7 Unidad

Métodos de conteo

Los métodos de conteo surgen como una necesidad para analizar y comprender matemáticamente juegos de azar (comprender la suerte), históricamente esta teoría surge de las formas de entretenimiento de la alta sociedad que existían en Francia, hacia el siglo XVII aproximadamente, las cuales consistían en participar en juegos que incluían lanzamientos de dados, monedas, extracción de objetos, cartas, etc., es por ello que para establecer matemáticamente el fenómeno de la suerte, surgen los métodos de conteo empleados y descubiertos por los matemáticos franceses Blaise Pascal y Pierre de Fermat, quienes aplicaron estos métodos para comprender y analizar las decisiones más favorables para los jugadores, a modo de tener más éxito basando las decisiones en conceptos matemáticos.

Baraja francesa del siglo XVI aproximadamente.

Además del surgimiento histórico para resolver una situación de la vida cotidiana, estos conceptos después de su estudio a lo largo de los siglos más recientes, se han desarrollado a tal punto de ser aplicados a ramas tecnológicas como la computación, para el cifrado de información, y continúa siendo una herramienta para el análisis y creación de juegos de azar y concursos donde en muchas ocasiones, más que la suerte, juega la matemática.

A continuación se estudiarán algunos contenidos como el diagrama de árbol, a partir de ello se introducirán algunos principios básicos de conteo, luego se hará un estudio más amplio sobre las permutaciones, las combinaciones y las aplicaciones del conteo a situaciones específicas.

1.1 Teoría de conjuntos

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos que pueden ser números, letras, personas, y prácticamente cualquier tipo de cosas. Cada objeto del conjunto recibe el nombre de **elemento**. Si a es un elemento de A, se denota por $a \in$ A o A $\ni a$, y se lee "a pertenece a A" o "A contiene al elemento a". La cantidad de elementos que tiene un conjunto se conoce como **cardinalidad del conjunto** y dado un conjunto A se denota la cardinalidad de A por n(A) (o en ocasiones como|A|). Un conjunto se denota encerrando entre "llaves" todos los elementos del conjunto. Si los elementos están expresados en forma de lista, se dice que el conjunto está expresado por **extensión**, por ejemplo: A = {1, 2, 3, a, b, c}.

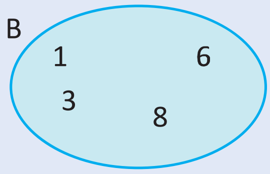
Si los elementos están expresados por una regla o característica de todos los elementos, se dice que el conjunto está expresado por **comprensión**, por ejemplo:

{x| x es un número positivo menor que 6}.

El conjunto se lee: los x tal que x es un número positivo menor que 6.

Se entiende como el conjunto formado por los "x" tal que (o de modo que) dicho "x" cumple ser un número positivo menor que 6.

Para representar gráficamente un conjunto a menudo se utiliza un óvalo en cuyo interior se ubican todos los elementos del conjunto, esta representación se conoce como **diagrama de Venn**, por ejemplo el conjunto B = {1, 3, 6, 8} se puede representar en un diagrama de Venn así:



Ejemplo 1

Determina la cardinalidad del conjunto A = {2, 4, 6, 8, 10} y si es posible, expresa el conjunto por comprensión.
La cardinalidad de A es: n(A) = 5.
Se puede expresar por comprensión como: A = {x| x es un número positivo par no mayor que 10}.
También se puede expresar como A = {Los números positivos pares no mayores que 10}.

Ejemplo 2

Expresa los siguientes conjuntos por extensión (si es posible) y determina la cardinalidad del conjunto.

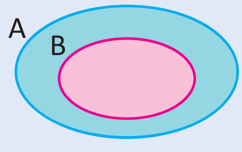
a) A = {Los números positivos impares menores a 8}
b) B = {x| x = 2n, para n en los números naturales}

a) A = {1, 3, 5, 7} y n(A) = 4.
b) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} y n(A) = ∞.

Para denotar conjuntos cuyos elementos siguen un patrón pero no terminan, se pueden utilizar puntos suspensivos, como en el literal b, y en este caso la cardinalidad del conjunto se denota por infinito, ∞.

Definición

Un conjunto B es **subconjunto** de un conjunto A si se cumple que todo elemento de B es elemento de A (Si $a \in$ B entonces $a \in$ A), y se denota por B $\subset$ A o A $\supset$ B, que se lee "B incluido en A" o "A incluye a B".



Por ejemplo, si A = {2, 3, 5, 8, 9} y B = {2, 5}, entonces B $\subset$ A.

El conjunto que no posee elementos se conoce como **conjunto vacío**, se denota por ∅, y se cumple que n(∅) = 0. Para todo conjunto A se cumple que ∅ $\subset$ A.

El conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto A se conoce como **conjunto potencia de A**.
Si A = {a, b, c} , entonces el conjunto potencia de A es {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}.

1.2 Operaciones con conjuntos

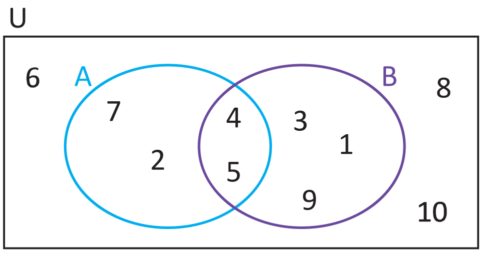
Problema inicial

Considerando los conjuntos A = {2, 4, 5, 7} y B = {1, 3, 4, 5, 9}.

a) Determina el conjunto de los elementos que están en A o en B.
b) Determina el conjunto de los elementos que están tanto en A como en B.
c) Determina el conjunto de los elementos que están en A pero no están en B.
d) Considerando U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Determina el conjunto de los elementos que están en U pero no están en A.

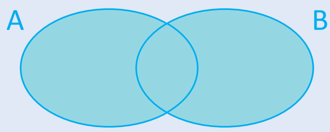
Solución

a) El conjunto es: {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}.
b) El conjunto es: {4, 5}.
c) El conjunto es: {2, 7}.
d) El conjunto es: {1, 3, 6, 8 ,9, 10}.

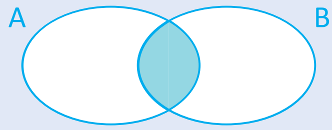


Definición

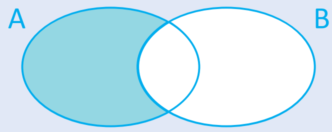
La operación entre dos conjuntos A y B, que forma el conjunto de los elementos que están en A o en B se conoce como **unión de conjuntos**, se denota A⋃B, y se lee "A unido B".



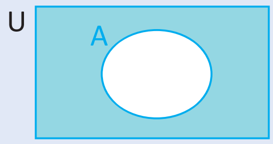
La operación entre dos conjuntos A y B, que forma el conjunto de los elementos que están tanto en A como en B se conoce como **intersección de conjuntos**, se denota A⋂B, y se lee "A intersectado B".



La operación entre dos conjuntos A y B, que forma el conjunto de los elementos que están en A pero no están en B se conoce como **diferencia de conjuntos**, y se denota A – B.



La operación entre dos conjuntos A y U que cumplen que A ⊂ U y toma los elementos de U que no están en A se conoce como **complemento** del conjunto A, y se denota A^c. Al conjunto U a menudo se le conoce como **conjunto universo** o simplemente **universo**.



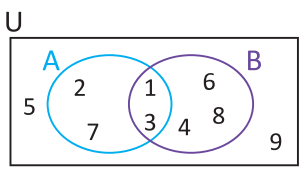
Problemas

1. Para cada literal, determina los conjuntos A⋃B, A⋂B, A – B y B – A.

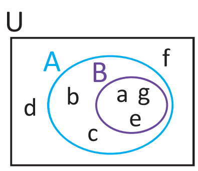
a) A = {a, c, d, e, f, g}, B = {b, d, f, h}
b) A = {–2, 0, 1, 4, 7}, B = {–2, 1, 4}
c) A = {a, b}, B = {a, b, c, d}
d) A = {2, 3, 4}, B = {5, 6, 7}

2. Para cada diagrama de Venn, determina los conjuntos A, B, A⋃B, A⋂B, A – B, B – A, A^c y B^c .

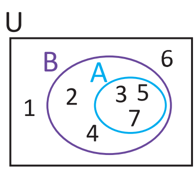
a)



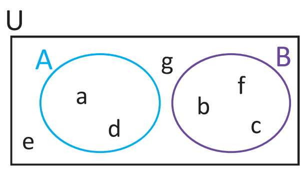
b)



c)



d)



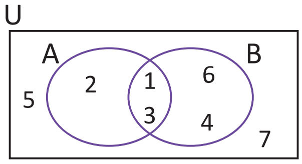
Unidad 7

1.3 Cardinalidad de conjuntos

Problema inicial

Considerando los conjuntos A y B representados por el diagrama de Venn de la derecha, resuelve:

a) ¿Cuántos elementos tiene A?
b) ¿Cuántos elementos tiene B?
c) ¿Cuántos elementos tiene $A \cap B$?
d) ¿Cuántos elementos tiene $A \cup B$?
e) ¿Cuántos elementos tiene A^c?



Solución

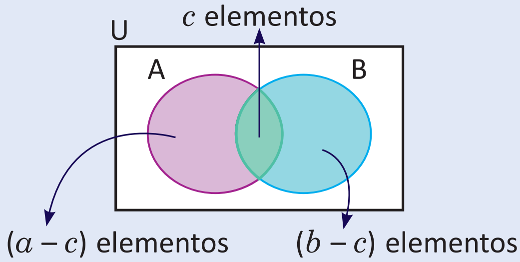
El conjunto universo es: U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

a) Identificando el conjunto A = {1, 2, 3}, entonces el número de elementos de A será: $n(A) = 3$.
b) Identificando el conjunto B = {1, 3, 4, 6}, entonces el número de elementos de B será: $n(B) = 4$.
c) Identificando el conjunto $A \cap B$ = {1, 3}, entonces el número de elementos de $A \cap B$ será: $n(A \cap B) = 2$.
d) Identificando el conjunto $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 6}, entonces el número de elementos de $A \cup B$ será: $n(A \cup B) = 5$.
e) Identificando el conjunto A^c = {4, 5, 6, 7}, entonces el número de elementos de A^c será: $n(A^c) = 4$.

En general

Considerando los conjuntos A y B de modo que $n(A) = a$, $n(B) = b$ y $n(A \cap B) = c$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= (a - c) + (b - c) + c \\ &= a + b - c. \end{aligned}$$

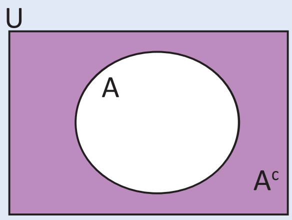


Y esto es equivalente a tener:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

De forma parecida analizando A^c como los elementos de U que no están en A se puede concluir que

$$n(A^c) = n(U) - n(A).$$



En general, para los conjuntos U, A y B se cumple que

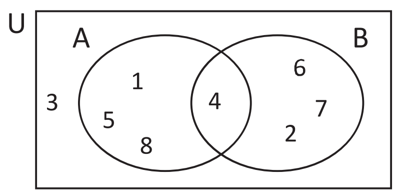
$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),}$$

$$\boldsymbol{n(A^c) = n(U) - n(A).}$$

Problemas

1. Considerando el diagrama de Venn de la derecha, resuelve los literales.

a) $n(A \cup B)$ b) $n(U)$ c) $n(A^c)$ d) $n(B^c)$
e) $n[(A \cup B)^c]$ f) $n(A^c \cap B^c)$ g) $n[(A \cap B)^c]$ h) $n(A^c \cup B^c)$



Utilizando diagramas de Venn puedes comprobar que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Estas propiedades se conocen como **identidades de De Morgan**.

2. Considerando los conjuntos U, A y B en los que se cumple que $n(U) = 60$, $n(A) = 35$, $n(B) = 21$ y $n(A \cap B) = 14$, determina:

a) $n(A \cup B)$ b) $n(A^c)$ c) $n(B^c)$ d) $n[(A \cup B)^c]$ e) $n[(A \cap B)^c]$ f) $n(A - B)$ g) $n(A \cap B^c)$

1.4 Aplicaciones de la cardinalidad de conjuntos

Problema inicial

Considerando los números naturales del 1 al 100, resuelve:

a) ¿Cuántos múltiplos de 3 hay?

b) ¿Cuántos que no son múltiplos de 3 hay?

c) ¿Cuántos múltiplos tanto de 3 como de 5 hay?

d) ¿Cuántos múltiplos de 3 o de 5 hay?

Solución

Considerando U como el conjunto de los números naturales del 1 al 100. Denotando como A al conjunto de los números en U que son múltiplos de 3 y como B al conjunto de los múltiplos de 5 que están en U.

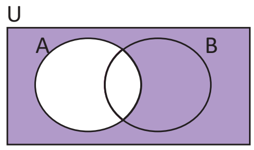
A = {3(1), 3(2), 3(3), ... , 3(31), 3(32), 3(33)}

B = {5(1), 5(2), 5(3), ... , 5(18), 5(19), 5(20)}

a) La cantidad de múltiplos de 3 entre 1 y 100 es igual a la cardinalidad del conjunto A, es decir, $n(A) = 33$.

b) La cantidad de números que no son múltiplos de 3 entre 1 y 100 es igual a la cardinalidad del complemento de A, es decir:

$$n(A^c) = n(U) - n(A) = 100 - 33 = 67.$$

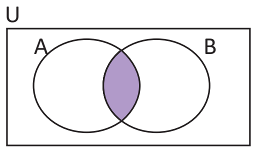


c) El conjunto formado por los múltiplos de 3 y de 5 es el mismo conjunto que el de los múltiplos de 15 que hay entre 1 y 100.

$A \cap B = \{15(1), 15(2), 15(3), 15(4), 15(5), 15(6)\}$.

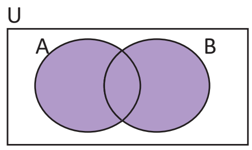
Entonces $n(A \cap B) = 6$.

Los múltiplos comunes de 3 y 5 son los múltiplos del mínimo común múltiplo de ellos, es decir, 15.



d) El conjunto formado por los múltiplos de 3 o de 5 está dado por el conjunto $A \cup B$.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 20 - 6 = 47$.



Conclusión

La teoría de conjuntos puede resultar muy útil para realizar conteo de situaciones que se modelan a partir de conjuntos.

Problemas

1. Determina cuántos números del 1 al 100 no son múltiplos de 3 ni de 5. Luego realiza el diagrama de Venn que representa dicha situación.

2. Considerando los números naturales del 1 al 100, resuelve:
   a) ¿Cuántos múltiplos de 2 hay?
   b) ¿Cuántos que no son múltiplos de 3 hay?
   c) ¿Cuántos múltiplos de 2 y de 3 hay?
   d) ¿Cuántos múltiplos de 2 o de 3 hay?
   e) ¿Cuántos números que no son múltiplos de 2 ni de 3 hay?

3. La tabla muestra la cardinalidad de la intersección de los conjuntos de la fila y de la columna. Considerando los conjuntos A y B, llena la tabla con la información que falta:

	A	A^c	Total
B	42		56
B^c		10	
Total	76		100

Unidad 7

2.1 Diagrama de árbol

Problema inicial

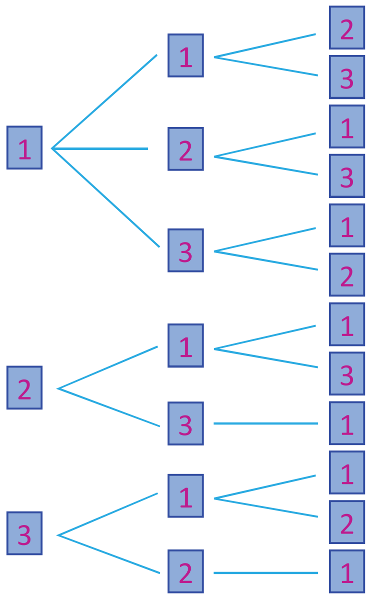
Hay 4 tarjetas numeradas de la siguiente manera $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$; determina de cuántas formas se pueden colocar tres de ellas en una fila.

Solución

Analizando la posición de las tarjetas como muestra el diagrama de la derecha.

A partir de él se puede observar que cada camino que se pueda tomar es una forma en que se pueden colocar las tres cartas, y estas se pueden contar a partir de la última columna de tarjetas numeradas.

Por lo tanto hay 12 formas.



Definición

El diagrama en donde se listan todas las posibilidades de un suceso por casos y se representa por líneas rectas se conoce como **diagrama de árbol**, el diagrama de la solución es un ejemplo de diagrama de árbol.

En los eventos sobre extracción de objetos, se dice que es **con reemplazo** cuando al extraer un objeto este se devuelve al grupo de extracción, y **sin reemplazo** cuando el objeto no se devuelve.

Problemas

1. Utiliza un diagrama de árbol para determinar de cuántas formas se pueden extraer sin reemplazo 3 bolitas de color rojo, amarillo y verde (una de cada color) de una bolsa, si se extrae una bolita a la vez.

2. Utiliza un diagrama de árbol para calcular cuántas formas hay para repartir 4 dulces de diferente sabor entre 4 personas, si ninguna puede quedar sin dulces.

3. María tiene 2 pantalones, 1 falda, 2 blusas y 3 pares de zapatos, todos diferentes. Utiliza diagrama de árbol para determinar cuántas formas diferentes tiene María para vestirse.

4. Utiliza un diagrama de árbol para calcular el total de maneras que hay para extraer 2 cartas con reemplazo de entre 5 cartas diferentes.

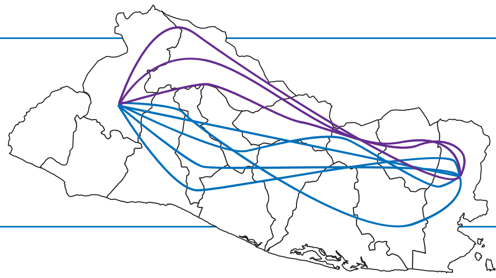
5. Se lanzan tres dados diferentes. Determina el número de casos donde la suma sea 5.

En el primer dado solo puede caer 1, 2 o 3, sino ya no podría sumar 5.

2.2 Principio de la suma

Problema inicial

¿De cuántas maneras se puede viajar de Santa Ana a La Unión, si pasando por San Salvador hay 5 caminos diferentes y pasando por Chalatenango hay 3 formas diferentes? Considera que ningún camino pasa por ambos lugares.



Solución

Para viajar de Santa Ana a La Unión hay 2 opciones: pasar por San Salvador o bien pasar por Chalatenango, y ninguna ruta pasa por ambos lugares a la vez. De forma que para saber el total de maneras que hay para ir de Santa Ana a La Unión es 5 + 3 = 8.

Conclusión

Si un evento o condición A puede ocurrir de a maneras, un evento o condición B puede ocurrir de b maneras, y ambos eventos no ocurren al mismo tiempo, entonces el total de maneras en que puede ocurrir el evento A o B (es decir uno de los dos) es $a + b$. Este resultado se conoce como **principio de la suma**.

Ejemplo

En una zapatería tienen 4 tipos de sandalias, 2 tipos de zapatillas y 3 tipos de botas, ¿cuántos tipos de zapatos diferentes ofrece la zapatería?

La zapatería ofrece 3 tipos de zapatos: sandalias, de las cuales hay 4 tipos diferentes; zapatillas, de las cuales hay 2 tipos diferentes; y botas, de las cuales hay 3 tipos de botas diferentes.

Así se cumple que la zapatería ofrece 4 + 2 + 3 = 9 tipos de zapatos diferentes.

Problemas

1. En una zona de comedores hay 3 locales en donde se puede comprar, si el primero tiene 4 opciones de comida, el segundo 5 y el tercero 7, determina de cuántas formas se puede comprar comida en alguno de los locales.

2. María tiene 4 centros escolares para realizar sus horas sociales, en el primer centro escolar tiene 2 opciones, en el segundo tiene 3 opciones, en el tercero tiene 4 opciones y en el cuarto solamente una opción para realizar las horas sociales. Determina cuántas opciones tiene en total María para realizar sus horas sociales.

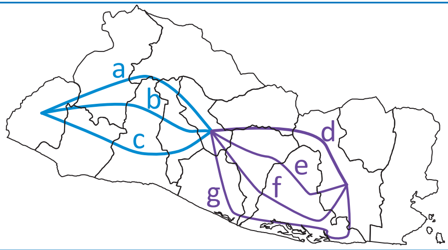
3. Si se lanzan 2 dados al mismo tiempo, de cuántas maneras la suma de los puntos es 7 o 4.

4. En la situación del problema 3, determina cuántas maneras hay para que la diferencia de los puntos sea 2 o 3.

2.3 Principio de la multiplicación

Problema inicial

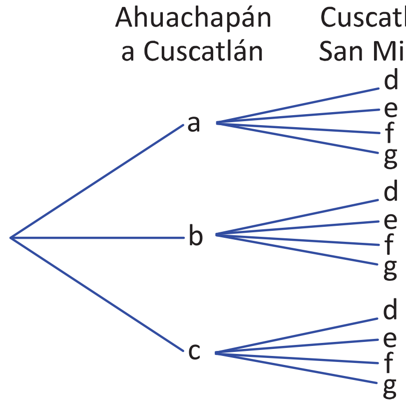
¿De cuántas maneras se puede viajar de Ahuachapán a San Miguel pasando por Cuscatlán, si para llegar de Ahuachapán a Cuscatlán hay 3 formas diferentes de llegar a, b y c, y para llegar de Cuscatlán a San Miguel hay 4 formas diferentes para llegar d, e, f y g?



Solución

Para salir de Ahuachapán a Cuscatlán existen 3 formas diferentes, y por cada una de ellas al llegar a Cuscatlán hay 4 formas diferentes de llegar a San Miguel, entonces el total de maneras para llegar de Ahuachapán a San Miguel pasando por Cuscatlán es 3 × 4 = 12 maneras diferentes.

Las 12 maneras son: ad, ae, af, ag, bd, be, bf, bg, cd, ce, cf y cg.



Conclusión

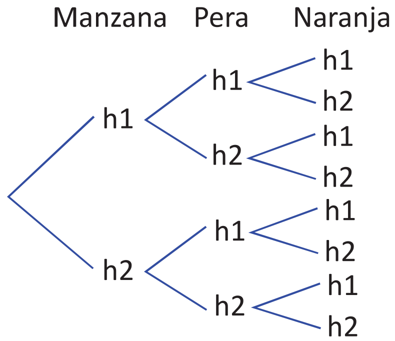
Si un evento o condición A puede ocurrir de a maneras, y para cada una de estas maneras un evento o condición B puede ocurrir de b maneras, entonces el total de formas en que puede ocurrir el evento A y el evento B (es decir los dos) es ab. Este resultado se conoce como **principio de la multiplicación**.

Es posible que para resolver algunos problemas sea necesario aplicar tanto el principio de la suma como el principio de la multiplicación.

Ejemplo

José quiere repartir una manzana, una pera y una naranja a sus dos hermanos. Determina de cuántas maneras puede repartir las frutas si incluso puede darse el caso que le dé a un hermano todo y al otro nada.

Tomando como referencia la fruta, para cada una de estas, la manzana tiene 2 posibilidades: que se dé al hermano 1 o al hermano 2; luego, la pera también tiene 2 posibilidades, y la naranja igualmente tiene 2 posibilidades, entonces José puede repartir la fruta de 2 × 2 × 2 = 8 maneras diferentes.



Problemas

1. Determina de cuántas maneras se puede formar una pareja de un niño y una niña de entre 4 niños y 3 niñas.

2. En un comedor hay 3 tipos de platos fuertes, 2 tipos de arroz y 3 tipos de ensalada. Determina de cuántas maneras se puede formar un almuerzo escogiendo entre un plato fuerte, un tipo de arroz y una ensalada.

3. Determina de cuántas maneras se pueden repartir una pera y un mango entre 3 personas diferentes. Considera que no se pueden dar ambas frutas a una sola persona.

4. María tiene 4 calzonetas y 3 camisetas para baloncesto, y tiene 5 calzonetas y 4 camisetas para fútbol. ¿De cuántas maneras puede vestirse María para jugar baloncesto o fútbol?

2.4 Factorial de un número

Problema inicial

Determina de cuántas maneras es posible ordenar 4 personas en una fila.

Solución

En la primera posición de la fila puede colocarse cualquiera de las 4 personas, entonces hay 4 posibilidades.

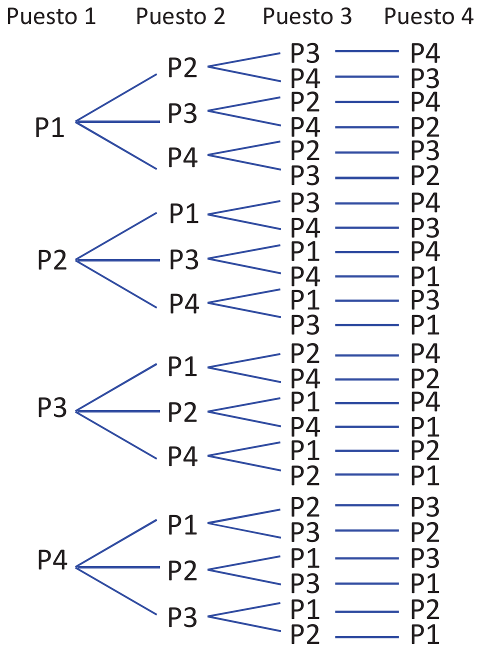
Luego, en la segunda posición de la fila ya solo se tienen 3 personas (porque en la primera posición ya quedó una) entonces hay 3 posibilidades.

Análogamente, para la tercera posición solo hay 2 posibilidades y para la última posición solo habrá 1 posibilidad.

Por lo tanto, por principio de la multiplicación, el total de maneras de arreglar 4 personas en una fila es:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Hay 24 maneras diferentes para ordenar 4 personas en una fila.



Definición

Para un número natural n, se define el **factorial de n** como el producto de los números consecutivos desde 1 hasta n. Se denota el factorial de n por $n!$, y se lee "n factorial". Entonces:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Observa que $n! = n \times (n-1)!$

Ejemplo

Calcula o simplifica el resultado de las operaciones con factorial.

a) $3!$

$3! = 3 \times 2 \times 1$
$= 6$

b) $6! \div 4!$

$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}}$
$= 30$

c) $4! - 3!$

$4! - 3! = (4 \times 3!) - 3!$
$= 3!(4-1)$
$= 6(3)$
$= 18$

d) $\frac{2018!}{2018}$

$\frac{2018!}{2018} = \frac{\cancel{2018} \times 2017!}{\cancel{2018}}$
$= 2017!$

Problemas

Primero calcula lo que está entre paréntesis.

1. Calcula el resultado de las operaciones con factorial.

a) $4!$ b) $5!$ c) $(5-3)!$ d) $6! - 4!$
e) $(2+3)!$ f) $4! + 3!$ g) $4! \times 3!$ h) $(2 \times 3)!$

2. Calcula o simplifica las siguientes expresiones con factoriales.

a) $\frac{5!}{3!}$ b) $\left(\frac{6}{3}\right)!$ c) $\frac{4!}{6}$ d) $\frac{2019!}{2019}$ e) $\frac{7!}{(7-2)!}$ f) $\frac{7!}{2!(7-2)!}$ g) $\frac{9!}{2!(3!)(4!)}$

3. Determina el valor de x.

a) $x! = 110(x-2)!$ b) $12x! + 5(x+1)! = (x+2)!$

4. Determina de cuántas maneras se pueden arreglar las letras de la palabra ÁRBOL.

2.5 Permutaciones

Problema inicial

Determina la cantidad de maneras en que se puede colocar 3 vocales diferentes en una fila.

Solución

Se pueden considerar los 3 puestos de la siguiente manera.

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{\qquad}} \qquad \underset{\text{Segundo}}{\underline{\qquad}} \qquad \underset{\text{Tercero}}{\underline{\qquad}}$$

Para elegir la vocal que estará en el primer puesto hay 5 posibilidades (cualquiera de las 5 vocales, a, e, i, o, u).

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{\ 5\ }} \qquad \underset{\text{Segundo}}{\underline{\qquad}} \qquad \underset{\text{Tercero}}{\underline{\qquad}}$$

Luego para el segundo y tercer puesto quedarán únicamente 4 y 3 posibilidades respectivamente.

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{\ 5\ }} \times \underset{\text{Segundo}}{\underline{\ 4\ }} \times \underset{\text{Tercero}}{\underline{\ 3\ }}$$

Por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras de colocar 3 de las 5 vocales en una fila es: $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Conclusión

Una secuencia ordenada de objetos donde el orden importa se conoce como **permutación**.

El total de permutaciones que se pueden realizar tomando r de n $(0 \leq r \leq n)$ está dado por:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Observa que $n\mathrm{P}0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$.

Este total se denota por $n\mathrm{P}r$, y se lee "n permuto r", es decir

$$n\mathrm{P}r = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(r-1))}_{r \text{ factores}} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

El total de maneras de ordenar n objetos diferentes es $n!$, por otro lado, con la fórmula de permutaciones se tiene que $n\mathrm{P}n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$, y esto debe ser $n!$, por lo tanto se cumple que $0! = 1$.

Ejemplo

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos del 1 al 9, si no se repite ningún dígito?

Al tomar 3 cifras, es importante el orden entre ellas (forman números diferentes), entonces considerando la permutación tomando 3 de 9 objetos, $9\mathrm{P}3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$. Por lo tanto, se pueden formar 504 números.

$$9\mathrm{P}3 = \underbrace{9 \times 8 \times 7}_{3 \text{ factores}}$$

Problemas

1. ¿Cuántos números de 2 cifras sin repetir se pueden formar con los dígitos del 1 al 5?
2. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 3 caramelos de diferente sabor para 6 estudiantes, considerando que ningún estudiante recibe más de un caramelo?
3. Calcula la cantidad de maneras en que se puede elegir un presidente, un vicepresidente y un tesorero de un grupo de 6 personas.
4. Determina la cantidad de maneras que hay para sentar 5 personas en 3 asientos.
5. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar 5 personas en una fila, si una persona específica de ellas debe estar al inicio?

2.6 Permutaciones y métodos de conteo

Problema inicial

Determina cuántas formas hay para ordenar 3 niños y 4 niñas en fila, si todos los niños deben estar juntos.

Solución

Se puede considerar los niños como un solo bloque y luego arreglar únicamente 5 objetos en fila (las 4 niñas y el bloque de niños).

Niña	Niña	Niña	__ __ __ Niños	Niña

Se pueden ordenar los 5 elementos (las 4 niñas y el bloque de los niños) de 5! maneras, y luego, se puede ordenar el bloque de los niños de 3! maneras.

5	4	3	2	1
Niña	Niña	Niña	3 2 1 Niños	Niña

Y aplicando el principio de la multiplicación, se tiene que el total de maneras que hay para ordenar 3 niños y 4 niñas de modo que los 3 niños estén juntos es $5! \times 3! = 720$.

Conclusión

En permutaciones es común utilizar la estrategia de considerar un conjunto de elementos que deben ir juntos como un solo objeto, y ordenar tanto los elementos del bloque como todos los objetos, aplicando el principio de la multiplicación.

Ejemplo

Determina de cuántas maneras se pueden ordenar 3 hombres y 4 mujeres en fila, de tal manera que los hombres no estén a la par (uno a la par de otro).

Las maneras de colocar las 4 mujeres en una fila se puede hacer de 4! maneras. Entonces los hombres pueden estar en cualquiera de los espacios que se marcan en la figura de abajo.

____ Mujer ____ Mujer ____ Mujer ____ Mujer ____

Entonces los hombre se pueden arreglar separados de 5P3 maneras. Aplicando el principio de la multiplicación, el total de formas para arreglar 3 hombres y 4 mujeres de modo que los hombres no están uno a la par de otro es $4! \times 5P3 = 24 \times 60 = 1\,440$.

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para ordenar 4 hombres y 3 mujeres, si los 4 hombres deben estar juntos siempre.
2. Se tiene 9 libros de historia y 6 de matemática (todos distintos), ¿cuántas formas hay para ordenar 5 libros en un estante si se debe cumplir que estos 5 libros son de una misma materia?
3. ¿Cuántas cadenas de 6 letras diferentes se pueden formar si las primeras 2 deben ser vocales y las últimas 4 consonantes utilizando las letras de la “a” a la “j”?
4. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una fila 4 hombres y 4 mujeres, si estos deben ir intercalados?
5. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 4 estudiantes en 6 sillas colocadas en una fila, si dos específicos de ellos siempre se sientan juntos (sin dejar sillas vacías de por medio)?

2.7 Permutaciones con repetición

Problema inicial

¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 4 y 5, si en el número se admiten dígitos repetidos?

Solución

Considerando los 5 espacios de las cifras del número:

$$\underset{\text{DM}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{UM}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{C}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{D}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{U}}{\underline{\qquad}}$$

Entonces comenzando con las unidades, habrán 3 opciones (cualquiera de los números 2, 4 o 5).

$$\underset{\text{DM}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{UM}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{C}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{D}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{U}}{\underline{\quad 3 \quad}}$$

Luego, para las decenas también habrán 3 opciones (dado que en el número se admiten dígitos repetidos).

$$\underset{\text{DM}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{UM}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{C}}{\underline{\qquad}}\quad \underset{\text{D}}{\underline{\quad 3 \quad}} \times \underset{\text{U}}{\underline{\quad 3 \quad}}$$

Y análogamente para centenas, unidades y decenas de millar también habrán 3 opciones para cada uno.

$$\underset{\text{DM}}{\underline{\quad 3 \quad}} \times \underset{\text{UM}}{\underline{\quad 3 \quad}} \times \underset{\text{C}}{\underline{\quad 3 \quad}} \times \underset{\text{D}}{\underline{\quad 3 \quad}} \times \underset{\text{U}}{\underline{\quad 3 \quad}}$$

Por lo tanto, se pueden formar $3^5 = 241$ números de 5 cifras con los dígitos 2, 4 y 5 admitiendo repetición.

Conclusión

El total de formas que hay para formar cadenas de longitud r con n elementos que se pueden repetir en la cadena es: n^r.

Ejemplo

¿Cuántos subconjuntos se pueden formar de un conjunto con n elementos?

Tomando cada elemento del conjunto y considerando que para formar un subconjunto dicho elemento solo tiene dos opciones: estar en el subconjunto o no estar. Así para cada elemento de los n del conjunto se cumple que

$$\underset{\text{Elemento } 1}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Elemento } 2}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \dots \times \underset{\text{Elemento } n-1}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Elemento } n}{\underline{\quad 2 \quad}}$$

Este resultado significa que la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto de cardinalidad n es 2^n.

Por lo tanto, el total de subconjuntos que se pueden formar de un conjunto con n elementos es 2^n.

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para colocar 3 letras en una fila utilizando a, b, c y d; considera que las letras se pueden repetir.

2. El código binario es una forma de representación numérica alternativa al sistema decimal, y es muy utilizado en el ambiente computacional porque solo utiliza dos dígitos o caracteres, el 0 y el 1 que se conocen como bits y resultan fáciles de almacenar en una computadora. Determina cuántos números de 7 cifras se pueden representar en código binario.

3. Determina cuántos subconjuntos de A = {a, b, c, d, e, f} se pueden formar.

4. El número de la placa de un vehículo está conformada por 2 letras, que ocupan las primeras 2 posiciones, y 4 números. Si en una placa se pueden repetir tanto letras como números, y se pueden usar las letras A, B, C, D, E y los números del 1 al 9, determina cuántas placas se pueden elaborar con estas condiciones.

2.8 Permutaciones circulares

Problema inicial

Determina de cuántas maneras se pueden sentar 4 personas en una mesa redonda. Se considera el mismo arreglo cuando al girar un arreglo coincide con otro.

Solución

En este caso, considerando un arreglo particular, por ejemplo:

Dado que la mesa es redonda, los cuatro arreglos de arriba son equivalentes, es decir, solo cuentan por 1.

Entonces el mismo arreglo se puede rotar 4 veces (una vez por cada silla), entonces si consideramos arreglar a todas las personas como si fuera una fila, esto se puede hacer de 4! maneras, pero haciendo esto se estaría contando 4 veces cada ordenamiento, entonces el total de maneras en que se pueden sentar 4 personas en una mesa redonda es: $\frac{4!}{4} = 3! = 6$ maneras.

En general

El total de permutaciones que se pueden realizar ordenando r de n objetos de manera circular está dado por:

$$\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r}.$$

En particular, el total de permutaciones de n objetos de manera circular está dado por:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Ejemplo

Determina de cuántas formas se pueden ordenar 4 de 6 personas en una mesa redonda.

El total de formas en que se pueden ordenar 4 de 6 personas en una fila es ${}_{6}\mathrm{P}_{4}$.

Dado que es un arreglo en una mesa redonda, en el total anterior se estaría contando 4 veces cada arreglo, por lo tanto, el total de formas que hay para ordenar 4 de 6 personas en una mesa redonda es $\frac{{}_{6}\mathrm{P}_{4}}{4} = 90$.

Problemas

1. ¿De cuántas maneras se pueden subir 7 niños a un carrusel con 7 caballitos todos idénticos?
2. En una mesa redonda hay 5 sillas y 7 personas (2 quedan paradas), determina de cuántas maneras se pueden sentar.
3. Cinco amigos juegan en una mesa redonda, determina de cuántas maneras se pueden ubicar, si 2 de ellos siempre quieren estar a la par.

Puedes utilizar el método visto en la clase 2.6.

4. Cuatro bailarines y cuatro bailarinas interpretan una danza en donde forman un círculo y se toman todos por las manos. ¿De cuántas formas pueden ubicarse los bailarines si en la danza deben aparecer alternadamente un hombre y una mujer?
5. Determina de cuántas formas pueden sentarse 4 parejas de novios si la pareja de cada persona debe estar justo en la posición de enfrente de la que se ubique.

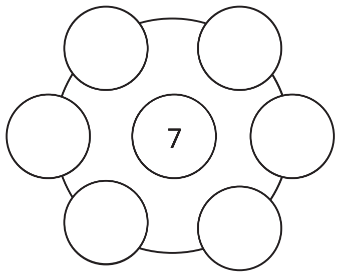
2.9 Configuraciones circulares*

Problema inicial

Determina de cuántas maneras se pueden sentar 7 personas en una mesa redonda, si una persona se sienta en el centro y las otras 6 alrededor.

Solución

Considerando el siguiente esquema de la situación.



En este caso dependiendo de la persona que esté en el centro se considerará un arreglo (o caso) diferente, y luego por cada persona que esté en el centro se ubican 6 personas en forma circular, es decir, el total de maneras para sentar 7 personas con esta condición es: $7 \times (6-1)! = 7 \times 5! = 7 \times 120 = 840$.

Conclusión

Para contar las maneras en que se pueden ordenar objetos de forma circular puedes considerar 2 estrategias:

1) Ordenar los objetos en fila y determinar cuántas rotaciones se estarían contando de más.
2) Colocar un elemento que sirva de referencia y arreglar los demás en torno a él.

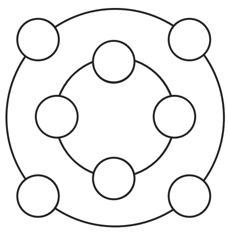
Problemas

1. Para discutir sobre "La mejora de los aprendizajes de matemática en El Salvador" se reúnen 12 personas en una mesa redonda, 3 japoneses, el Ministro de Educación de El Salvador y el Director Nacional de Educación Media, el resto son especialistas en Educación matemática. Determina de cuántas maneras se pueden sentar si:
   a) No importa el orden.
   b) Los 3 japoneses siempre están juntos, y el Director Nacional siempre está a la izquierda del Ministro.

2. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 6 personas en 9 sillas de una mesa redonda?

3. Se coloca una familia de 6 personas en una mesa redonda, determina de cuántas formas se pueden sentar si el padre y la madre se sientan frente a frente.

4. En un congreso sobre "Educación y prevención de enfermedades de transmisión sexual en adolescentes", asisten 8 personas que se sientan en dos ruedas, de 4 asientos cada una como lo muestra la figura. Determina de cuántas maneras se pueden sentar las 8 personas en los 8 asientos.



5. Determina de cuántas formas se puede colorear un cubo con 6 colores diferentes. Si se considera que si al rotar el cubo los colores coinciden con otra coloración, entonces la coloración es la misma.

2.10 Permutaciones con objetos idénticos*

Problema inicial

En el juego de boliche las bolas salen en fila y todas tienen el mismo tamaño y el mismo peso, determina todas las posibilidades de orden en que pueden salir 7 bolas de boliche si 2 son azules, 3 verdes y el resto negras.

Solución

Se puede considerar que el total de formas de ordenar las bolas es x.

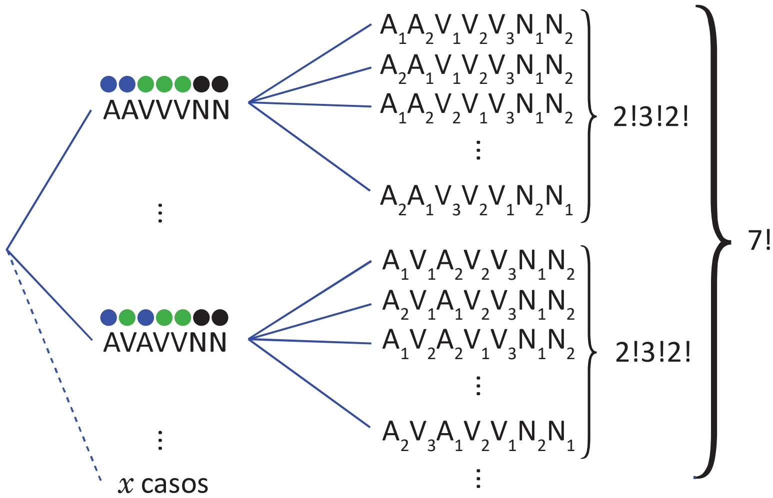
Si las bolas fueran diferentes, el total de maneras en que se pueden ordenar 7 bolas diferentes es 7!

Además, cada caso en que podrían salir las bolas tendría 2!3!2! formas diferentes de ordenarse (si fueran diferentes), como lo muestra la figura de la derecha.

Entonces se cumple que $7! = x(2!3!2!)$.

Por lo tanto, el total de formas (x) para ordenar 2 bolas azules, 3 verdes y 2 negras es:

$$x = \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210.$$



En general

El total de permutaciones que se pueden realizar con n objetos si r_1 son de un tipo (todos idénticos), r_2 de otro tipo (todos idénticos también), hasta r_k de otro tipo, y cumplen que $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$ está dado por:

$$\frac{n!}{r_1!\,r_2!\,\ldots\,r_k!}$$

Este resultado se conoce como **multicombinatorio**, porque se puede demostrar utilizando combinaciones.

Ejemplo

En el juego de ajedrez hay 16 piezas de color negro y 16 piezas de color blanco. Para cada color hay 2 torres, 2 caballos, 2 alfiles, 1 rey, 1 reina y 8 peones. Determina de cuántas maneras se pueden ordenar en fila 2 torres, 2 caballos, 2 alfiles, el rey y la reina de color blanco.

Considera que las piezas del mismo tipo tienen forma idéntica.

En total hay 8 piezas, y hay 2 torres idénticas, 2 caballos idénticos, 2 alfiles idénticos, entonces el total de formas que hay para ordenar estas piezas en fila es:

$$\frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 7! = 5\,040.$$

Problemas

1. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar las letras de la palabra PATRIA?
2. Un barco manda señales utilizando banderas de colores. Si el barco tiene 3 banderas amarillas, 2 blancas y se colocan todas las banderas en fila para realizar una señal, ¿cuántas señales diferentes se pueden hacer?
3. Para formar una comisión de jóvenes que participará en un evento organizado por el Centro de Capacitación y Promoción de la Democracia (CECADE) se deben elegir 1 jefe representante, 2 suplentes y 4 delegados acompañantes. Determina de cuántas maneras se puede escoger la comisión de un grupo de 10 jóvenes.
4. Determina de cuántas maneras se pueden arreglar las 16 piezas negras del ajedrez, si se ubican de manera circular.

2.11 Conteo por complemento

Problema inicial

En una fábrica se cuenta con 6 ventiladores; debido a que siempre se necesita que el lugar se mantenga fresco, al menos un ventilador se mantiene encendido. Determina cuántas formas hay para satisfacer esta condición.

Solución

Todos los posibles casos que se pueden dar son, que solo un ventilador esté encendido, que 2 de los 6 ventiladores estén encendidos, y así sucesivamente hasta el caso que los 6 ventiladores estén encendidos.

Para contar todas las formas posibles en que estará al menos un ventilador encendido, se pueden contar todas las maneras en que se pueden encontrar los ventiladores, es decir, como cada ventilador tiene 2 opciones (estar apagado o encendido), todas las posibles maneras en que se pueden encontrar los ventiladores son 2^6.

Y el único caso que no cumple es cuando todos los ventiladores están apagados, es decir 1 caso. Por lo tanto, el total de maneras en que al menos un ventilador está encendido es: $2^6 - 1 = 63$.

Conclusión

En ocasiones, la cantidad de casos que se pueden dar para que un evento o condición A suceda son demasiados y se vuelve difícil contarlos. Sin embargo, en ocasiones puede ser más fácil contar lo que no se pide, es decir, el complemento de lo que se quiere, y restárselo al total de maneras de ordenar todos los objetos sin condiciones. Denotando el conjunto de todos los casos posibles por U se tiene que

$$\text{A} \subset \text{U y } n(\text{U}) \text{ es finito, entonces } n(\text{A}) = n(\text{U}) - n(\text{A}^c)$$

Ejemplo

Determina cuántas formas hay para ordenar 3 niñas y 3 niños si no pueden estar las 3 niñas juntas.

Contando los casos en que las 3 niñas están siempre juntas, esto se puede hacer de $4! \times 3!$ maneras.

Y los 3 niños y 3 niñas (6 en total) se pueden ordenar de $6!$ maneras.

Entonces, restándole al total de maneras de ordenar los 6 niños las formas en que las 3 niñas siempre están juntas da como resultado $6! - 3! \times 4! = 4!(30 - 3!) = (4 \times 3 \times 2 \times 1)(30 - 6) = 576$. Por lo tanto, se pueden ordenar de 576 formas diferentes.

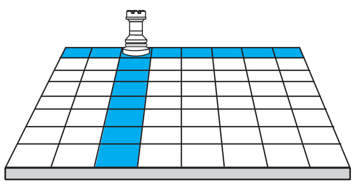
Problemas

1. Determina cuántos números de 7 cifras se pueden formar en código binario (utilizando los dígitos 0 y 1) de modo que la multiplicación de todos los dígitos del número sea cero.

2. Se colocan 4 cifras del 1 al 4 en una fila, permitiendo repetir las cifras. Determina el número de filas que tienen al menos dos cifras iguales.

3. Hay 4 niñas y 2 niños, determina de cuántas maneras se pueden colocar los 6 en una fila, de modo que los niños no estén juntos.

4. En el juego de ajedrez la torre puede atacar a otra pieza que se encuentra en línea recta en un tablero de 8×8, como lo muestra la figura. Determina de cuántas maneras se pueden ubicar 2 torres para que no se ataquen si:



   a) Una torre es negra y la otra blanca.
   b) Ambas torres son del mismo color.

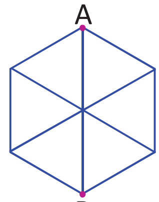
Para el literal b considera que las torres del mismo color sí se pueden atacar.

2.12 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas, utilizando estrategias de conteo de permutaciones.

1. En un congreso sobre “Oportunidades para jóvenes con discapacidad” participan 10 personas que hablan español, 15 que hablan inglés, 14 que hablan francés, y entre ellas 5 hablan español e inglés, 7 hablan inglés y francés, 4 hablan español y francés, y hay 2 personas que hablan los tres idiomas. Determina cuántas personas asistieron al congreso.

2. En la figura se muestra un hexágono regular cuyo lado mide 1 cm. Determina de cuántas maneras se puede unir el punto A con el punto B usando 3 segmentos de longitud 1 cm.



3. En una competencia de atletismo participan 3 personas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden llegar los atletas, si pueden haber incluso empates triples?

4. Determina el valor de x en la ecuación $x! = 72(x - 2)!$

5. Hay 4 niños y 5 niñas, y se colocan 4 de ellos en una fila de modo que en cada extremo hay un niño y en las posiciones centrales hay niñas. Determina de cuántas maneras se puede formar la fila de 4 personas.

6. Hay 7 tarjetas numeradas del 0 al 6, de ellas se sacan 4 y se colocan en fila, determina cuántos números múltiplos de 5 se pueden formar al tomar las tarjetas como dígitos del número, considerando que el primer dígito de izquierda a derecha no puede ser cero.

Para que un número sea múltiplo de 5, el valor de las unidades debe ser 0 o 5.

7. Determina cuántas formas hay para repartir 10 dulces de diferente sabor entre 3 niños, si puede darse el caso que se den todos los dulces a un solo niño.

8. En una clase hay 4 grupos formados por 3 niños y 2 niñas cada uno, determina cuántas maneras hay para ubicar cada grupo en filas de asientos diferentes si además tanto los niños como las niñas de cada grupo deben estar siempre juntos.

9. ¿De cuántas formas se pueden ubicar en un estante 3 libros de 7° grado (iguales), 6 libros de 8° (iguales) y 4 de 9° (iguales), si los de 8° deben estar todos juntos?

10. Determina de cuántas formas se pueden ubicar circularmente 7 personas si:

    a) Dos de ellas están juntas.
    b) Dos de ellas no están a la par.

3.1 Combinaciones

Problema inicial

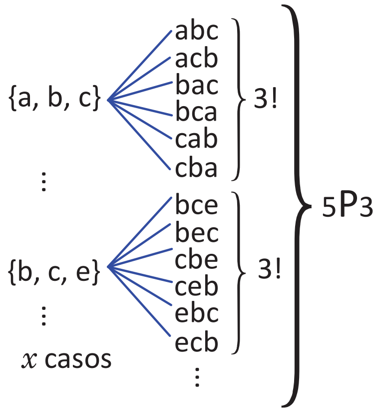
Determina de cuántas formas se pueden seleccionar 3 letras del siguiente conjunto {a, b, c, d, e}.

Solución

Tomando x como el total de formas de seleccionar 3 letras del conjunto {a, b, c, d, e}.

Dado que en una selección de 3 letras no importa en que orden se haga, entonces cada selección multiplicada por 3! dará como resultado todas las formas de ordenar 3 de las 5 letras, es decir, $x(3!) = {}_5P_3$.

Por lo tanto, el total de formas que hay para seleccionar 3 letras del conjunto {a, b, c, d, e} es: $x = \frac{{}_5P_3}{3!} = 10$.



Conclusión

Una selección de objetos donde el orden no importa se conoce como **combinación**.

Una combinación a menudo está relacionada con la forma de escoger un grupo de objetos, porque en este sentido no importa el orden, sino el conjunto final de objetos que se elija.

El número total de combinaciones que se pueden realizar escogiendo r objetos entre un conjunto de n objetos, con $0 \leq r \leq n$ está dado por: $\frac{{}_nP_r}{r!}$.

Este número total de combinaciones se denota por ${}_nC_r$, y se lee "n combino r", es decir:

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Observa que ${}_nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1$.

Observa que ${}_nC_{(n-r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_nC_r$ y es equivalente de n objetos distintos escoger r que se sacan o escoger $n - r$ que se dejan.

Ejemplo

En una bolsa hay 3 pelotas rojas (iguales) y 4 pelotas verdes (iguales), determina de cuántas formas se pueden ordenar en una fila las 7 pelotas.

Se puede considerar que se tienen 7 espacios en la fila, entonces será suficiente escoger en cuáles espacios irán las bolas rojas (las bolas azules irán en los espacios restantes), y esto se puede hacer de ${}_7C_3$:

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

3 factores

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}$$

3 factores

Por lo tanto, las 7 pelotas se pueden ordenar de 35 formas diferentes.

Este problema se puede resolver utilizando permutaciones o combinaciones, dependiendo si se toma de referencia los objetos o los espacios de los objetos.

Problemas

1. ¿Cuántos licuados diferentes se pueden hacer combinando 2 frutas que pueden ser fresa, melón, zapote, guayaba, papaya y mango? ¿Cuántos con 3 frutas?

2. Se tienen 5 puntos en el plano cartesiano de modo que no hay 3 de ellos alineados. Determina cuántos segmentos de recta que unan 2 de dichos puntos se pueden trazar.

3. Se tiene el conjunto {1, 2, 3, 4, 5}. ¿Cuántos de sus subconjuntos tienen solo un número? ¿Cuántos dos números? ¿Cuántos tres números? ¿Cuántos cuatro números? ¿Cinco números? ¿Y ningún número?

3.2 Combinaciones y principios de conteo

Problema inicial

Se dispone de un grupo de 5 mujeres y 3 hombres, resuelve:

a) ¿Cuántas formas hay para escoger 2 personas, si ambas tienen que ser del mismo sexo?

b) ¿Cuántas formas hay para escoger 4 personas, de modo que sean 2 hombres y 2 mujeres?

Solución

a) Para esta situación se pueden dar 2 casos:

Caso 1: pueden ser 2 mujeres, estas se pueden elegir de ${}_5C_2$ maneras diferentes.

Caso 2: pueden ser 2 hombre, estos se pueden elegir de ${}_3C_2$ maneras diferentes.

Por lo tanto, por el principio de la suma, el total de formas para escoger 2 personas, ambas del mismo sexo es: ${}_5C_2 + {}_3C_2 = 10 + 3 = 13$.

b) Primero se pueden elegir las mujeres de ${}_5C_2$ maneras. Luego por cada forma de escoger las mujeres hay ${}_3C_2$ maneras para escoger los hombres.

Por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de formas para escoger 4 personas (2 de un sexo y 2 de otro sexo) es: ${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 10 \times 3 = 30$.

Conclusión

En algunas situaciones será necesario aplicar los principios de suma y multiplicación a las combinaciones para contar todos los casos. Además, en las permutaciones puede analizarse cómo escoger los objetos que se ordenarán para luego ordenarlos.

Ejemplo

Se tienen 7 libros de matemática (todos diferentes) y 5 sobre derechos de la niñez y la adolescencia (todos diferentes). Determina de cuántas formas se pueden ordenar 3 libros de matemática y 2 sobre derechos de la niñez y la adolescencia en un estante.

Se pueden elegir primero los 3 libros de matemática, esto se puede hacer de ${}_7C_3$ formas, y luego se eligen los 2 libros sobre derechos de la niñez y la adolescencia, esto se puede hacer de ${}_5C_2$ formas.

Finalmente los libros se pueden ordenar de 5! formas. Por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de maneras para ordenar todos los libros es: ${}_7C_3 \times {}_5C_2 \times 5! = 35 \times 10 \times 120 = 42\,000$.

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para ubicar 2 niños y 3 niñas en una fila, escogiendólos de un grupo de 3 niños y 4 niñas.

2. De un grupo de 6 hombres y 4 mujeres se desea formar una comisión de tres personas, determina cuántas comisiones distintas se pueden formar si:

a) No hay restricciones.

b) Debe haber solo hombres o solo mujeres.

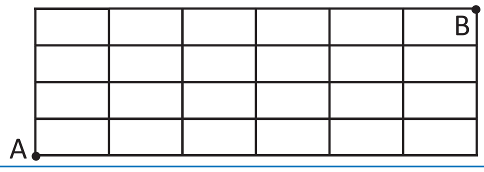
c) Debe haber dos hombres y una mujer.

d) Debe haber al menos una mujer.

3.3 Conteo de caminos

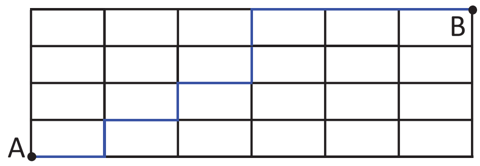
Problema inicial

La cuadrícula de la derecha representa las calles de Sonsonate por las que se puede conducir, determina de cuántas formas puede ir una persona desde el punto A al punto B por el camino más corto.



Solución

Para que un camino sea de longitud mínima debe moverse únicamente hacia la derecha y hacia arriba (sino se estaría regresando), entonces el problema se resume a hacer una cadena de 6 + 4 = 10 pasos, de los cuáles 4 son verticales y 6 son horizontales.



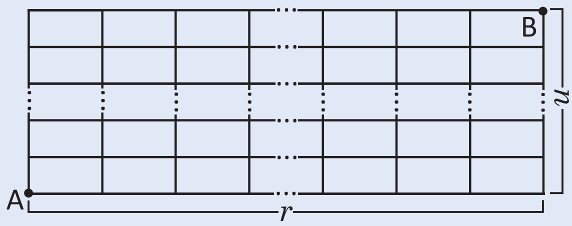
Para ello, basta con escoger donde irán los 6 pasos hacia la derecha, y esto se puede hacer de ${}_{10}C_{6}$ formas.

Por lo tanto, el total de caminos más cortos para llegar del punto A al punto B es: ${}_{10}C_{6} = 210$.

Conclusión

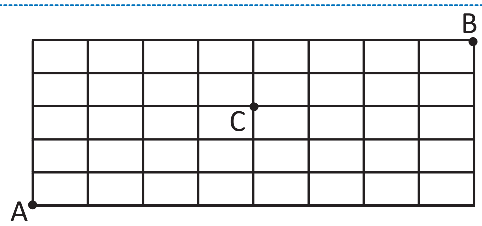
En una cuadrícula de $n \times r$ celdas, para determinar el total de caminos más cortos que van del punto A al punto B se pueden usar combinaciones, y el total será igual a: ${}_{(n+r)}C_{r}$.

Esta construcción por caminos puede ser muy útil para la demostración de algunas identidades combinatorias.



Ejemplo

Determina de cuántas formas se puede ir desde el punto A hasta el punto B por el camino más corto si se debe pasar por el punto C.



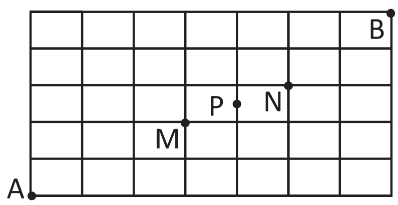
Para llegar de A a C se tienen que dar 4 pasos horizontales y 3 verticales, entonces hay un total de ${}_{7}C_{4}$ caminos de longitud mínima. Luego para llegar de C a B hay ${}_{6}C_{4}$ caminos de longitud mínima.

Por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de caminos de longitud mínima que van de A hacia B pasando por C son ${}_{7}C_{4} \times {}_{6}C_{4} = 35 \times 15 = 525$.

Problemas

Para la siguiente cuadrícula, determina cuántos caminos de longitud mínima hay que

a) Llevan de A a B.
b) Llevan de A a B pasando por M.
c) Llevan de A a B pasando por N.
d) Llevan de A a B pasando por M y N.
e) Llevan de A a B pasando por M o N.
f) Llevan de A a B y no pasan por M ni por N.
g) Llevan de A a B pasando por P.



3.4 Demostraciones utilizando conteo de caminos*

Problema inicial

Demuestra utilizando un argumento por caminos, la propiedad recursiva de Pascal:

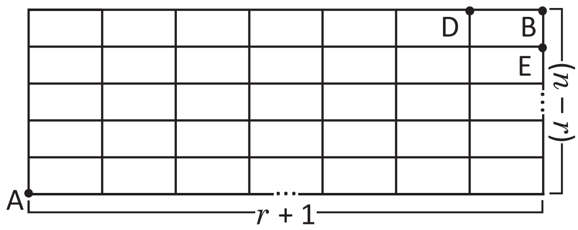
$$(n+1)\mathrm{C}(r+1) = n\mathrm{C}r + n\mathrm{C}(r+1) \text{ con } n \geq r$$

Solución

Considerando una cuadrícula de dimensión $(n-r) \times (r+1)$, y considerando que para llegar del punto A al punto B solo hay dos casos, pasando por el punto D o pasando por el punto E.

El total de maneras para llegar de A hasta B es $(n+1)\mathrm{C}(r+1)$, debido a que $(n-r)+(r+1) = n+1$.

Además, para llegar al punto D hay $n\mathrm{C}r$ maneras, debido a que $(n-r)+r = n$.



Y para llegar al punto E hay $n\mathrm{C}(r+1)$ maneras, debido a que $(n-r-1)+(r+1) = n$.

Por lo tanto, $(n+1)\mathrm{C}(r+1) = n\mathrm{C}r + n\mathrm{C}(r+1)$.

Conclusión

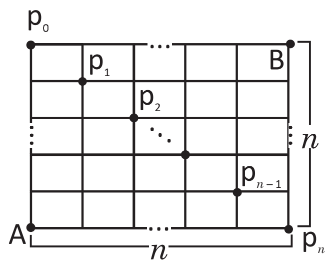
Para demostrar algunas identidades combinatorias se puede utilizar el conteo de caminos, para ello hay que crear una cuadrícula que se adecúe a la situación y luego contar los caminos de dos maneras diferentes.

Ejemplo

Demuestra la identidad utilizando un argumento por caminos:

$$(n\mathrm{C}0)^2 + (n\mathrm{C}1)^2 + \cdots + [n\mathrm{C}(n-1)]^2 + (n\mathrm{C}n)^2 = 2n\mathrm{C}n$$

Considerando una cuadrícula de $n \times n$, entonces el total de caminos de longitud mínima que hay para llegar de A hasta B es $2n\mathrm{C}n$.



Y también se pueden contar estos caminos en casos, un caso (que pase por el punto p_0) sería que en los primeros n pasos no hay pasos horizontales, entonces en los siguientes n pasos no hay pasos verticales, esto se puede hacer de $(n\mathrm{C}0)(n\mathrm{C}0)$ maneras.

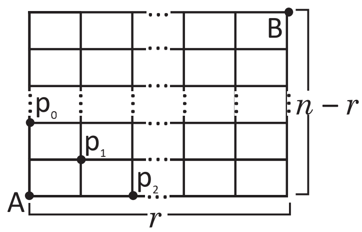
Otro caso (que pase por el punto p_1) es dar un paso horizontal en los primeros n y entonces solo se podría dar un paso vertical en los últimos n pasos, esto se puede hacer de $(n\mathrm{C}1)(n\mathrm{C}1)$ maneras. Así sucesivamente hasta llegar al caso (que pase por el punto p_n) que en los primero n pasos todos sean horizontales y los últimos n pasos sean todos verticales, esto se puede hacer de $(n\mathrm{C}n)(n\mathrm{C}n)$ maneras.

Por lo tanto, $(n\mathrm{C}0)^2 + (n\mathrm{C}1)^2 + \cdots + [n\mathrm{C}(n-1)]^2 + (n\mathrm{C}n)^2 = (2n)\mathrm{C}n$.

Problemas

Demuestra la siguiente identidad utilizando un argumento por caminos en la figura de abajo:

$$n\mathrm{C}r = 2\mathrm{C}0[(n-2)\mathrm{C}r] + 2\mathrm{C}1[(n-2)\mathrm{C}(r-1)] + 2\mathrm{C}2[(n-2)\mathrm{C}(r-2)].$$



Unidad 7

3.5 Identidades combinatorias contando de 2 formas*

Problema inicial

Utiliza un argumento por conjuntos para demostrar la siguiente identidad combinatoria.

$$n\text{C}0 + n\text{C}1 + n\text{C}2 + \cdots + n\text{C}(n-2) + n\text{C}(n-1) + n\text{C}n = 2^n$$

Solución

Contando la cantidad de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de n elementos. Contando de 2 maneras distintas.

Forma 1: Contando las posibilidades que tiene cada elemento.

Cada elemento tiene 2 posibilidades, estar o no estar en el subconjunto; por lo tanto el total de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de cardinalidad n es: 2^n.

$$\underset{\text{Elemento } 1}{\underline{\;2\;}} \times \underset{\text{Elemento } 2}{\underline{\;2\;}} \times \cdots \times \underset{\text{Elemento } n-1}{\underline{\;2\;}} \times \underset{\text{Elemento } n}{\underline{\;2\;}}$$

Forma 2: Contando las posibilidades que tiene cada subconjunto.

La cantidad de subconjuntos con cero elementos son: $n\text{C}0$.
La cantidad de subconjuntos con un elemento son: $n\text{C}1$.
La cantidad de subconjuntos con dos elementos son: $n\text{C}2$.

Y así sucesivamente hasta llegar a la cantidad de subconjuntos que tienen n elementos.

Por lo tanto el total de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de cardinalidad n es:

$$n\text{C}0 + n\text{C}1 + n\text{C}2 + \cdots + n\text{C}(n-2) + n\text{C}(n-1) + n\text{C}n$$

Y como se contó lo mismo, se debe cumplir que: $n\text{C}0 + n\text{C}1 + n\text{C}2 + \cdots + n\text{C}(n-2) + n\text{C}(n-1) + n\text{C}n = 2^n$.

Conclusión

Para demostrar identidades combinatorias se puede contar alguna situación de dos formas distintas, este método se conoce como **comparación**.

Problemas

Demuestra las siguientes identidades utilizando un argumento por conjuntos.

a) $n\text{C}r = n\text{C}(n-r)$.
b) $(n+1)\text{C}(r+1) = n\text{C}r + n\text{C}(r+1)$, con $n \geq r+1$.
c) $n\text{C}r = 2\text{C}0(n-2)\text{C}r + 2\text{C}1[(n-2)\text{C}(r-1)] + 2\text{C}2[(n-2)\text{C}(r-2)]$, con $n \geq r+2$, $r \geq 2$.
d) $(n+m)\text{C}r = n\text{C}0(m\text{C}r) + n\text{C}1[m\text{C}(r-1)] + \cdots + n\text{C}(r-1)(m\text{C}1) + n\text{C}r(m\text{C}0)$, con $(m \geq r)$ y $(n \geq r)$.

Para b), considerar un conjunto A con $n+1$ elementos del cual se sacan $r+1$ elementos, y que para un elemento particular de A hay dos opciones: estar o no estar en la extracción.

Para c), considerar un conjunto A con n elementos que se puede dividir en dos conjuntos, uno con 2 elementos y otro con $n-2$ elementos, y se sacan r elementos de A.

Para d), razonar de manera similar al literal anterior.

3.6 Triángulo de Pascal

Problema inicial

Realiza las siguientes actividades:

a) Elabora una tabla y coloca en las filas valores de n desde 0 hasta 5, y en las columnas valores de r desde 0 hasta 5 también. En cada celda (que sea posible) calcula el valor del combinatorio $_nC_r$.

b) Ordena los valores de los combinatorios en forma triangular, desde el valor de $n = 0$ hasta $n = 5$.

c) Determina el patrón que sigue una fila a partir de la que le antecede y a partir de él deduce los valores de la sexta fila del triángulo sin calcular directamente los combinatorios.

Solución

a) En la primera fila solo se puede calcular un combinatorio, $_0C_0 = 1$; en la segunda fila solo se pueden calcular 2 combinatorios, $_1C_0$ y $_1C_1$; en la tercera fila solo se pueden calcular 3 combinatorios, $_2C_0$, $_2C_1$ y $_2C_2$. Así sucesivamente se calculan los valores de la tabla.

n \ r	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

b) Ordenando los combinatorios de la tabla en forma triangular:

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1

c) Analizando el triángulo formado, los costados siempre serán unos, puesto que allí queda el valor de $_nC_0$ (= 1) y $_nC_n$ (= 1), y al parecer el número que queda por debajo y en medio de dos números, es la suma de los dos números que están por encima de él. Por ejemplo, 2 está por debajo de 1 y 1, y se cumple que 1 + 1 = 2; de manera análoga 10 está debajo de 6 y 4, y se cumple que 6 + 4 = 10. Siguiendo este patrón, los valores de la fila 6 serían: 1, 1 + 5, 5 + 10, 10 + 10, 10 + 5, 5 + 1 y 1.

$n = 0$	1
$n = 1$	1 + 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 + 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1

Conclusión

El triángulo construido por los combinatorios se llama **triángulo de Pascal**. El patrón deducido en el Problema inicial puede ser probado matemáticamente utilizando la propiedad recursiva de Pascal que se demostró en la clase anterior, $_{(n+1)}C_{(r+1)} = {_nC_r} + {_nC_{(r+1)}}$.

$$_0C_0$$
$$_1C_0 \quad _1C_1$$
$$_2C_0 \quad _2C_1 \quad _2C_2$$
$$_3C_0 \quad _3C_1 \quad _3C_2 \quad _3C_3$$
$$_4C_0 \quad _4C_1 \quad _4C_2 \quad _4C_3 \quad _4C_4$$
$$_5C_0 \quad _5C_1 \quad _5C_2 \quad _5C_3 \quad _5C_4 \quad _5C_5$$
$$_6C_0 \quad _6C_1 \quad _6C_2 \quad _6C_3 \quad _6C_4 \quad _6C_5 \quad _6C_6$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots$$

Problemas

1. Determina los valores de la séptima y octava fila del triángulo de Pascal sin calcular los combinatorios.

2. A la derecha se muestran dos filas del triángulo de Pascal. Justifica el cálculo que genera el segundo renglón aplicando que $_{(n+1)}C_{(r+1)} = {_nC_r} + {_nC_{(r+1)}}$.

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Unidad 7

3.7 Binomio de Newton*

Problema inicial

Considerando el desarrollo del producto $(x + y)^5$, determina el coeficiente que acompaña a la parte literal x^2y^3.

Solución

El desarrollo de la expresión $(x + y)^5$ se puede expresar a partir de $(x + y)^5 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$.

Para desarrollar $(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$ se toma x o y de cada paréntesis y se multiplican, luego se simplifican términos semejantes. El coeficiente de x^2y^3 es igual al número de casos en que se toman tres y de entre los 5 paréntesis, es decir $5\text{C}3 = 10$.

Por lo tanto, el coeficiente que acompaña la parte literal x^2y^3 en el desarrollo del producto $(x + y)^5$ es:

$$5\text{C}3 = 10.$$

Teorema

En general considerando el desarrollo de $(x + y)^n$, el coeficiente que acompaña a la parte literal $x^{n-r}y^r$, con $0 \leq r \leq n$ es: $n\text{C}r$.

Por lo tanto, se cumple el siguiente resultado para desarrollar $(x + y)^n$:
$(x + y)^n = (n\text{C}0)x^n + (n\text{C}1)x^{n-1}y + (n\text{C}2)x^{n-2}y^2 + \cdots + [n\text{C}(n-2)]x^2y^{n-2} + [n\text{C}(n-1)]xy^{n-1} + (n\text{C}n)y^n.$

Y se puede expresar utilizando sumatorio de la siguiente manera:

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} (n\text{C}r)x^{n-r}y^r.$$

Este resultado se conoce como **binomio de Newton**, y además puede ser utilizado para demostrar algunas propiedades o identidades de los combinatorios que no son tan obvias utilizando conteo.

Ejemplo

Demuestra la siguiente identidad combinatoria: $n\text{C}0 + n\text{C}1 + n\text{C}2 + \cdots + n\text{C}(n-2) + n\text{C}(n-1) + n\text{C}n = 2^n$.

Utilizando el binomio de Newton y dándole los valores numéricos para $x = 1$ y $y = 1$.

$$(1 + 1)^n = (n\text{C}0)1^n + (n\text{C}1)1^{n-1}1 + (n\text{C}2)1^{n-2}1^2 + \cdots + [n\text{C}(n-2)]1^21^{n-2} + [n\text{C}(n-1)]1^11^{n-1} + (n\text{C}n)1^n$$

$$2^n = n\text{C}0 + n\text{C}1 + n\text{C}2 + \cdots + n\text{C}(n-2) + n\text{C}(n-1) + n\text{C}n.$$

Problemas

1. Determina el coeficiente de x^7 en el desarrollo del binomio $(1 - x)^{10}$.

2. Determina el coeficiente de x^2y^6 en el desarrollo del binomio $(x + 3y^3)^4$.

3. Determina el coeficiente del término que no contiene x en el desarrollo del binomio $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$.

4. Demuestra: $\sum_{r=0}^{n} 3^r(n\text{C}r) = 4^n$.

Puedes aplicar un método similar al del ejemplo.

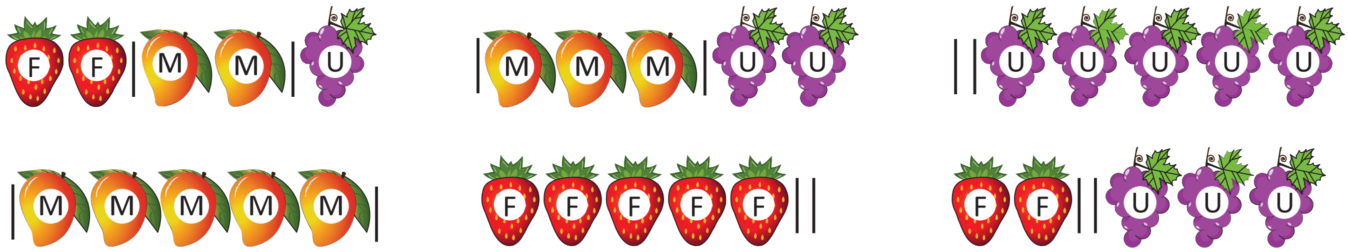
3.8 Técnica de los separadores*

Problema inicial

José quiere comprar 5 dulces en la tienda y le dan a escoger 3 sabores diferentes, fresa, mango y uva. ¿De cuántas formas puede escoger José los 5 dulces que desea comprar, si incluso podría comprarlos todos de un mismo sabor?

Solución

Se pueden escoger los sabores en orden, fresa, mango y uva, y se pone una | (separador) entre los grupos de diferente sabor. Por ejemplo:



Entonces una fila de 5 bolitas (O) y 2 separadores (|), corresponde a una única combinación de sabores de dulces, por lo tanto, el problema se reduce a contar el total de maneras que hay de ordenar 5 bolitas idénticas y 2 separadores idénticos. Y esto se puede hacer escogiendo los 2 lugares de entre los 7 que pueden ocupar los separadores, es decir de $_7C_2$ maneras (o bien escogiendo los lugares de las bolitas de $_7C_5$ maneras).

○○|○○|○

El total de formas en que se pueden escoger 5 dulces de entre 3 sabores es $_7C_2 = 21$.

En general

El total de formas para escoger r objetos de n tipos diferentes entre sí, si los objetos de un tipo son idénticos entre sí, se puede hacer agregando $n - 1$ separadores y el total estaría dado por:

$$_{(n+r-1)}C_r.$$

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para pedir 6 pupusas escogiendo entre queso, frijol con queso, revueltas y queso con loroco, si:
   a) No hay restricciones.
   b) Debe pedirse al menos 1 de cada clase.
   c) Se deben pedir al menos 3 revueltas.
   d) Deben pedirse 2 de queso y a lo sumo 2 revueltas.

Puedes asegurar una de cada clase y luego pedir las otras 2 de cualquier clase.

2. Determina todas las soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$, si:
   a) Son enteros no negativos.
   b) Son enteros positivos.

Puedes analizar de manera parecida al problema 1 literal b.

3.9 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas, utilizando estrategias de conteo de combinaciones.

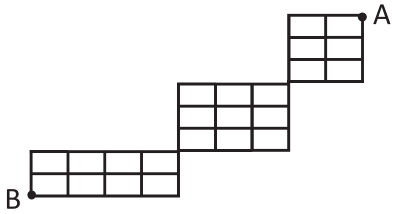
1. Se tienen 3 cartas iguales, y se dispone de 5 sobres de diferente color. Determina de cuántas formas se pueden colocar las cartas en los sobres.

2. Determina cuántos triángulos se pueden formar uniendo tres vértices de un hexágono.

3. ¿Cuántas cadenas binarias (de ceros y unos) de longitud 8 tienen como máximo 3 unos?

4. Se tiene 6 niñas y 3 niños, determina de cuántas formas se pueden ordenar si los 3 niños no pueden estar uno a la par de otro (siempre tienen que estar separados por al menos una niña).

5. Determina cuántos caminos de longitud mínima hay para llegar de A hasta B en la siguiente figura.



6. Resuelve:

   a) En el binomio de Newton $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n}(n\mathrm{C}r)x^{n-r}y^r$, sustituye $x = 1$ y $y = -1$, para demostrar la relación $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r n\mathrm{C}r = 0$.

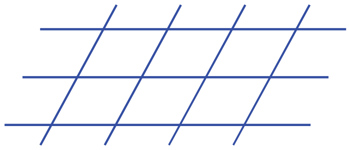
   b) Encuentra el valor de $\sum_{r=2}^{2020}(-1)^r(2\,020\mathrm{C}r)$ utilizando la relación del literal a.

7. Un grupo de 7 amigos quiere comprar paletas en una heladería, si en la heladería hay 7 sabores diferentes de paletas, determina de cuántas formas se puede comprar una paleta para cada integrante del grupo de amigos.

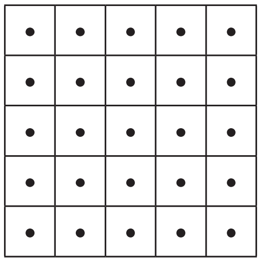
3.10 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Determina cuántos paralelogramos hay en la figura de la derecha. Las líneas horizontales y oblicuas son paralelas respectivamente.



2. Considerando el siguiente arreglo de puntos sobre el tablero de la figura.



Determina el número de formas en que se pueden seleccionar 3 puntos de modo que sean los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean paralelos a los lados de la cuadrícula.

3. De un grupo de 8 estudiantes se harán 4 grupos de 2 estudiantes. Determina cuántos grupos se pueden formar si:

a) Cada grupo hablará sobre un tema distinto que puede ser: equidad de género, democracia, medio ambiente o educación integral de la sexualidad.

b) Todos los grupos deben discutir sobre la inclusividad.

4. Determina de cuántas maneras se pueden agrupar 9 personas en 3 grupos, cuando el número de personas de cada grupo es:

a) 2, 3 y 4. b) 3, 3 y 3. c) 2, 2 y 5.

5. Demuestra la fórmula $\frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$ vista en la clase 2.10 aplicando combinaciones.

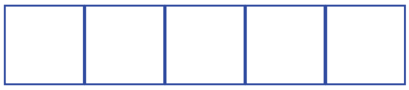
6. Demuestra la igualdad $n\mathrm{C}r = \frac{n(n-1)}{r\,(r-1)}[(n-2)\mathrm{C}(r-2)]$ aplicando la fórmula $p\mathrm{C}q = \frac{p!}{(p-q)!q!}$.

Unidad 7

3.11 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Se pintan los 5 cuadrados de la figura con los colores rojo, verde y azul; de modo que dos contiguos (a la par uno del otro) tengan diferentes colores, y no se requiere utilizar todos los colores. Determina de cuántas formas se pueden pintar en cada caso:



a) Sin restricción b) Simétricamente c) Solo verde y azul

2. Determina el número de filas compuestas por las cifras: 1, 2, 3, 4 y 5 no repetidas y de modo que en los dos extremos hay números impares.

3. En un país que tiene varios aeropuertos, una aerolínea ofrece vuelos que conectan cualesquiera dos aeropuertos de dicho país. Si se sabe que la aerolínea realiza 42 vuelos diferentes (que conectan 2 aeropuertos diferentes en cada vuelo), determina cuántos aeropuertos tiene dicho país tomando en cuenta que el viaje que conecta un aeropuerto A con un aeropuerto B se considera diferente al viaje que conecta al aeropuerto B con el aeropuerto A.

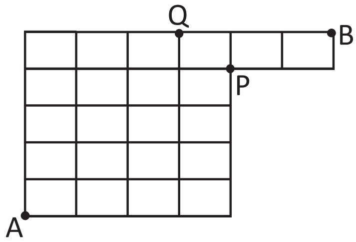
4. Una rana se ubica en el escalón 10 de unas gradas, la rana se mueve un escalón por salto (hacia arriba o hacia abajo). ¿Cuántas formas existen para que la rana en su décimo salto quede en el escalón 14?

5. Determina de cuántas formas se puede ir por la ruta más corta en las condiciones siguientes:

a) De A a B pasando por P.

b) De A a B pasando por Q.

c) De A a B.



6. Demuestra que ${}_{15}C_0 + {}_{16}C_1 + {}_{17}C_2 + {}_{18}C_3 = {}_{19}C_3$.

Puedes sustituir el primer término ${}_{15}C_0$ (= 1) por ${}_{16}C_0$ (= 1), y luego aplicar la fórmula ${}_pC_q + {}_pC_{(q+1)} = {}_{(p+1)}C_{(q+1)}$ repetidamente.