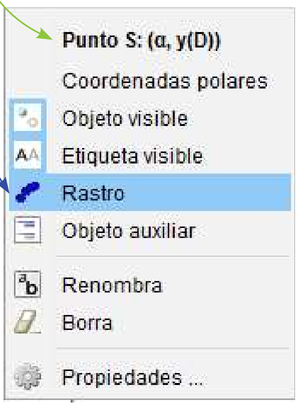


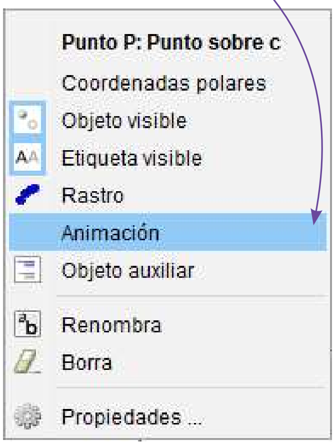
5. Graficando la función seno.

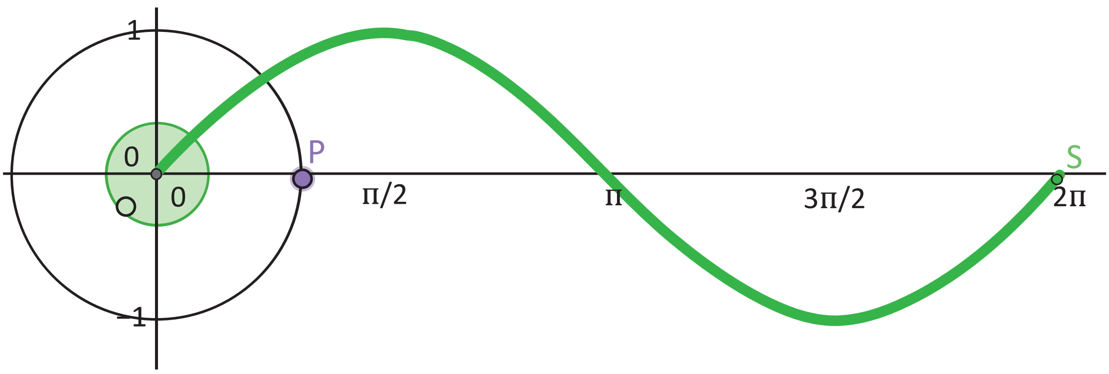
a) Selecciona el punto S y dar clic derecho.

b) Clic en rastro.

c) Selecciona el punto P, clic derecho y luego inicia la animación.







Actividades

Construye la función coseno a partir del círculo trigonométrico.

4.3 Práctica en GeoGebra: construcción de la función tangente

De igual manera que las funciones seno y coseno, la función tangente se puede dibujar a partir del círculo trigonométrico. Sin embargo, se tiene la dificultad que el ángulo al recorrer los valores $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ en el CT, la función debe evaluarse en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Para realizar esto se explicará la utilidad de la función **Si** del bloque de lógica.

Práctica

1. Clic en el botón Ayuda de Comandos, que se encuentra a la derecha de la barra de entrada. Se desplegará el panel de comandos.

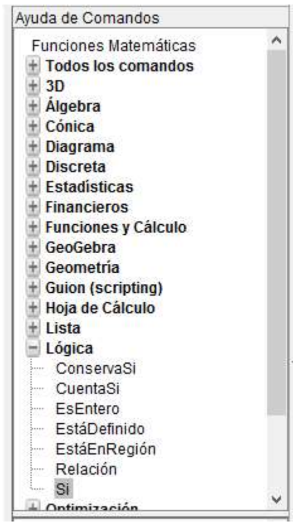
2. Selecciona la función Si del bloque de lógica. En este comando deben ingresarse 2 o 3 datos separados por coma.

Si[<Condición>, <Entonces>, <Si no>]

Condición: Se introduce una condición en la que está involucrada una variable, puede ser una igualdad, una desiguladad, entre otras.

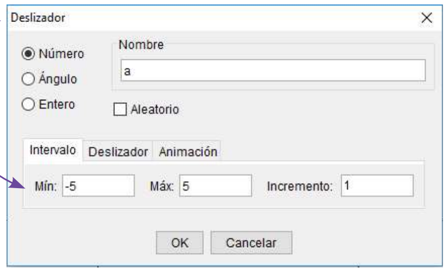
Entonces: Es el valor que el comando devolverá si la condición es verdadera.

Si no: Es el valor que el comando devolverá si la condición no es verdadera.

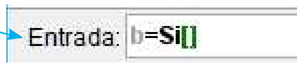


3. Se creará un número **b** a partir de un deslizador **a**, de tal manera que si el valor de **a** es negativo entonces el valor de **b** será 0 y si el valor de **a** es positivo entonces **b** tomará el valor de **a**.

   a) Crea un deslizador con nombre **a**, de -5 a 5 e incremento 1.

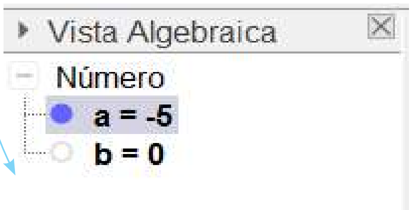


   b) Escribe en la barra de Entrada **b =**, luego pegar el comando Si del bloque de lógica.

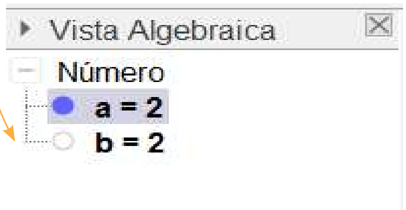


   c) Se debe evaluar si **a** es negativo por lo que la condición a ingresar es **a**<0. El valor que el comando devolverá es 0 si se cumple **a**<0. El valor que el comando devolverá es **a** si no se cumple que **a**<0.

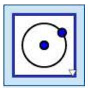
En el caso que **a** sea negativo **b** tomará el valor de 0.



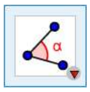
En el caso que a sea positivo **b** tomará el valor de **a**.



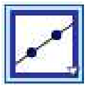
4. Dibujar el Círculo Trigonométrico:
   a) Selecciona en la Barra de Herramientas la opción Circunferencia (centro, punto).
   b) Selecciona los puntos O(0, 0) como centro y A(1, 0) como punto.
   c) Grafica la recta $x = 1$.



5. Dibujar el ángulo:
   a) Coloca el punto A(1, 0).
   b) Selecciona un punto P en el CT.
   c) Selecciona en la Barra de Herramientas: Ángulo, tres puntos o dos rectas.
   d) Selecciona los puntos A, O y P, en ese orden. El ángulo se nombra automáticamente como α.



6. Representación de la tangente.
   a) Traza la recta que pasa por los puntos O y P.
   b) Nombra Q al punto de intersección de la recta trazada y la recta $x = 1$.
   c) Oculta la recta trazada.

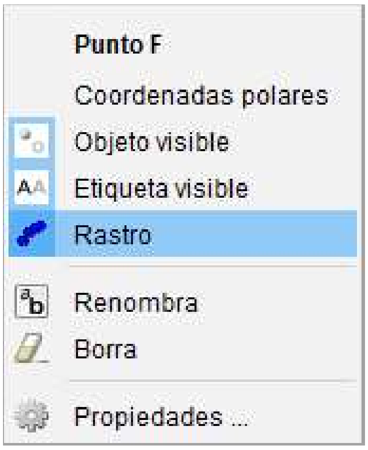


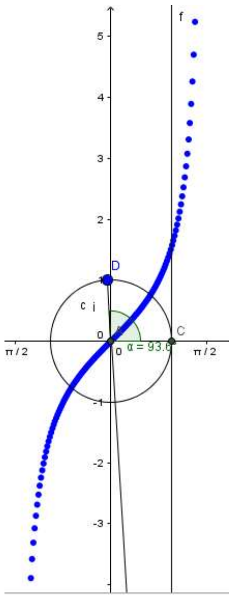
7. Punto de construcción. Este punto tendrá como coordenada en x el ángulo α en radianes (el programa lo convierte automáticamente) y como coordenada en y la coordenada en y del punto Q (es decir tan α).

   a) Construye el ángulo θ. Entrada: θ = Si[α > 3* π /2 , α - 2 π , α]

   b) Nombra T al punto de construcción.
   En la barra de Entrada escribe T = (θ, y(Q)) y presiona Enter. Entrada: **T = (θ, y(Q))**

8. Gráfica de la función.
   a) Cambia la numeración del eje x en términos de π.
   b) Selecciona el punto T, clic derecho y clic en Rastro.
   c) Seleciona el punto P, clic derecho y luego iniciar Animación.





Actividades

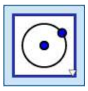
Construye la función cotangente a partir del círculo trigonométrico.

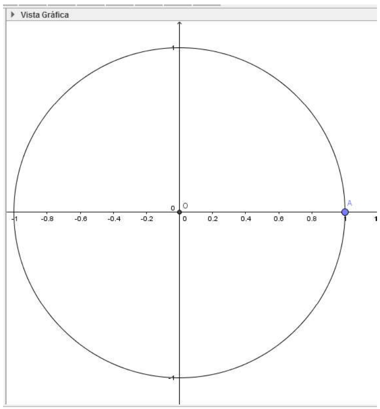
4.4 Práctica en GeoGebra: el método de exhaución

Se construirá un polígono inscrito en el círculo trigonométrico para observar la aproximación que tiene el área del polígono, a medida que sus lados aumentan, respecto al área del círculo.

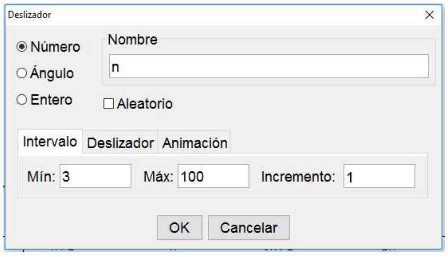
Práctica

1. Construcción del círculo trigonométrico.
   El centro debe ser O(0, 0) y A(1, 0) el punto.

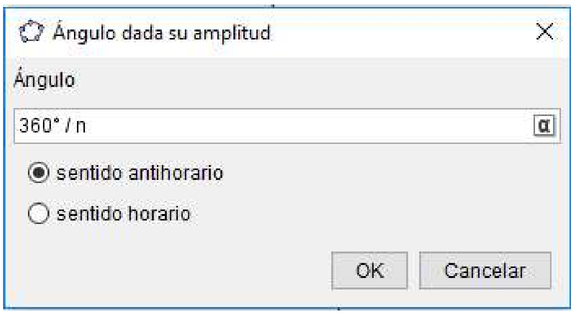




2. Construir un deslizador para el número de lados de un polígono regular con nombre n.
   Mínimo 3, máximo 100 e incremento 1.



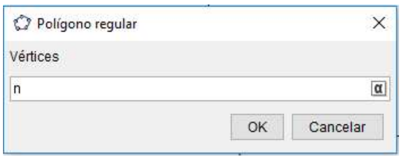
3. Construcción del ángulo central α dada su amplitud.
   a) Selecciona los puntos A, 0 y como amplitud 360° /n. Clic en OK.
   b) Aparecerá otro punto en el CT. Dar el nombre B.

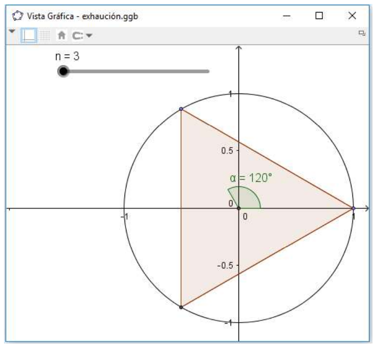


4. Contrucción del polígono regular.
   a) Selecciona la opción Polígono regular y escoge los puntos A y B.

Unidad 5

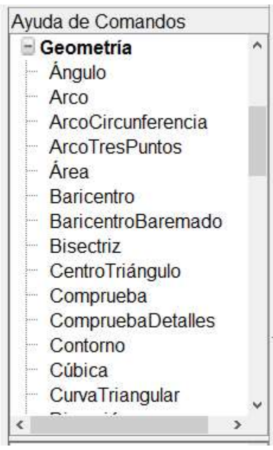
b) En el cuadro que aparecerá a continuación, escribe el número de vértices n.





Aparecerá automáticamente el valor del área del polígono construido.

5. Calcular el área del círculo, con el comando Área del bloque de Geometría. Observa cómo se aproxima el área del polígono regular a la del círculo a medida que se incrementa el número de lados.



6. Determinar los perímetros del polígono y de la circunferencia.

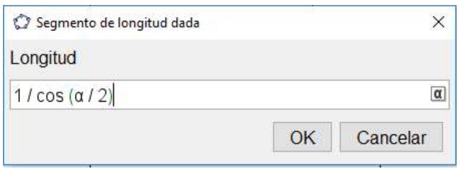
Perímetro del polígono — Entrada: perpoligono=Perímetro[polígono1]

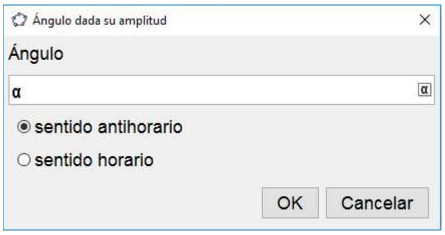
Perímetro de la circunferencia — Entrada: percircunferencia=Perímetro[c]

7. Comparar los perímetros del polígono y la circunferencia cuando aumenta el número de lados del polígono.

8. La constante π se define como el cociente del perímetro del círculo entre su radio. Utiliza la contrucción realizada para obtener una aproximación del valor de π.

9. Construcción de un polígono regular que circunscriba al Círculo trigonométrico.
Construye un segmento OO_1 de longitud dada, con longitud $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. El punto O_1 se debe colocar en el eje x.





10. Construir el ángulo central β dada su amplitud.
   a) Selecciona los puntos O_1, O y como amplitud α. Clic en OK.
   b) Cambia el nombre al punto resultante por O_2.

11. Construir el polígono regular utilizando los puntos O_1 y O_2. El número de lados debe ser n.

Actividades

Efectúa las 3 aproximaciones realizadas en los problemas anteriores (área, perímetro y el valor π) con el polígono construido en el numeral 10.