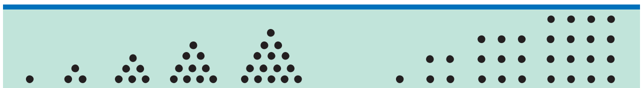
6 Unidad

Sucesiones aritméticas y geométricas



Números figurales (triangulares y cuadrangulares) de la época de los griegos.

Las sucesiones tanto aritméticas como geométricas han sido una temática que se ha desarrollado a lo largo de la historia sin definir un autor principal. Hay registros de diferentes culturas, por ejemplo en Babilonia, los créditos y los cálculos conllevaban de alguna manera una fórmula parecida al interés compuesto, lo cual requiere trabajo con sucesiones geométricas; los egipcios también trabajaron con la suma de sucesiones para expresar algunas fracciones; los griegos trabajaron con patrones y diseñaron números figurales como los que se observan en la primera imagen.

Una de las sucesiones más famosas e importantes es la sucesión de Fibonacci, la cual modela algunas formas de la naturaleza.

En el análisis de las sucesiones siempre está el análisis de patrones, los cuales han sido utilizados en diferentes áreas. En la actualidad se aplican fórmulas financieras, cuya base (en algunos casos) son las sucesiones geométricas, incluso algunos fenómenos de la naturaleza, como la reproducción de algunos seres vivos, pueden modelarse como sucesiones geométricas o aritméticas según la situación.

La unidad contiene un repaso sobre patrones, con el objetivo de identificar su secuencia y la forma en que se han generado para luego realizar un estudio generalizado. Luego se hará un estudio más amplio sobre las sucesiones aritméticas y geométricas, y se analizará la suma de los primeros n términos de una sucesión.

1.1 Patrones

Problema inicial

Observa las siguientes secuencias de figuras y números. Responde lo pedido en cada caso.

a) Determina en la Figura 4 y la Figura 6 si la secuencia se va formando de igual manera.

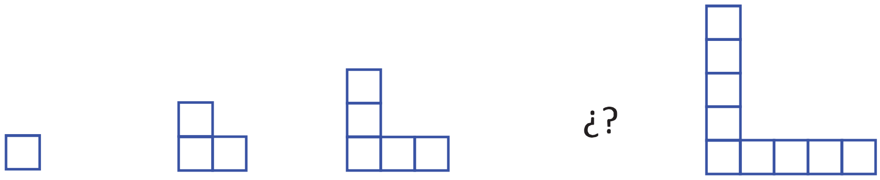


Figura 1 | Figura 2 | Figura 3 | ¿? Figura 4 | Figura 5 | ¿? Figura 6

b) ¿Cuál figura corresponde a la Figura 7 si la secuencia se va formando de la misma manera?

Figura 1 | Figura 2 | Figura 3 | Figura 4 | Figura 5 | Figura 6 | ¿? Figura 7

c) Determina el número faltante y la regla que se ha utilizado para generar la secuencia.

2	3	5	8	12	17	23	¿?
Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5	Posición 6	Posición 7	Posición 8

Solución

a) Puede observarse que cada figura se obtiene agregando dos cuadrados a la figura anterior, acomodándolos en forma de L. Entonces, la Figura 4 y la Figura 6 son las que muestran las figuras de la derecha.

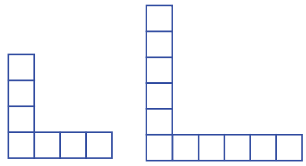


Figura 4 Figura 6

b) Si se considera que el cuadrado grande va rotando 90° en el sentido horario respecto a su centro, la Figura 2 se obtiene rotando una vez la Figura 1, la Figura 3 se obtiene rotando una vez la Figura 2, la Figura 4 se obtiene rotando dos veces la Figura 3, la Figura 5 se obtiene rotando una vez la Figura 4 y la Figura 6 se obtiene rotando una vez la Figura 5. Por lo tanto, la Figura 7 se obtiene rotando dos veces la Figura 6, por lo que la Figura 7 es .

c) Puede observarse que

	+1		+2		+3		+4		+5		+6	
2		3		5		8		12		17		23
Posición 1		Posición 2		Posición 3		Posición 4		Posición 5		Posición 6		Posición 7

Entonces, el siguiente número deberá ser 23 + 7 = 30.

Para generar un número se suma el número anterior y su posición.

Conclusión

Un **patrón** matemático es una secuencia de números o figuras que satisfacen cierta regla y con la cual puede generarse cualquier elemento de la secuencia.

Problemas

Observa las siguientes secuencias de figuras y números. Responde lo pedido en cada caso.

a) Determina las figuras 5, 6 y 7 que corresponden a la secuencia e identifica la regla que se ha utilizado para generarla.

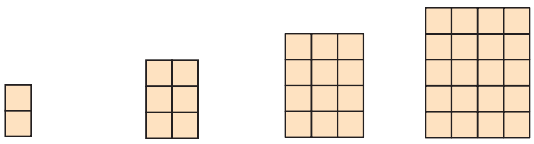


Figura 1 | Figura 2 | Figura 3 | Figura 4

b) ¿Cuál figura corresponde a la Figura 7?

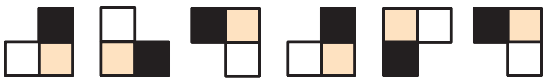


Figura 1 | Figura 2 | Figura 3 | Figura 4 | Figura 5 | Figura 6 | ¿? Figura 7

c) Determina el número faltante y la regla que se ha utilizado para generar la secuencia.

2	6	12	20	30	42	¿?

1.2 Patrones generalizados

Problema inicial

Observa la siguiente secuencia:

3	6	9	12	15	18	21	¿?	¿?	...
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	

a) ¿Cuál es la regla que se ha utilizado para generar la secuencia?
b) ¿Cuáles son los números que corresponden a las posiciones 8 y 9?
c) ¿Cuál sería el número correspondiente a la posición 20? ¿y a la posición 100?
d) ¿Cuál sería el número correspondiente a una posición cualquiera n?

Solución

a) Al observar la secuencia se puede determinar que todos los números son múltiplos de 3, por lo que la regla utilizada es multiplicar por 3 el número de posición en la que se encuentra.

b) Por el resultado del literal a, en las posiciones 8 y 9 corresponden los números 3(8) = 24 y 3(9) = 27.

c) Como el número se obtiene multiplicando la posición por 3, entonces 3(20) = 60 es el número que corresponde a la posición 20 y 3(100) = 300 es el número que corresponde a la posición 100.

d) El número que corresponderá a la posición n es $3n$.

La sucesión también puede generarse sumando 3 al número anterior.

Definición

A una secuencia de números que sigue cierta regla también se le conoce como **sucesión**. En una sucesión, sus elementos tienen un orden y habitualmente se denotan por a_n, donde n representa la posición que ocupa dicho elemento. Por ejemplo, en la sucesión del Problema inicial, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_7 = 21$, $a_n = 3n$.

A cada elemento de una sucesión se le llama **término** y al término que ocupa la n-ésima posición (con n un número natural) se le llama **término general**. Por ejemplo, $a_n = 3n$ es el término general del Problema inicial.

Una sucesión es **finita** si tiene una cantidad finita de elementos. Caso contrario, se dice que la sucesión es **infinita**.

Al escribir una sucesión se hace en orden, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, donde los puntos suspensivos indican que la sucesión sigue.

En algunas ocasiones no es posible encontrar el término general, en una forma simple, que describa una sucesión.

Ejemplo

Determina el término general de la siguiente sucesión y calcula los términos 20, 41 y 101.

$$-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$$

Observa que la sucesión va alternando signo en sus términos, y en cada posición impar su signo es negativo y en cada posición par, su signo es positivo. Nota que esto puede escribirse como:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Unidad 6

Además, los valores absolutos de los números que componen la sucesión son todos consecutivos y coinciden con su posición dentro de la sucesión, por lo tanto, el término general es $a_n = (-1)^n\, n$.

Por lo tanto, los términos 20, 41 y 101 son $a_{20} = (-1)^{20}\, 20 = 20$, $a_{41} = -41$ y $a_{101} = -101$.

Problemas

1. Para cada sucesión, encuentra el término general y los términos que se piden.

   a) 2, 4, 6, 8, ... ¿cuál es el término 42?

   b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... ¿cuál es el término 21?

   c) 1, 4, 9, 16, 25, ... ¿cuál es el término 11?

   d) 1, 8, 27, 64, 125, ... ¿cuál es el término 8?

   e) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots$ ¿cuál es el término 954?

   f) 2, 0, 2, 0, 2, ... ¿cuál es el término 10?, ¿y el 55?

2. Enlista los primeros cinco términos de la sucesión que tiene término general a_n, en cada uno de los siguientes casos:

   a) $a_n = 3n + 1$

   b) $a_n = 4n - 2$

   c) $a_n = -n + 2$

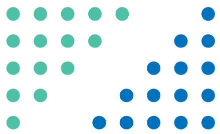
   d) $a_n = n^2 - 3$

3. Observa el siguiente proceso: sea T_5 el número de elementos de la Figura 5, en la siguiente sucesión:

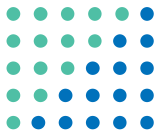
Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

- Se reordenan los elementos de la figura 5.

- Se duplica la figura.



- Se unen las dos figuras iguales formando un rectángulo de 5 × 6 elementos.



Por lo tanto, $2T_5 = 5(6)$.

Generaliza el proceso anterior para determinar el término general T_n de la sucesión.

Una de las sucesiones más famosas es la conocida Sucesión de Fibonacci.

Fibonacci fue un matemático italiano que nació en Pisa, alrededor de 1175. Su nombre verdadero era Leonardo de Pisa pero comúnmente se le conocía como Fibonacci, nombre que representa la versión corta de Filius Bonaccio, que significa hijo de Bonaccio.

La sucesión de Fibonacci es de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

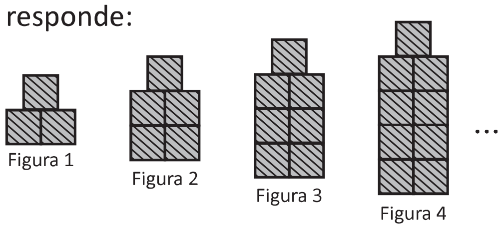
Los primeros términos de la sucesión de Fibonacci son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...; es decir, los términos de la sucesión de Fibonacci pueden determinarse sumando los dos términos anteriores.

Esta sucesión tuvo su primera aparición cuando se planteó el problema que involucraba la reproducción de un par de conejos, con la hipótesis que estos eran inmortales, se volvían adultos al cabo de un mes, y que de cada pareja de conejos nacía una pareja de conejos (un macho y una hembra).

1.3 Sucesiones aritméticas: definición

Problema inicial

Observa la siguiente secuencia y responde:



a) Enlista el número de elementos de los primeros 10 términos de la sucesión.
b) ¿Cuál es la regla que se ha utilizado para generar la sucesión?
c) Si a un término se le resta su término anterior, ¿qué se puede observar si se hace en repetidas ocasiones?
d) Si sumas los términos 1 y 10, 2 y 9, 3 y 8 y así sucesivamente, ¿qué sucede?

Solución

a) Se puede elaborar una tabla para enlistar los elementos que tiene cada figura.

Término	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
Número de elementos	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

b) Si se observan las figuras, se han ido añadiendo dos cuadrados respecto a la figura anterior.

c) Al tomar un término y restarle su anterior se puede observar que el resultado siempre es el mismo cuando se hace varias veces. En este caso resulta ser 2.

$a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$
$a_5 - a_4 = 11 - 9 = 2$
$a_9 - a_8 = 19 - 17 = 2$

d) Obsérvese que los términos 1 y 10, 2 y 9, 3 y 8, 4 y 7, y 5 y 6, a pares siempre están a una misma distancia de los extremos. Puede observarse que al sumar términos que están a igual distancia de los extremos, el resultado es siempre el mismo: 24.

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21

11 + 13 = 24
9 + 15 = 24
7 + 17 = 24
5 + 19 = 24
3 + 21 = 24

Definición

A la sucesión donde sus términos pueden obtenerse sumando un mismo número al término anterior se llama **sucesión aritmética**.

Una sucesión aritmética tiene la propiedad que al restarle a un término su anterior siempre se obtendrá el mismo resultado. A este resultado se le llama **diferencia**.

Otra de las propiedades de una sucesión aritmética finita es que al sumar términos que están a una misma distancia de los extremos el resultado es el mismo.

Un detalle importante que hay que resaltar sobre las sucesiones aritméticas es que la diferencia puede ser un número cualquiera, esto es, puede ser un número entero, racional, decimal o irracional.

Problemas

Identifica si cada sucesión es una sucesión aritmética. En caso de serlo, determina su diferencia.

a) 5, 11, 17, 23, 29, 35, ...
b) –3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, ...
c) 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, ...
d) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \ldots$
e) –4, –4, –4, –4, –4, –4, ...
f) 11, 7, 3, –1, –5, –9, ...

1.4 Sucesiones aritméticas: término general*

Problema inicial

Encuentra el término general de la sucesión aritmética del Problema inicial de la clase 1.3.

Solución

Obsérvese primero que si a_{n-1} es un término cualquiera, a_n es el término que le sigue. Como cada figura se obtiene sumando dos cuadrados a la figura anterior, se tiene que

$$\underbrace{5 = 3 + 2}_{a_2 = a_1 + 2}, \quad \underbrace{7 = 5 + 2}_{a_3 = a_2 + 2}, \quad \underbrace{9 = 7 + 2}_{a_4 = a_3 + 2}, \quad \dots \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

Se tiene entonces que

$$a_2 = a_1 + 2, \quad a_3 = a_2 + 2, \quad a_4 = a_3 + 2, \quad a_5 = a_4 + 2, \dots, \quad a_{n-2} = a_{n-3} + 2, \quad a_{n-1} = a_{n-2} + 2 \ , \quad a_n = a_{n-1} + 2$$

Se necesita encontrar una fórmula en términos de la posición que ocupa en la sucesión. Nótese entonces que,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2 \\ &= a_{n-2} + (2 + 2) \\ &= a_{n-3} + (2 + 2 + 2) \\ &= a_{n-4} + (2 + 2 + 2 + 2) \end{aligned}$$

Si se continúa de ese modo

$$\begin{aligned} a_n &= a_4 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-4}) = (a_3 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-4}) \\ &= a_3 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-3}) = (a_2 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-3}) \\ &= a_2 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}) = (a_1 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}) \\ &= a_1 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-1}) \end{aligned}$$

Observa que $4 = n - (n - 4)$.

Se tiene entonces que a_n es igual al primer término más $n - 1$ veces 2, es decir, el término general de la sucesión es $a_n = a_1 + 2(n - 1)$.

Conclusión

En una sucesión aritmética, si d es su diferencia, su término general está dado por $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Ejemplo

Calcula los términos 4, 12, 17 y 99 de la sucesión aritmética $a_n = -2 + 6(n - 1)$ y determina cuál es el término a_1 y su diferencia.

Para calcular los términos que se piden, se sustituye la n por la posición del término. Así,

$a_4 = -2 + 6(4 - 1) = -2 + 6(3) = -2 + 18 = 16$ $\qquad$ $a_{12} = -2 + 6(12 - 1) = -2 + 6(11) = 64$

$a_{17} = -2 + 6(17 - 1) = -2 + 6(16) = 94$ $\qquad$ $a_{99} = -2 + 6(99 - 1) = -2 + 6(98) = 586$

Además, $a_1 = -2$ y su diferencia es $d = 6$.

En muchas ocasiones, el término general de una sucesión aritmética se presenta en la forma $a_n = a_1 - d + dn$. Por ejemplo, $a_n = -2 + 6(n - 1)$ puede escribirse como $a_n = -8 + 6n$.

Problemas

1. Establece el término general de las sucesiones aritméticas de los problemas de la Clase 1.3.

2. Determina los términos 1, 7, 11, 20 y 100 de cada una de las siguientes sucesiones aritméticas:

a) $a_n = 5 + 4(n - 1)$ $\qquad$ b) $a_n = -1 + 7(n - 1)$ $\qquad$ c) $a_n = 2 - 3(n - 1)$

d) $a_n = -4 - (n - 1)$ $\qquad$ e) $a_n = \frac{1}{2} - (n - 1)$ $\qquad$ f) $a_n = 5 - \frac{1}{3}(n - 1)$

g) $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(n - 1)$ $\qquad$ h) $a_n = -0.6 + 2(n - 1)$ $\qquad$ i) $a_n = -0.4 - 0.7(n - 1)$

1.5 Sucesiones aritméticas: suma parcial, parte 1*

Problema inicial

Resuelve cada literal.

a) ¿Cuánto vale la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30$? Busca una forma de calcularla sin sumar término a término.

b) Si se tienen los números $1, 2, 3, \ldots, n-3, n-2$ y $n-1$, ¿cuánto vale la suma de todos ellos?

c) ¿Cuánto vale la suma S_n de los primeros n términos de la sucesión $a_n = a_1 + d(n-1)$?

d) En la sucesión aritmética $a_n = 1 + 2n$, ¿cuánto vale la suma de los primeros 10 términos?

Para el literal a, considera también la suma $30+29+28+\cdots+3+2+1$.

Solución

a) Si se realiza la suma

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
 & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & + & \cdots & + & \boxed{28} & + & \boxed{29} & + & \boxed{30} \\
+ & \boxed{30} & + & \boxed{29} & + & \boxed{28} & + & \cdots & + & \boxed{3} & + & \boxed{2} & + & \boxed{1} \\
\hline
 & 31 & + & 31 & + & 31 & + & \cdots & + & 31 & + & 31 & + & 31
\end{array} \qquad \text{------------------ (1)}$$

el resultado es el mismo. En la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + 28 + 29 + 30$ hay 30 términos, por lo que en la suma (1) se está sumando 30 veces el número 31, por lo tanto es igual a 31(30).

Por otra parte, la suma en (1) se obtuvo sumando $1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30$ dos veces, por lo que la suma pedida es igual a $\frac{31(30)}{2}$. Al simplificar, se obtiene

$$\frac{31(30)}{2} = \frac{31(\cancel{30}^{\,15})}{{}_1\cancel{2}} = 31(15) = 465.$$

Por lo tanto, $1 + 2 + 3 + \ldots + 28 + 29 + 30 = 465$.

b) Si se utiliza la misma técnica utilizada en la parte a), se tendría

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
 & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & + & \cdots & + & \boxed{n-3} & + & \boxed{n-2} & + & \boxed{n-1} \\
+ & \boxed{n-1} & + & \boxed{n-2} & + & \boxed{n-3} & + & \cdots & + & \boxed{3} & + & \boxed{2} & + & \boxed{1} \\
\hline
 & n & + & n & + & n & + & \cdots & + & n & + & n & + & n
\end{array} \qquad \text{------------------ (2)}$$

La suma en (2) tiene $n-1$ términos, por lo que vale $n(n-1)$. Pero nuevamente, se ha sumado dos veces $1 + 2 + 3 + \cdots + n-3 + n-2 + n-1$, por lo que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n-3 + n-2 + n-1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

c) Se colocan los n términos en el nuevo orden

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S_n = & a_1 & \overset{+d}{+} & a_2 & \overset{+d}{+} & a_3 & + \cdots + & a_{n-2} & \overset{+d}{+} & a_{n-1} & \overset{+d}{+} & a_n \\
S_n = & a_n & \overset{-d}{+} & a_{n-1} & \overset{-d}{+} & a_{n-2} & + \cdots + & a_3 & \overset{-d}{+} & a_2 & \overset{-d}{+} & a_1 \\
\hline
\end{array}$$

$$2S_n = (a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + (a_{n-2} + a_3) + \cdots + (a_3 + a_{n-2}) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n)$$

En el último renglón, todas las parejas tienen el mismo valor $a_1 + a_n$ porque en cada suma el primer sumando va aumentando por d y el segundo por $-d$.

Como hay n parejas se tiene $2S_n = n(a_1 + a_n)$. Por lo tanto $S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.

Si se sustituye $a_n = a_1 + (n-1)d$, se tiene que $S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n-1)d]$.

d) Se quieren sumar 10 términos de la sucesión $a_n = 1 + 2n$, entonces se calcula el primer y décimo término

$$a_1 = 1 + 2(1) = 3,$$
$$a_{10} = 1 + 2(10) = 21.$$

Así, la suma de los 10 primeros términos es:

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}(10)(3 + 21) = 5(24) = 120.$$

Definición

La notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$ es una forma abreviada de escribir la suma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ y se lee "la sumatoria de a_i desde i igual 1 hasta i igual n".

Bajo esta notación, la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética está dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)];$$ con d la diferencia de la sucesión.

A esta suma se le conoce como **suma parcial** de una sucesión o **serie**, que en este caso se trata de una sucesión aritmética.

El símbolo Σ es una letra griega que corresponde a la letra mayúscula sigma. Cuando se utiliza para representar una suma se hace referencia a él como "el símbolo de sumatoria".

Problemas

1. Para caso, calcula lo que se pide.
   a) La suma de los primeros 21 términos de la sucesión $a_n = -6 + 6n$.
   b) La suma de los primeros 28 términos de la sucesión $a_n = 11 - (n - 1)$.
   c) La suma de los primeros 77 términos de la sucesión $a_n = -4 + 5(n - 1)$.
   d) La suma de los primeros 33 términos de la sucesión $a_n = 0.5 + 2(n - 1)$.

2. Dos flechas se encuentran dentro de un triángulo y un pentágono de modo que apuntan a los vértices de estos. A continuación se muestran cuatro figuras de la secuencia en la que giran las flechas:

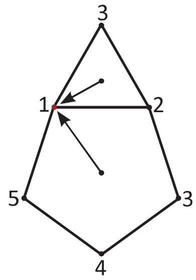


Figura 1

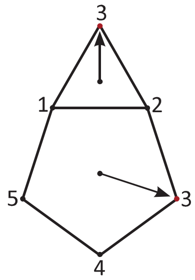


Figura 2

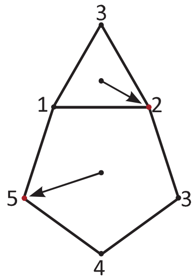


Figura 3

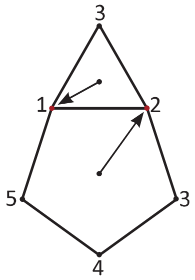


Figura 4

Si las flechas siguen siempre el mismo movimiento, determina el número de figura en la cual las flechas habrán apuntado un mismo vértice por trigésima vez.

1.6 Sucesiones aritméticas: suma parcial, parte 2

Problema inicial

¿Cuántos términos de la sucesión $a_n = 5 + 2(n - 1)$ deben sumarse para obtener 1 845?

Solución

Como la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética es $\frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)]$ se tiene que

$$a_1 = 5 \text{ y } \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}n\big[2(5) + 2(n-1)\big] = \frac{1}{2}n\big[10 + 2(n-1)\big] = 5n + n(n-1) = n^2 + 4n = 1\,845.$$

Se ha obtenido una ecuación de grado 2 donde la incógnita es n. Como se desea saber cuántos términos deben sumarse para obtener 1 845, hay que determinar las soluciones de dicha ecuación.

Resolviendo,

$$n(n+4) = 1\,845 \Rightarrow n^2 + 4n - 1\,845 = 0 \Rightarrow (n+45)(n-41) = 0.$$

De aquí se tiene que $n = -45$ o $n = 41$. Pero por ser n una posición de la sucesión, este no puede ser negativo, por lo tanto, se deben sumar 41 términos de la sucesión $a_n = 5 + 2(n-1)$ para obtener 1 845.

Conclusión

Para determinar el número de términos que deben sumarse de una sucesión aritmética para obtener un resultado específico, debe resolverse la ecuación cuadrática que resulta de igualar la fórmula de la suma parcial con el total que se desea.

Problemas

1. Determina el número de términos que deben sumarse en cada sucesión aritmética para obtener el resultado indicado.

a) $a_n = -1 + (n-1)$; suma parcial 434

b) $a_n = 3 + 4(n-1)$; suma parcial 1 081

c) $a_n = -3 + 3(n-1)$; suma parcial 270

d) $a_n = 5 - 2(n-1)$; suma parcial -391

e) $a_n = -4 - 7(n-1)$; suma parcial -129

f) $\sum_{i=1}^{n}\big[-100 + 4(i-1)\big] = 0$

217 es múltiplo de 7.

1 081 y 391 son múltiplos de 23.

2. ¿Cuántos términos de la sucesión aritmética 2, 8, 14, ... hay que sumar para obtener 1 064?

Carl Friedrich Gauss fue un matemático, físico, astrónomo y geodesta alemán, nació el 30 de abril de 1777 y falleció el 23 de febrero de 1855. Es considerado el príncipe de los matemáticos y desde sus años tempranos mostró extraordinarias pruebas de su habilidad mental. De niño, después de haberle preguntado a varios miembros de su familia sobre la pronunciación de las letras del alfabeto, aprendió a leer por su cuenta.

Gauss ingresó a la escuela cuando alcanzó los 7 años de edad, donde eventualmente se incorporó al curso de Aritmética, estudios en los cuales la mayoría de pupilos permanecían hasta los 15 años, que era la edad en la que terminaban sus estudios obligatorios. En dicho curso ocurrió un evento digno de mencionar, ya que fue de gran influencia para la futura vida de Gauss: en una ocación Büttner, el director de la escuela, quien también era su maestro de Aritmética, dió a la clase el ejercicio de escribir todos los números del 1 al 100 y sumarlos. El problema apenas había sido asignado, cuando Gauss puso la tableta donde escribía sobre la mesa y dijo: ¡Aquí está!, mientras los demás pupilos aún estaban calculando, multiplicando y sumando; en ese momento Büttner vió la tableta de Gauss y encontró escrito un solo número, que era la respuesta correcta.

Gauss estaba en posición de explicar al profesor cómo llegó a este resultado y dijo: “100+1=101, 99+2=101, 98+3=101, etc., y así tenemos tantos pares como hay en 100. Así, la respuesta es 50 × 101, o 5 050”.

Dunnington, G. W., Gray, J., Fritz-Egbert Dohse. *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*. The Mathematical Association of America.

1.7 Sucesiones aritméticas: problemas

Problema inicial

Determina la diferencia de una sucesión aritmética cuyo tercer término es 27 y cuyo quinto término es 35. Calcula el primer término y el término general de la sucesión.

Solución

Si a_n es la sucesión aritmética con diferencia d entonces $a_n = a_1 + d(n-1)$.

De los datos, se tiene que $a_3 = 27$ y $a_5 = 35$. Pero

$$a_3 = a_1 + d(3-1) = a_1 + 2d = 27,$$
$$a_5 = a_1 + d(5-1) = a_1 + 4d = 35.$$

Luego,

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 = 35 - 27 = a_1 + 4d - a_1 - 2d &= 2d \\ \Rightarrow 8 &= 2d \\ \Rightarrow d &= 4 \end{aligned}$$

Sustituyendo $d = 4$ en la primera ecuación $a_1 + 2(4) = 27 \Rightarrow a_1 = 27 - 8 = 19$.
Entonces, el primer término y el término general de la sucesión son

$$a_1 = 19 \text{ y } a_n = 19 + 4(n-1) = 15 + 4n.$$

Conclusión

En ocasiones se conocen algunos datos de una sucesión aritmética, y para determinar el término general de esta, se utiliza la definición de sucesión aritmética y los datos conocidos.

Si se conocen dos términos de la sucesión aritmética, para determinar el término general se resuelve el sistema de ecuaciones lineales que resulta de aplicar la definición del término general en cada término conocido.

Problemas

1. El segundo término de una sucesión aritmética es 12 y el cuarto término es 22. Determina el término general de la sucesión.

2. El quinto término de una sucesión aritmética es –11 y el décimo término es –26. Calcula el séptimo término.

3. De una sucesión aritmética se sabe que $a_9 = -5$ y que $a_{15} = 31$. Calcula a_{20}.

4. El octavo término de una sucesión aritmética es 8 y el vigésimo es 44. Determina el término general de la sucesión.

5. Calcula la suma de los primeros 10 términos de la sucesión aritmética que tiene por séptimo término a –25 y cuyo noveno término es –35.

6. Se tiene que $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 219$ y $a_7 = 34$. Determina el término general a_n de la sucesión aritmética.

7. Dada la sucesión aritmética $a_1 = 43$, $a_2 = 37$, ... , ¿cuál es el primer entero n tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i < 0$?

2.1 Sucesiones geométricas: definición*

Problema inicial

a) Si el área del cuadrado en la Figura 1 es 1, determina el área sombreada si cada cuadrado se ha dividido en cuatro cuadrados iguales.

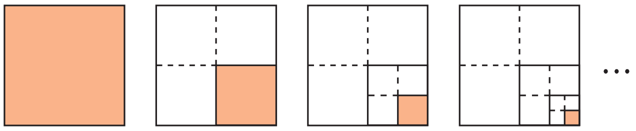


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

b) ¿Qué regla se puede establecer para encontrar el valor del área sombreada en cada figura?
c) De acuerdo al literal b), enlista los 7 primeros términos de la sucesión.
d) Si se divide un término entre su anterior, ¿qué se observa? Realiza este procedimiento al menos tres veces.

Solución

a) Si el área sombreada en la Figura 1 es 1, al haberse dividido en cuatro partes iguales, el área sombreada en la Figura 2 representa la cuarta parte respecto al área sombreada del cuadrado de la Figura 1, es decir, el área sombreada es igual a $\frac{1}{4}$.

De igual forma, el área sombreada en la Figura 3 es la cuarta parte del cuadrado que está sombreado en la Figura 2, por lo que el área sombreada es $\frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{16}$.

Continuando con el mismo análisis, el área sombreada en la Figura 4 es la cuarta parte del cuadrado que está sombreado en la Figura 3, es decir que el área sombreada es $\frac{1}{16} \div 4 = \frac{1}{64}$.

b) Para encontrar el área sombreada en una figura se puede dividir entre 4 el valor del área sombreada de la figura anterior.

c) Se puede elaborar una tabla para enlistar los elementos que tiene cada figura.

Término	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Valor del área	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1\,024}$	$\frac{1}{4\,096}$

d) Al dividir un término entre su anterior se tiene

$$a_2 \div a_1 = \frac{1}{4} \div 1 = \frac{1}{4} \qquad a_7 \div a_6 = \frac{1}{4\,096} \div \frac{1}{1\,024} = \frac{1}{4} \qquad a_5 \div a_4 = \frac{1}{256} \div \frac{1}{64} = \frac{1}{4}$$

Se puede observar entonces que siempre se obtiene el mismo resultado: $\frac{1}{4}$.

Conclusión

Una sucesión donde sus términos pueden obtenerse multiplicando por un mismo número el término anterior se llama **sucesión geométrica**.

Una sucesión geométrica tiene la propiedad que al dividir un término entre su anterior, el resultado siempre es el mismo. A este resultado se le llama **razón**.

Problemas

Determina si las siguientes sucesiones son geométricas. En caso de serlo, especifica la razón.

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
b) 1, 3, 9, 27, 81, ...
c) 3, –6, 12, –24, 48, –96, ...
d) –1, –2, –4, –6, –8, –10, ...

2.2 Sucesiones geométricas: término general*

Problema inicial

Encuentra el término general de la sucesión geométrica de la clase 2.1.

Solución

Se sabe que si a_{n-1} es el término $n-1$, a_n es el siguiente término. Como cada término de la sucesión geométrica se obtiene multiplicando por $\frac{1}{4}$ el término anterior, se tiene que

$$\underbrace{\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times 1}_{a_2=\frac{1}{4}\times a_1}, \qquad \underbrace{\frac{1}{16}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}_{a_3=\frac{1}{4}\times a_2}, \qquad \underbrace{\frac{1}{64}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}}_{a_4=\frac{1}{4}\times a_3}, \ldots, a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}$$

Es decir,

$$a_2=\frac{1}{4}\times a_1,\quad a_3=\frac{1}{4}\times a_2,\quad a_4=\frac{1}{4}\times a_3,\ldots,\quad a_{n-2}=\frac{1}{4}\times a_{n-3},\quad a_{n-1}=\frac{1}{4}\times a_{n-2},\quad a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}$$

Se desea encontrar una fórmula que describa la sucesión en términos de la posición que ocupa un elemento. Nótese que,

$$a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-2}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-3}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-4}$$

Si se continúa de ese modo,

$$a_n=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-4}\times a_4=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-3}\times a_3=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-2}\times a_2=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}\right)}_{n-1}\times a_1$$

Entonces, a_n es igual al primer término multiplicado por el producto de $n-1$ veces la razón $\frac{1}{4}$; es decir, que el término general de la sucesión geométrica es $a_n=a_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, donde $a_1=1$.

Conclusión

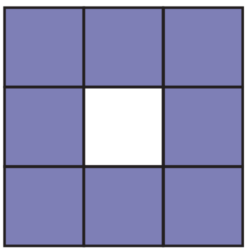
En una sucesión geométrica, si r es su razón, su término general está dado por $a_n=a_1r^{n-1}$.

Problemas

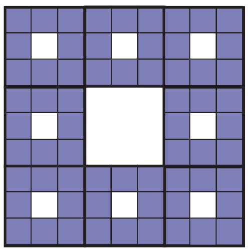
1. Establece el término general de las sucesiones geométricas del problema de la clase 2.1.

2. Observa el siguiente proceso:

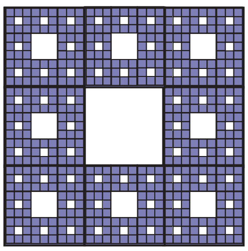
Paso 1. Se divide un cuadrado de lado 1 en 9 partes iguales y se quita el del centro.



Paso 2. De cada cuadrado que queda, se divide en 9 partes iguales y se quita el cuadrado del centro de cada uno de ellos.



Paso 3. Se realiza el mismo proceso con los cuadrados que quedan, dividiéndolos en 9 partes iguales y quitando el del medio.



Si se sigue de ese modo, determina el valor del área del cuadrado más pequeño en el que queda dividido el cuadrado inicial, después de haber realizado el proceso n veces. A esta figura se le conoce con el nombre de **Alfombra de Sierpinski**.

2.3 Sucesiones geométricas: suma parcial, parte 1

Problema inicial

1. Sea $S = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$. Calcula el valor de $S - rS$ y determina otra expresión para S.
2. Calcula la suma de los primeros n términos de la sucesión geométrica $a_n = a_1 r^{n-1}$.
3. Calcula la suma de los primeros 5 términos de la sucesión geométrica $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Solución

1. Se tiene que $S = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$ se multiplica por r toda la expresión y se obtiene
$rS = r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} + r^n$.

Si se resta rS de S se obtiene

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \ldots + \cancel{r^{n-3}} + \cancel{r^{n-2}} + \cancel{r^{n-1}} \\ rS = & \quad\ \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \ldots + \cancel{r^{n-3}} + \cancel{r^{n-2}} + \cancel{r^{n-1}} + r^n \\ \hline S - rS = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - r^n \end{array}$$

Por lo que $S(1 - r) = 1 - r^n$. Si $r \neq 1$, se despeja S y se tiene que $S = \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$.

Es decir, si $r \neq 1$, $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$. Si $r = 1$ la suma significa sumar n veces 1 por lo que $S = n$.

2. Al enlistar los primeros n términos de la sucesión

$$a_1,\ a_2 = ra_1,\ a_3 = r^2a_1,\ a_4 = r^3a_1,\ \ldots,\ a_{n-2} = r^{n-3}a_1,\ a_{n-1} = r^{n-2}a_1,\ a_n = r^{n-1}a_1.$$

Y calcular la suma

$$\begin{aligned} a_1 + ra_1 + r^2a_1 + r^3a_1 + \ldots + r^{n-3}a_1 + r^{n-2}a_1 + r^{n-1}a_1 &= a_1(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) \\ &= a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) \quad \text{si } r \neq 1. \end{aligned}$$

Si $r = 1$, entonces la suma es na_1.

3. Utilizando el resultado de 2, como se quiere calcular la suma de los primeros 5 términos, $n = 5$, además $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{4}$, entonces la suma buscada es

$$1\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5 - 1}{\frac{1}{4} - 1}\right) = \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{3}{4}} = \frac{1023}{1024} \div \frac{3}{4} = \frac{341}{256}.$$

La fracción compleja se calcula como

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Conclusión

La suma parcial de una sucesión geométrica $a_n = a_1 r^{n-1}$, escrita con el símbolo de sumatoria, está dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^n = \begin{cases} a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) & \text{si } r \neq 1 \\ na_1 & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

Problemas

1. Calcula la suma de los primeros 6 términos de la sucesión $a_n = 15(2)^{n-1}$.
2. Calcula la suma de los primeros 6 términos de la sucesión $a_n = 3(-2)^{n-1}$.
3. Calcula la suma de los primeros 5 términos de la sucesión $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \ldots$
4. Calcula la suma $2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{18}\right) + \cdots$ hasta el término 5. Deja expresado con exponentes.

Puede utilizarse la calculadora cuando hay que efectuar potencias grandes. También es recomendable dejar la respuesta expresada en fracción y no aproximar.

Unidad 6

2.4 Sucesiones geométricas: suma parcial, parte 2

Problema inicial

¿Cuántos términos de la sucesión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{2}$ y razón –4 deben sumarse para obtener 102.5?

Solución

Se sabe que $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{(-4)^n - 1}{-4-1}\right) = 102.5.$

Entonces

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-4)^n}{5}\right) = \frac{1}{10}[1-(-4)^n] = 102.5$$

$$\Rightarrow 1-(-4)^n = 102.5(10) = 1025$$

$$\Rightarrow \quad (-4)^n = -1024 \qquad \text{------------------ (1)}$$

Un primer análisis que puede hacerse es que, se tiene la potencia de un número negativo y este resulta ser negativo, por lo tanto, n debe ser impar. Como n es impar, $(-4)^n = -4^n$, por lo que resolver (1) es equivalente a resolver $4^n = 1024$.

Se escribe 1 024 como potencia de 4: $1024 = 4^5$. Al sustituir se obtiene $4^n = 4^5$. Entonces $n = 5$.

Por lo tanto, deben sumarse los primeros 5 términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{2}(-4)^{n-1}$ para obtener 102.5.

Conclusión

Para determinar el número de términos que deben sumarse de una sucesión geométrica para obtener un resultado específico debe resolverse la ecuación exponencial que resulta de igualar la fórmula de la suma parcial con el total que se desea.

Problemas

1. Determina cuántos términos deben sumarse de cada sucesión para obtener el resultado indicado

   a) 1, 2, 4, 8, 16, ..., suma parcial 511

   b) 2, 6, 18, 54, ..., suma parcial 2 186

   c) 4, –20, 100, – 500, ..., suma parcial –10 416

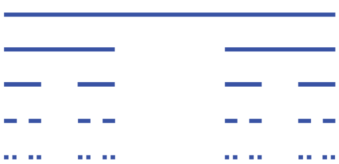
   d) $a_n = \frac{1}{3}(2^{n-1})$, suma parcial $\frac{127}{3}$

   e) $a_n = \frac{2}{3}(-3)^{n-1}$, suma parcial $-\frac{364}{3}$

   f) $a_n = 3\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$, suma parcial $\frac{6303}{2401}$

2. Determina los posibles valores que pueden obtenerse al calcular una suma parcial de la sucesión 1, –1, 1, –1, 1, ...

3. A partir de un segmento de longitud 1 se construye la siguiente sucesión:



Paso 1. Se divide el segmento en tres partes iguales y se extrae el segmento del medio. Se tienen dos segmentos de longitud $\frac{1}{3}$.

Paso 2. Luego se dividen los otros dos segmentos en tres partes iguales y se extraen los segmentos del medio. Se tienen cuatro segmentos de longitud $\frac{1}{9}$.

Si se continúa este proceso, responde:

a) En el paso n, ¿cuántos segmentos se han extraído?

b) ¿Cuál es la suma de las longitudes de los segmentos que se tienen en el paso 10?

c) ¿En qué paso la suma de las longitudes de los segmentos que se tienen es menor a 0.1?